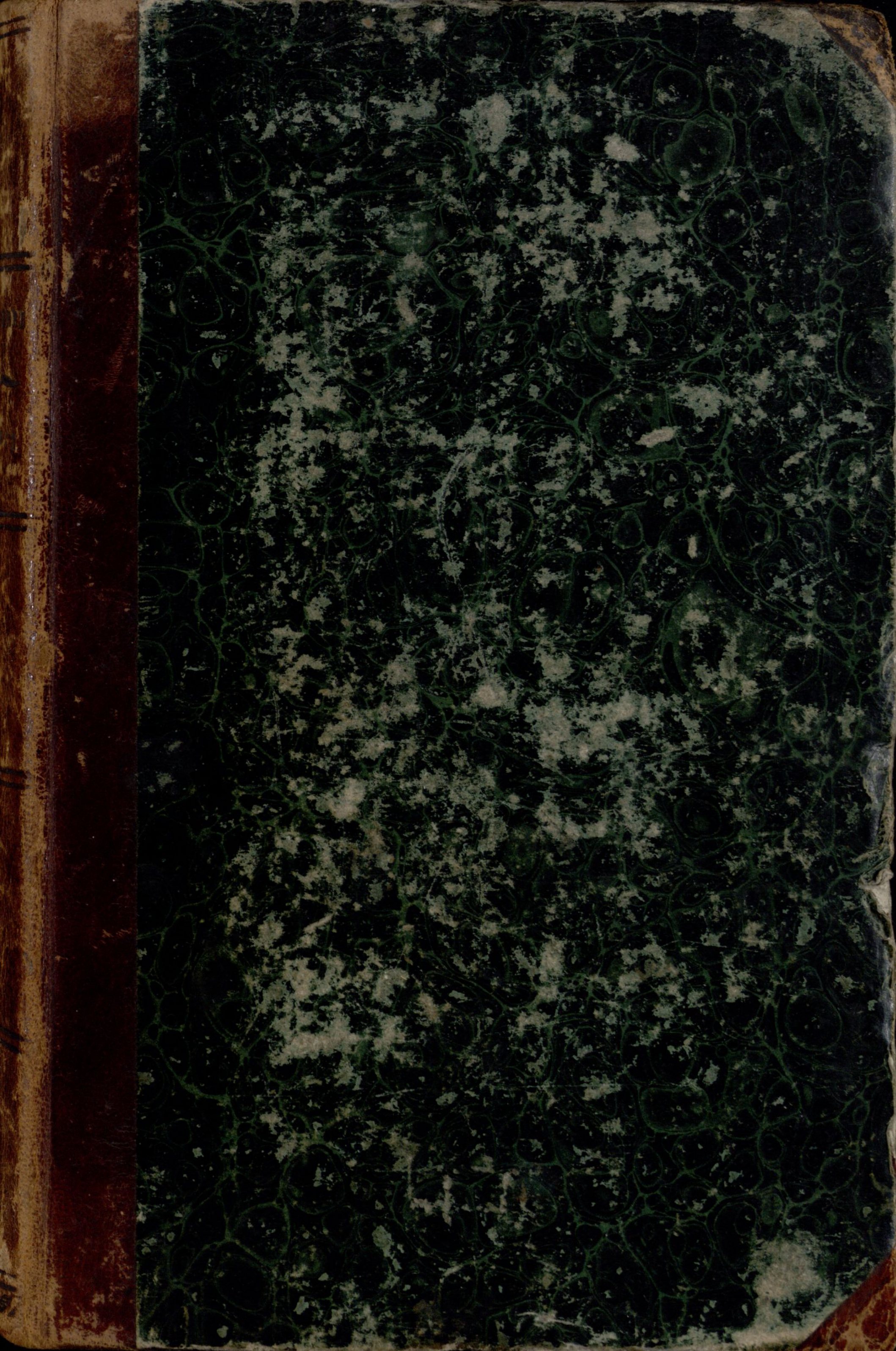
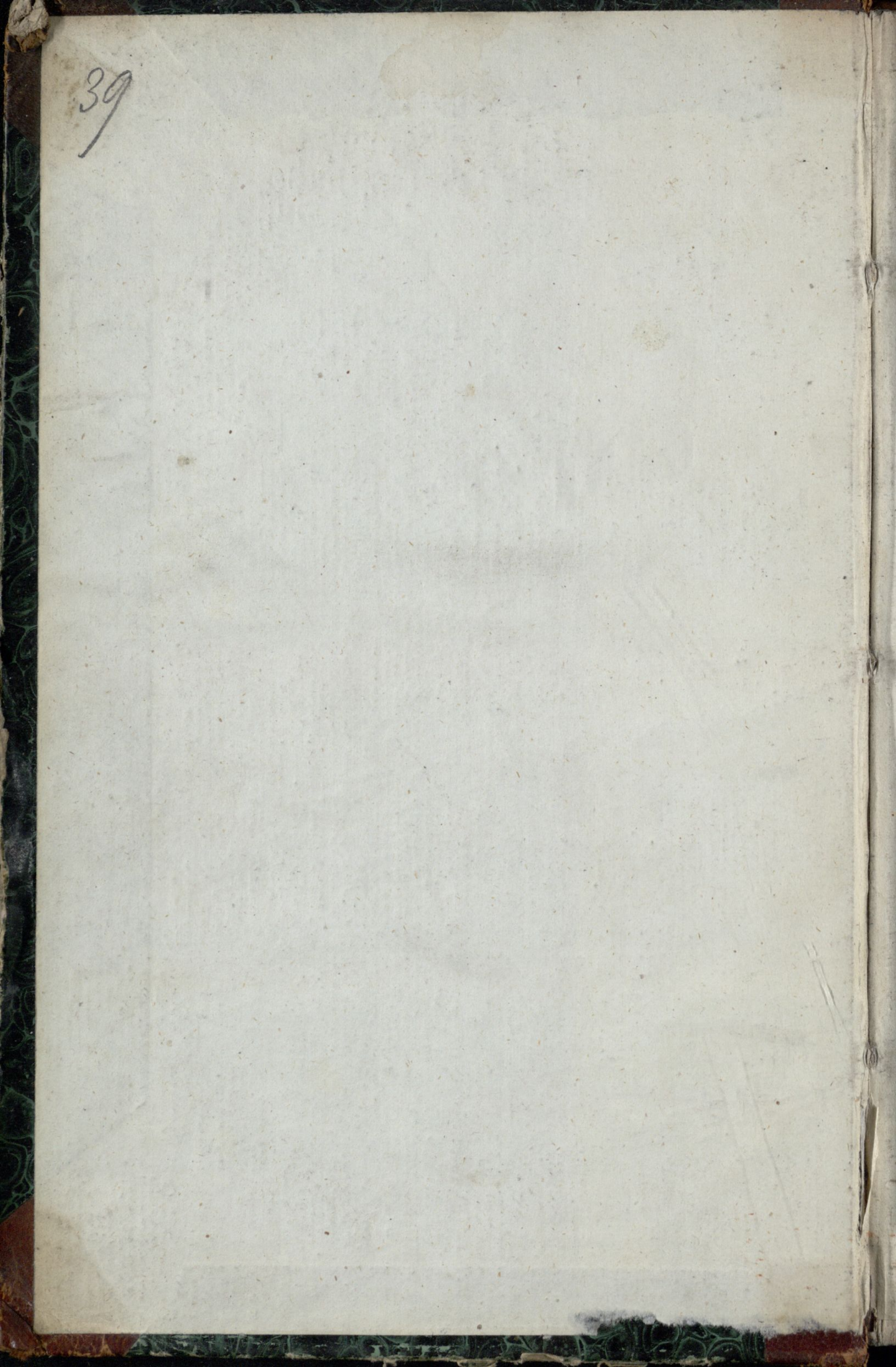

D'ALGEBRE




39

LEÇONS
D'ALGÈBRE

Les exemplaires qui ne portent point la signature de l'auteur seront réputés contrefaits.

L. Lefebure de Fourcy

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET, RUE DE VAUGIRARD, 9.

LEÇONS

D'ALGÈBRE

PAR

LEFEBURE DE FOURCY

CHEVALIER DE LA LÉGION-D'HONNEUR
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ACADÉMIE DE PARIS
EXAMINATEUR POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SIXIÈME ÉDITION

PARIS

BACHELIER, LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
QUAI DES AUGUSTINS, 55

1850

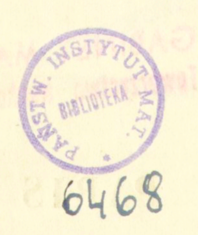

PAŃSTW. INSTYTUT MAT.
BIBLIOTEKA

TABLE DES MATIÈRES.

N. B. On a marqué d'une étoile les parties qui ne sont point exigées pour l'admission à l'École Polytechnique.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

LEÇONS

D'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Objet de l'algèbre. — Premières difficultés qui se présentent.

1. Dans toute question qu'on peut proposer sur les nombres, il doit exister entre les *données* et les *inconnues* certaines conditions qui sont indiquées par l'énoncé de la question : la *solution* a pour but de déterminer les inconnues de manière qu'elles vérifient ces conditions. Il faut donc s'attacher d'abord à bien saisir les diverses relations par lesquelles toutes les quantités connues ou inconnues sont liées entre elles, et trouver ensuite, au moyen de ces relations, quelles opérations on doit effectuer sur les quantités données pour obtenir les inconnues. Tel est l'objet qu'on se propose plus spécialement dans cette partie des mathématiques à laquelle on a donné le nom d'ALGÈBRE.

2. Pour mieux apprécier les premiers moyens qu'elle met en œuvre, je prendrai le problème suivant : *Partager* 52 *en trois parties telles que la moyenne partie surpasse de* 9 *la plus petite, et qu'elle soit surpassée de* 13 *par la plus grande*.

D'après cet énoncé, les parties inconnues doivent remplir trois conditions :

1° Que la moyenne soit égale à la plus petite augmentée de 9 ;

2° Que la plus grande soit égale à la moyenne augmentée de 13 ;

3° Que la somme des trois parties fasse 52.

Maintenant, voici par quelles déductions on arrive aux valeurs des inconnues :

Puisque la moyenne partie doit être égale à la plus petite plus 9, au lieu de dire que la plus grande est égale à la moyenne plus 13, on peut dire qu'elle est égale à la plus petite plus 9, plus 13.

Donc la somme des trois parties se compose de 3 fois la plus petite, plus 2 fois 9, plus 13 ; et comme 2 fois 9, plus 13, font 31, on peut dire encore que cette somme est égale à 3 fois la petite partie, plus 31.

Or, l'énoncé exige que cette même somme fasse 52 : donc, si on retranche 31 de 52, le reste 21 sera égal à 3 fois la petite partie ; et, par conséquent, en divisant ce reste par 3, le quotient 7 sera la petite partie.

Alors il est évident que la moyenne partie sera 7 plus 9, ce qui fait 16; et il est évident aussi que la plus grande sera 16 plus 13, ce qui fait 29. Ainsi les trois parties inconnues sont 7, 16, 29.

3. Si dans l'énoncé de la question on changeait les nombres donnés, sans faire aucune autre altération, on arriverait aux valeurs des inconnues par des raisonnements tout à fait semblables. Mais on peut proposer la question d'une manière générale, comme il suit :

Partager une quantité donnée en trois parties telles qu'il y ait une différence donnée entre la moyenne et la plus petite, et aussi une différence donnée entre la plus grande et la moyenne.

En ces termes, les quantités données peuvent être de telles grandeurs qu'on voudra, et il ne s'agit plus de trouver que les inconnues sont égales à tels ou tels nombres particuliers, mais bien quelles opérations il faut effectuer sur les quantités données pour obtenir ces inconnues. On y parvient encore par les mêmes raisonnements, et alors voici comment ils se présentent.

La moyenne partie est égale à la plus petite, plus l'excès de la moyenne sur la plus petite.

La plus grande est égale à la moyenne, plus l'excès de la plus grande sur la moyenne. Donc, on peut dire aussi qu'elle est égale à la plus petite, plus l'excès de la moyenne sur la plus petite, plus l'excès de la plus grande sur la moyenne.

En faisant la somme des trois parties, on voit donc qu'elle contiendra 3 fois la petite partie, plus 2 fois l'excès de la moyenne sur la petite, plus une fois l'excès de la grande sur la moyenne.

Or, cette somme doit être égale au nombre à partager ; donc, en retranchant du nombre à partager 2 fois l'excès de la moyenne

partie sur la plus petite, et une fois l'excès de la grande sur la moyenne, le reste sera égal à 3 fois la petite partie. Par conséquent en divisant ce reste par 3 on aura la petite partie.

Alors, en ajoutant à cette partie l'excès dont elle est surpassée par la moyenne, on aura cette moyenne partie.

Puis, en ajoutant à la moyenne partie l'excès dont elle est surpassée par la grande, on connaîtra cette dernière.

4. Dans la solution qu'on vient d'exposer, deux causes de complication sont à remarquer. L'une vient de ce que chaque quantité, connue ou inconnue, est continuellement désignée par l'ensemble de plusieurs mots, comme *le nombre à partager, la petite partie,* etc. L'autre résulte de ce que, pour rappeler les relations des quantités entre elles, il faut fréquemment répéter les expressions qui indiquent ces relations, comme *plus, moins, multiplié par,* etc. A la vérité, ces mots sont en petit nombre dans le problème qui nous a servi d'exemple; mais on comprend que s'il y avait beaucoup de quantités à ajouter, à retrancher, à multiplier, etc., le tableau écrit des diverses relations par lesquelles les quantités sont liées entre elles, serait trop étendu pour que l'œil pût en embrasser l'ensemble. Ces difficultés étant bien reconnues, je vais montrer comment on y remédie.

Notation algébrique. — Explication de quelques dénominations.

5. Pour faire disparaître l'embarras produit par les périphrases au moyen desquelles on désigne les quantités qui entrent dans une question, on représente ces quantités par des lettres. Ordinairement les *données* sont représentées par les premières lettres de l'alphabet, a, b, c...; et les inconnues le sont par les dernières, x, y, z....

Souvent, pour désigner des grandeurs différentes, mais qui ont entre elles une analogie qu'il importe de ne point oublier, on emploie une même lettre à laquelle on donne un accent ou plusieurs. Par exemple, on écrira a', a'', a''', qu'on énonce ainsi : *a prime, a seconde, a tierce.* Souvent encore on a recours à l'alphabet grec. Le lecteur donnera sans difficulté à ces premières conventions toute l'extension dont elles sont susceptibles.

Si quelques quantités données sont exprimées en chiffres, et surtout si ces quantités sont des nombres fort simples, on gagnera

peu, sous le rapport de la brièveté, à les remplacer par des lettres. Mais comme ces nombres s'altèrent par les calculs successifs, il n'est plus possible de reconnaître, à la fin des opérations, de quelle manière ils entrent dans les résultats; et de là il suit qu'en changeant ces nombres dans la question, il faut recommencer tous les calculs qui ont déjà été faits. Quand on veut obvier à cet inconvénient, on le peut encore en mettant des lettres au lieu de ces nombres; et c'est là un des grands avantages que procure l'emploi des lettres pour représenter les grandeurs.

6. La seconde difficulté, celle qui naît de la répétition des mots *plus, moins,* etc., employés pour désigner les relations des quantités entre elles, se résout naturellement en adoptant des signes particuliers pour indiquer ces diverses relations. Je vais faire connaître ceux qui sont en usage.

7. $+$ signifie *plus,* et $-$ signifie *moins.* Ainsi, pour indiquer qu'on ajoute b à a, on écrit $a+b$; et, pour indiquer que b est retranché de a, on écrit $a-b$.

8. On emploie le signe $\times$, ou un simple point, pour indiquer une multiplication. En écrivant $a \times b$ ou $a.b$, on fait connaître que la quantité a est multipliée par b. De même, $a \times b \times c$ et $a.b.c$ signifient que a est multiplié par b, et que le produit est multiplié par c.

Lorsque les multiplicateurs successifs sont désignés par de simples lettres, on supprime les signes de multiplication, afin de rendre l'écriture plus rapide. Ainsi, abc a la même signification que $a.b.c$ ou $a \times b \times c$.

Quand les facteurs sont des nombres, cette simplification n'est plus permise : car si on voulait, par exemple, indiquer le produit de 3 par 4, et qu'on écrivît 34, on confondrait ce produit avec le nombre *trente-quatre.*

Lorsqu'on multiplie une quantité littérale par un multiplicateur numérique, on le place au-devant de cette quantité; on lui donne alors le nom de *coefficient.* Ainsi $3a$ et $\frac{2}{3}b$ signifient la même chose que $a \times 3$ et $b \times \frac{2}{3}$; 3 et $\frac{2}{3}$ sont des coefficients.

9. Pour indiquer une division, on écrit le diviseur au-dessous du dividende, et on l'en sépare par un trait horizontal : ainsi $\frac{a}{b}$ signifie *a divisé par b.* Quelquefois aussi on écrit $a : b$.

10. On nomme *puissances* d'une quantité les produits qu'on

forme en multipliant cette quantité par elle-même une fois ou plusieurs. Ainsi, aa est la 2e puissance ou le carré de a, aaa en est la 3e puissance ou le cube, $aaaa$ en est la 4e puissance, etc. On indique ces puissances d'une manière abrégée en écrivant la lettre une seule fois, et en plaçant à sa droite, un peu au-dessus, un nombre qu'on appelle *exposant*, et qui marque combien de fois elle devrait être écrite. Par exemple, a^4 représentera $aaaa$ ou la 4e puissance de a, et on lira *a exposant quatre*, ou plus simplement *a quatre*. Cette notation, imaginée par DESCARTES, a eu la plus heureuse influence sur les progrès de l'algèbre.

Il ne faut pas confondre le coefficient et l'exposant. Si j'écris $3a$, le nombre 3 est un coefficient; et si j'écris a^3, le nombre 3 est un exposant. Or, $3a$ et a^3 expriment des quantités très-différentes : car $3a$ est la même chose que $a+a+a$, et a^3 est la même chose que $a \times a \times a$. On comprendra mieux encore la différence, si on met un nombre particulier à la place de la lettre a. Par exemple, si on met 4, $3a$ représente 3 fois 4 ou 12, tandis que a^3 représente $4 \times 4 \times 4$ ou 64.

11. La quantité qui, étant élevée à une puissance, produit une quantité donnée, est une *racine* de cette dernière. Ce sera une racine 2e, 3e, 4e, etc., selon qu'il faudra en faire la 2e puissance, la 3e, la 4e, etc., pour reproduire la quantité donnée. Ainsi, la racine 4e de 16 est 2, attendu qu'on reproduit le nombre 16 en élevant 2 à la 4e puissance. La racine deuxième prend ordinairement le nom de *racine carrée*, et la racine troisième celui de *racine cubique*.

Le signe $\sqrt{\ }$, qui s'appelle *radical*, indique une racine à extraire. On lui joint un nombre qu'on nomme *exposant* ou *indice*, et qui marque de quelle racine il s'agit. $\sqrt[4]{a}$ indique la racine 4e de a. Dans la racine carrée, on sous-entend l'indice, et on écrit simplement $\sqrt{a}$.

12. Le signe $=$ est celui de l'égalité. Ainsi, en écrivant $3a+2a=5a$, on indique que si à 3 fois a on ajoute 2 fois a, la somme est égale à 5 fois a. L'ensemble des deux quantités, ainsi séparées par le signe $=$, se nomme une *égalité*. Chacune des deux quantités se nomme *membre*. Celle qui est à gauche est le *premier membre*; celle qui est à droite est le *second*.

13. Le signe $>$ veut dire *plus grand que*; et le signe $<$ veut dire *plus petit que*. Ainsi, $a>b$ signifie *a plus grand que b*;

et $a < b$ signifie *a plus petit que b*. L'ouverture du signe est toujours tournée du côté de la plus grande quantité.

14. Les dénominations de *quantité littérale*, *quantité algébrique*, *expression littérale*, *expression algébrique*, sont employées indifféremment pour désigner un assemblage quelconque de quantités représentées par des lettres, et unies entre elles par les signes de différentes opérations. Telles sont $2a^3$ et $a^3 - \sqrt{ab}$.

Chacune des quantités qui sont jointes entre elles par les signes $+$ et $-$ s'appelle *terme*, et assez ordinairement le signe fait partie du terme. Dans l'expression $9a - ab^2 + \sqrt{ab}$, il y a trois termes, savoir : $9a$, $-ab^2$, $+\sqrt{ab}$.

On appelle *quantité monome* ou simplement *monome*, une expression algébrique qui n'a qu'un seul terme ; et *polynome*, celle qui en a plusieurs. En particulier, on appelle *binome*, *trinome*, *quadrinome*, *quinome*, celles qui en ont deux, trois, quatre ou cinq. Quelquefois encore on donne aux monomes le nom de *quantités incomplexes*, et aux polynomes celui de *quantités complexes*.

On appelle *termes semblables* ceux qui sont composés des mêmes lettres, affectées des mêmes exposants. Ils peuvent d'ailleurs différer par le signe et par le coefficient. Dans l'expression $4a^2b - 3ab^2 - 2a^2b$, le premier terme $4a^2b$ est semblable au troisième $-2a^2b$. Toutes les fois qu'un polynome renferme des termes semblables, il peut recevoir une simplification dont on parlera plus loin (**29**).

En algèbre, on nomme *quantités rationnelles* celles qui ne renferment point de radical. Telles sont 17, $\frac{2}{3}a$, $a + \frac{b}{c}$.

On appelle *quantités entières* celles qui sont rationnelles et ne contiennent aucun dénominateur. Telles sont 47, $2a^2b$, $3a^2 - bc$.

15. Lorsqu'une quantité est composée avec une autre, on dit qu'elle est une *fonction* de cette dernière. Par exemple, l'expression $3x^2 - \sqrt{x}$ est une fonction de x.

Pour désigner d'une manière générale une fonction de x, on écrit $\mathrm{F}(x)$, et alors la lettre F est employée comme une abréviation du mot *Fonction*. Lorsqu'on veut représenter plusieurs fonctions différentes de x, on varie la forme de cette initiale. Par exemple, on écrira $\mathrm{F}(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, quelle que soit d'ailleurs la loi d'après laquelle chaque fonction est composée.

Quand on se sert de la même lettre F, et qu'on écrit $F(x)$, $F(y)$, on désigne par là deux fonctions composées semblablement, l'une avec x et l'autre avec y, de telle sorte que la première se change en la seconde quand on y met y au lieu de x.

Ce qui vient d'être dit s'étend naturellement aux expressions où il entre plus d'une quantité. Ainsi, l'expression $3xy - x + \sqrt{y}$ sera une fonction de x et y; et en écrivant $F(x, y)$ on désignera d'une manière générale une fonction quelconque de x et y.

Application de la notation algébrique.

16. Afin de faire ressortir les avantages qui peuvent résulter de la notation algébrique, je vais l'appliquer à la solution du problème énoncé n° 3.

Je désignerai par a le nombre à partager, par b l'excès de la moyenne partie sur la plus petite, et par c l'excès de la plus grande sur la moyenne.

De plus, je représenterai la petite partie par... x,
Alors la moyenne sera........................ $x + b$,
La plus grande sera.......................... $x + b + c$,
Et la somme des trois parties sera............. $3x + 2b + c$.

Or cette somme doit être égale au nombre à partager a; donc on a l'égalité

$$3x + 2b + c = a.$$

Si on retranche $2b$ et c de chaque membre, il vient

$$3x = a - 2b - c;$$

et si on divise par 3 on obtient, pour l'inconnue x,

$$x = \frac{a - 2b - c}{3}.$$

La plus petite partie étant une fois connue, les deux autres s'en déduisent facilement.

17. La manière dont l'inconnue x est exprimée mérite de fixer l'attention : ce n'est point une valeur numérique, c'est une *formule,* un tableau qui montre de la manière la plus claire quelles opérations on doit effectuer sur les données pour avoir l'inconnue. En effet, on peut remplacer les lettres et les chiffres par des énonciations conformes aux conventions établies; et alors la formule, ainsi traduite en langage ordinaire, se change en cette règle :

Du nombre à partager retranchez le double de l'excès de la moyenne partie sur la plus petite, et encore l'excès de la plus grande sur la moyenne, puis divisez le reste par 3; *le quotient sera la plus petite partie.*

Dès qu'on prendra pour les données des nombres particuliers, les opérations pourront s'effectuer : c'est ce qui s'appelle *mettre une formule en nombre.* Par exemple, en adoptant les nombres tels qu'ils sont dans l'énoncé du n° **2**, on devra remplacer a par 52, b par 9, c par 13; et alors on aura

$$x = \frac{52 - 9 \times 2 - 13}{3} = \frac{52 - 18 - 13}{3} = \frac{21}{3} = 7.$$

18. Les formules qu'il faut mettre en nombres ne sont pas toujours aussi simples. Supposons qu'un problème ait conduit à la suivante,

$$x = \frac{3a^2b - \sqrt[3]{a^2}}{9ab^2 + \sqrt[3]{a^2}},$$

et qu'on veuille calculer la valeur de l'inconnue x en prenant pour données $a = 8$ et $b = 2$. On remarquera d'abord que

$$3a^2b = a^2 \times b \times 3 = 8^2 \times 2 \times 3 = 64 \times 2 \times 3 = 384,$$
$$9ab^2 = a \times b^2 \times 9 = 8 \times 2^2 \times 9 = 8 \times 4 \times 9 = 288,$$
$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Par conséquent, on aura pour l'inconnue x,

$$x = \frac{384 - 4}{288 + 4} = \frac{380}{292} = 1\,\frac{88}{292} = 1\,\frac{22}{73}.$$

Les commençants doivent s'exercer à traduire les formules algébriques en langage ordinaire et à les mettre en nombres.

Des quantités négatives.

19. L'algèbre admet dans ses calculs une classe de quantités telles que — 5, — 7, etc., qu'on nomme *quantités négatives,* et qu'il importe de connaître dès à présent. La question suivante, quoique fort simple, m'aidera à me faire mieux comprendre.

Un marchand a fait un certain bénéfice dans la première année de son commerce, et une perte l'année suivante : on demande le changement qui en résulte dans son capital.

On désignera par a le bénéfice de la première année, et par b la

perte essuyée dans la seconde. Si a surpasse b, il est clair que le capital du marchand aura reçu une augmentation exprimée par $a - b$.

Mais lorsque b surpasse a, la perte étant supérieure au bénéfice, le capital doit recevoir une diminution qui est exprimée par $b - a$. Dans ce cas, l'expression $a - b$, qui tout à l'heure représentait une augmentation de capital, n'offrirait plus à l'esprit que l'idée d'une soustraction impossible. Cependant les algébristes conservent toujours l'expression $a - b$ pour indiquer le changement du capital, mais, ne pouvant plus retrancher b de a, ils font la soustraction dans un ordre contraire, c'est-à-dire qu'ils retranchent a de b, et ils placent le signe — devant le reste. Par ce signe ils avertissent que le résultat ne doit plus être regardé comme une augmentation apportée au capital, mais bien comme une diminution. Par exemple, si a vaut 7000 fr., et si b vaut 4000 fr., il y a réellement augmentation de 3000 fr.; mais si, au contraire, a vaut 4000 fr., et si b vaut 7000 fr., au lieu de dire que le capital souffre une diminution de 3000 fr., on dira en termes équivalents, quoique fort éloignés du langage ordinaire, que l'augmentation est de — 3000 fr.

Les exemples sont nombreux dans lesquels il y a lieu de considérer ainsi les grandeurs sous deux acceptions tout à fait contraires, dont l'une les présente comme devant être ajoutées, tandis que l'autre les présente comme devant être retranchées. Tels sont les gains et les pertes d'un joueur; tels l'avance et le retard d'une montre; telles encore les distances qu'un mobile parcourt sur une ligne, selon qu'il avance vers l'une des extrémités de cette ligne, ou bien vers l'extrémité opposée. C'est pour embrasser d'une manière générale ces deux acceptions contraires que les algébristes ont employé les *quantités négatives;* et, laissant de côté toute question particulière, c'est de la soustraction qu'ils font naître ces quantités, comme on vient de l'expliquer plus haut.

Ainsi, en résumé, *lorsque dans une soustraction la quantité à retrancher surpasse celle dont on doit la retrancher*, *on est convenu de soustraire la plus petite de la plus grande, et d'indiquer ce changement d'ordre en plaçant le signe — devant le reste.*

Les quantités isolées, ainsi précédées du signe —, se nomment *négatives*. Par opposition, celles qui ne sont point affectées de ce signe, sont censées avoir le signe +, et on les nomme *positives*.

20. Reprenons l'expression $a - b$, et supposant que a conserve une grandeur fixe, faisons croître b à partir de zéro. On obtient d'abord des résultats décroissants; et quand b est égal à a, la différence $a - b$ est zéro. Si on continue d'augmenter b, on trouve des quantités négatives; et plus b sera grand, plus ces quantités négatives, considérées dans leur valeur absolue, seront grandes. Par exemple, prenons $a = 3$, et faisons successivement $b = 0$, 1, 2, 3; les valeurs de $a - b$ seront 3, 2, 1, 0. Mais si b continue de croître, et qu'on fasse $b = 4, 5, 6.....$ on aura $-1, -2, -3.....$

Or, parce que ces valeurs négatives viennent à la suite des nombres positifs décroissants 3, 2, 1, 0, on convient de les regarder comme plus petites que zéro; et parce que les quantités négatives qui ont une valeur absolue plus considérable viennent après celles qui ont une valeur moindre, on les regarde aussi comme plus petites que ces dernières.

Ainsi, d'après ces conventions, -2 est moindre que zéro, et -5 est moindre que -2. En se servant des signes $<$ et $>$, dont la signification a été fixée nº **13**, on peut écrire

$$-2 < 0, \quad -5 < -2, \quad \text{ou bien} \quad 0 > -2, \quad -2 > -5.$$

CHAPITRE II.

DU CALCUL ALGÉBRIQUE.

Comment on étend aux quantités négatives les opérations de l'arithmétique.

21. Les quantités algébriques peuvent, comme les nombres, être soumises à diverses opérations, telles que l'addition, la soustraction, etc. Mais, pour les quantités littérales, ces opérations diffèrent de celles qui se pratiquent sur les nombres, en ce que leurs résultats, ne pouvant être que des indications de calculs à effectuer, ne présentent réellement qu'une transformation des opérations, primitivement indiquées, en d'autres qui doivent produire les mêmes résultats. Les règles qu'il faut suivre pour effectuer ces transformations constituent le calcul algébrique.

22. Tant qu'on ne considère que des grandeurs positives, les

définitions de l'arithmétique font connaître avec précision l'objet de chaque opération ; mais elles deviennent insuffisantes quand on les applique aux quantités négatives. Par exemple, quelle signification ces définitions peuvent-elles donner à des énonciations telles que celles-ci : ajouter —5 et —7, multiplier +5 par —7, etc.? et n'est-il pas clair que de pareilles locutions doivent être rejetées comme étant tout à fait vides de sens, à moins qu'on ne fixe, par quelques conventions nouvelles, celui qu'on veut y attacher? c'est ce que je vais faire. A cet effet, je reprendrai chacune des quatre opérations ; j'étendrai, autant qu'il sera possible, la définition de chacune d'elles aux cas nouveaux qui se présenteront ; et quand cela ne se pourra point, j'établirai les conventions nouvelles auxquelles ces cas donnent lieu.

23. Addition. Cette opération, telle qu'on la conçoit en arithmétique, a pour objet de trouver une quantité qui contienne à elle seule toutes les unités et parties d'unité qui sont dans plusieurs quantités données. Cette définition ne peut s'appliquer qu'aux quantités positives ; par conséquent, de nouvelles conventions sont nécessaires pour faire connaître ce que doit être l'addition de deux quantités comme +3 et —5, ou comme —3 et +5, ou encore comme —3 et —5. Or, on peut comprendre tous ces cas, aussi bien que celui où les deux quantités seraient positives, dans les deux conventions ou règles suivantes :

1° *Pour ajouter deux quantités de même signe, on fait la somme de ces deux quantités sans faire attention au signe, et on place ce signe devant la somme.*

2° *Pour ajouter deux quantités de signes contraires, on retranche la plus petite de la plus grande, sans égard pour les signes, puis on donne au reste le signe de la plus grande.*

D'après ces conventions, on aura sur-le-champ,

$$(+3)+(+5)=+8, \qquad (-3)+(-5)=-8,$$
$$(+3)+(-5)=-2, \qquad (-3)+(+5)=+2.$$

On a employé les parenthèses afin de mieux faire ressortir les signes qui appartiennent aux nombres et ceux qui servent à indiquer l'addition.

Il est bon de remarquer que, d'après les conventions mêmes, on peut changer l'ordre des deux quantités qu'on ajoute, sans que le résultat change.

On voit qu'en algèbre l'addition n'entraîne pas toujours avec elle l'idée d'augmentation. Cependant, la dénomination de *somme* est toujours employée pour désigner le résultat. Quelquefois on y joint le mot *algébrique*, par opposition à la *somme arithmétique*, dans laquelle on ne considère que les grandeurs absolues des quantités, sans aucun égard pour les signes dont elles sont affectées.

24. Soustraction. En arithmétique, cette opération peut être considérée comme ayant pour but de trouver une quantité telle qu'en lui ajoutant une quantité donnée on reproduise une autre quantité donnée. Cette définition est évidemment applicable à tous les cas qui peuvent se présenter. Ils sont au nombre de quatre, et on va les parcourir successivement.

1° Si les deux quantités sont positives, et qu'on ait à soustraire la plus petite de la plus grande, ce sera le cas ordinaire de l'arithmétique, et le reste devra être considéré comme ayant le signe $+$. Si l'on a à soustraire la plus grande quantité de la plus petite, c'est le cas qui donne naissance aux quantités négatives (**19**); et alors on ôtera encore la plus petite de la plus grande, mais on donnera le signe $-$ au reste. Ainsi, on a

$$(+7)-(+3)=+4 \quad \text{et} \quad (+3)-(+7)=-4.$$

2° Supposons que d'une quantité positive on ait à soustraire une quantité négative : par exemple, de $+3$ à retrancher -7.

Il faut que le résultat soit tel, qu'en lui ajoutant -7, on retrouve $+3$. De là il suit que le résultat doit être positif; car s'il était négatif, en lui ajoutant -7, on aurait un nombre négatif. De plus, comme pour ajouter deux quantités de signes contraires il faut retrancher la plus petite de la plus grande, et donner au reste le signe de la plus grande (**23**), on voit que le résultat doit être plus grand que 7, et précisément égal à $3+7$ ou 10. Donc

$$(+3)-(-7)=+10.$$

3° Supposons que d'une quantité négative on doive retrancher une quantité positive : par exemple, que de -3 on ait à soustraire $+7$.

Le résultat doit être tel, qu'en lui ajoutant $+7$ on retrouve -3. Or, la somme de deux quantités positives serait positive; donc le résultat doit être négatif. En outre, il est facile de voir que, si on fait abstraction du signe de ce résultat, et qu'on en retranche 7, le

reste doit être égal à 3; donc ce résultat, en grandeur absolue, est égal à $3+7$ ou 10. En lui donnant le signe —, on aura le résultat cherché -10. Donc

$$(-3)-(+7)=-10.$$

4° Enfin, prenons le cas où les deux quantités sont négatives. Par exemple, si de -3 il faut retrancher -7, on observera qu'en ajoutant -7 au résultat cherché on doit reproduire -3; et comme 7 surpasse 3, il est clair que ce résultat doit être un nombre positif égal à l'excès de 7 sur 3. Donc,

$$(-3)-(-7)=+4.$$

Si, au contraire, il fallait de -7 soustraire -3, on verrait que le résultat doit être négatif, et que sa grandeur absolue est égale à l'excès de 7 sur 3; c'est-à-dire qu'on a

$$(-7)-(-3)=-4.$$

Il est à remarquer que dans chacun des quatre cas qu'on vient de parcourir, le résultat est toujours le même que si l'on eût ajouté le second nombre, après avoir changé son signe, avec le premier. Bien entendu que dans cette addition on se conforme aux conventions du n° **23**. Ainsi, on a cette règle simple et facile à retenir :

La soustraction revient à une addition dans laquelle on ajoute la quantité à soustraire, prise avec un signe contraire, avec l'autre quantité.

Par cette règle on aurait

$$(-17)-(-29)=(-17)+(+29)=+12.$$
$$(+14)-(-12)=(+14)+(+12)=+26.$$

25. Multiplication. Soient a et b deux nombres quelconques, il y a quatre cas à considérer, savoir :

$$+a\times+b,\quad -a\times+b,\quad +a\times-b,\quad -a\times-b.$$

Le premier cas est celui de l'arithmétique, car $+a$ et $+b$ sont la même chose que a et b; et comme le produit de a par b se représente par ab, et que ab est la même chose que $+ab$, on peut écrire, en mettant les signes en évidence, $+a\times+b=+ab$.

La définition ordinaire de la multiplication peut s'appliquer au second cas; mais pour le montrer clairement il faut examiner l'une après l'autre les hypothèses de b entier et de b fractionnaire. Si ce multiplicateur est un entier, 3 par exemple, en répétant, suivant les règles de l'addition (**23**), le multiplicande $-a$ autant de

fois qu'il y a d'unités dans 3, on aura $-a-a-a$ ou $-3a$: c'est-à-dire que, pour multiplier une quantité négative par un nombre entier positif, on fait le produit sans égard aux signes, et qu'on lui donne le signe —. De là on conclut qu'on peut diviser une quantité négative par un nombre entier positif, en prenant le quotient sans égard aux signes, et en lui donnant le signe —.

Supposons que, dans le produit $-a\times+b$, le multiplicateur soit un nombre fractionnaire tel que $\frac{7}{5}$. D'après l'idée attachée à la multiplication, il faut prendre les $\frac{7}{5}$ du multiplicande; ou, en d'autres termes, il faut diviser ce multiplicande par 5, et multiplier le résultat par 7. Or, on vient de démontrer que ces opérations doivent s'exécuter sans avoir égard au signe —, et qu'on doit donner ce signe au résultat; donc $-a\times+\frac{7}{5}=-\frac{7}{5}a$. Donc, quel que soit b, on a toujours $-a\times+b=-ab$.

Dans les deux autres cas, $+a\times-b$ et $-a\times-b$, le multiplicateur est négatif. Or, la définition de la multiplication, en prescrivant de composer le produit avec le multiplicande comme le multiplicateur est composé avec l'unité, ne montre point comment on doit avoir égard au signe — qui est devant le multiplicateur ; et sous ce rapport elle est insuffisante. Pour corriger ce défaut, on remarquera que, dans les cas où le multiplicateur est positif, le signe du multiplicande se conserve dans le produit; et par là on est conduit naturellement à ajouter, comme complément à la définition, cette convention nouvelle que, *dans les cas où le multiplicateur est négatif, il faut faire la multiplication comme s'il était positif, et changer ensuite le signe du produit.* De là on conclut immédiatement qu'on doit avoir $+a\times-b=-ab$ et $-a\times-b=+ab$.

Les différents cas qu'on vient d'examiner peuvent se résumer dans la règle suivante :

Pour multiplier deux quantités l'une par l'autre, quels que soient leurs signes, on fait le produit de ces quantités, sans avoir d'abord égard aux signes, puis on affecte le produit du signe + quand les deux facteurs ont le même signe, et du signe — quand ils ont des signes contraires.

L'usage permet encore d'énoncer la règle des signes par ces locutions abrégées :

+ *par* + *donne* +, — *par* + *donne* —,
+ *par* — *donne* —, — *par* — *donne* +.

Remarquez que, si on change le signe d'un facteur, le produit doit changer de signe, et que, si on change les signes des deux facteurs, le produit reste le même. Remarquez aussi que le produit ne change point quand on intervertit l'ordre des deux facteurs.

26. Division. La définition ordinaire convient parfaitement à l'algèbre. Son objet sera toujours de découvrir l'un des facteurs d'un produit donné, quand on connaît l'autre facteur; et par conséquent il faudra toujours qu'en multipliant le quotient et le diviseur l'un par l'autre, on reproduise le dividende.

D'abord, il est évident qu'en faisant la division, sans aucune attention aux signes, on trouvera le quotient, abstraction faite du signe qu'il doit avoir. Il reste donc à déterminer quel doit être ce signe.

Lorsque *le dividende et le diviseur ont le même signe, le quotient doit avoir le signe* + : car s'il avait le signe —, le produit du diviseur par le quotient serait de signe contraire au diviseur, et par conséquent aussi de signe contraire au dividende.

Mais *quand le dividende et le diviseur ont des signes opposés, le quotient aura le signe* — : car s'il avait le signe +, le produit du diviseur par le quotient serait de même signe que le diviseur; donc on ne reproduirait pas le signe du dividende.

De là on conclut que si a et b sont deux grandeurs absolues, dont le quotient soit désigné par c, on devra avoir

$$\frac{+a}{+b}=+c,\quad \frac{-a}{-b}=+c,\quad \frac{+a}{-b}=-c,\quad \frac{-a}{+b}=-c.$$

Addition et soustraction des monomes.

27. Désignons par a et b deux grandeurs positives. L'addition, eu égard aux signes dont ces quantités peuvent être affectées, peut donner les quatre expressions :

[1] $(+a)+(+b)$, $(+a)+(-b)$, $(-a)+(+b)$, $(-a)+(-b)$.

Tant que les lettres a et b ne recevront point de valeurs particulières, il sera impossible de réduire ces expressions à un seul terme; mais au moins peut-on les simplifier en les débarrassant des parenthèses et de plusieurs signes inutiles.

D'abord les parenthèses ne servent qu'à mieux représenter aux

yeux le signe qui est propre à chacune des quantités qu'on ajoute : ainsi elles ne sont pas strictement nécessaires, et on peut les supprimer. De plus, comme a et b signifient la même chose que $+a$ et $+b$, on pourra ôter le signe $+$ placé dans les parenthèses. Par là les quatre expressions deviennent

$$a+b, \quad a+-b, \quad -a+b, \quad -a+-b.$$

Mais il y a encore ici des doubles signes qu'on peut éviter. En effet, d'après la règle de la soustraction (**24**), l'addition de $-b$ avec une quantité quelconque revient à soustraire b de cette quantité; par conséquent, au lieu de $+-b$, on peut mettre $-b$, et alors les expressions [1] prendront les formes suivantes, qui sont les plus simples qu'on puisse leur donner,

$$a+b, \quad a-b, \quad -a+b, \quad -a-b.$$

Donc, en règle générale, on peut dire que *l'addition de deux monomes se réduit à les placer l'un à la suite de l'autre sans changer leurs signes.*

Par une conséquence nécessaire, attendu que la soustraction est une addition dans laquelle la quantité à soustraire est prise avec un signe contraire (**24**), on conclut que, *dans la soustraction, la quantité à retrancher se place, avec un signe contraire, à la suite de la quantité dont elle doit être retranchée.*

28. Les deux règles qui précèdent s'appliquent immédiatement à l'addition et à la soustraction de tant de monomes qu'on voudra, quels que soient leurs signes. Par exemple, si de $-2a^3$ on veut retrancher $-3a^2b$, et qu'au reste on doive ajouter $5ab^2$ et $-b^3$, on écrira ces quantités les unes à la suite des autres, en ayant soin de conserver les signes des quantités qui sont à ajouter, et de changer les signes de celles qui sont à soustraire. De cette manière, on a pour résultat le polynome

$$-2a^3+3a^2b+5ab^2-b^3.$$

29. Il peut se faire que parmi les monomes il y en ait qui soient semblables (**14**). Dans ce cas, le polynome résultant aura lui-même des termes semblables, et je vais montrer qu'on pourra toujours les remplacer par un seul terme : c'est ce qu'on nomme la *réduction*.

Point de difficulté quand tous les termes sont de même signe Ainsi on a évidemment

$$2a^2+4a^2+3a^2=9a^2, \quad \text{et} \quad -2a^2-4a^2-3a^2=-9a^2.$$

Dans chaque exemple ce sont des quantités de même signe qu'on ajoute ; par conséquent la première règle du n° **25** donne immédiatement ces réductions.

Pour arriver à la règle qu'il faut suivre quand les termes semblables sont disséminés dans un polynome, je m'appuierai sur une remarque qui est d'un usage presque continuel : c'est que la valeur d'un polynome demeure la même, quel que soit l'ordre dans lequel ses termes soient rangés, pourvu que chacun d'eux reste toujours précédé du même signe.

En effet, un polynome quelconque étant donné, imaginons qu'on ait écrit, comme formant deux sommes séparées, d'une part les termes positifs, et de l'autre les termes négatifs. Si on suit avec attention le détail des additions et des soustractions indiquées dans le polynome donné, on comprendra sans peine que ces opérations successives reviennent tantôt à retrancher, sur une partie de la première somme, une partie de la seconde ; tantôt à retrancher, sur une partie de la seconde, une partie de la première. Par là il devient clair que le résultat définitif doit être égal à l'excès de la plus grande somme sur la plus petite, et avoir le signe de la plus grande ; et comme les deux sommes demeurent les mêmes dans quelque ordre que les termes du polynome soient placés, on conclut que l'ordre de ces termes peut être interverti à volonté, sans que la valeur du polynome soit altérée.

Cela posé, supposons que le polynome donné ait des termes semblables. Par exemple, qu'il soit

$$-8b^3+7a^3+3b^3-9a^2b-5b^3+ab^2+4b^3.$$

On peut changer de place les quatre termes semblables $-8b^3$, $+3b^3$, $-5b^3$, $+4b^3$, et les rapprocher les uns des autres comme il suit :

$$3b^3+4b^3-8b^3-5b^3+7a^3-9a^2b+ab^2.$$

Alors remarquez que les termes positifs $3b^3+4b^3$ peuvent être remplacés par un seul $+7b^3$; qu'ensuite les termes négatifs $-8b^3$ $-5b^3$ peuvent aussi être remplacés par un seul $-13b^3$. Les quatre termes semblables seront déjà réduits à deux $+7b^3-13b^3$. Mais ces deux-ci se réduisent eux-mêmes à un seul $-6b^3$; par conséquent, en reportant $-6b^3$ à la dernière place, le polynome simplifié sera

$$7a^3-9a^2b+ab^2-6b^3.$$

En général, *plusieurs termes semblables pourront toujours se*

réduire à un seul; son coefficient sera la différence entre la somme des coefficients précédés du signe + et la somme des coefficients précédés du signe —; et son signe sera le même que celui des coefficients dont la somme est la plus grande.

Dans l'application de cette règle, il ne faut pas oublier que le premier terme, quand il n'a pas de signe, est censé avoir le signe +, et que les termes devant lesquels on n'écrit pas de coefficient sont censés avoir le coefficient 1.

30. *Remarque.* Quoique l'ordre des termes soit indifférent, on les dispose presque toujours de manière que les exposants d'une même lettre aillent en croissant ou bien en décroissant : cela s'appelle *ordonner*. Le dernier polynome est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de a; et il l'est aussi par rapport aux puissances croissantes de b.

Addition et soustraction des polynomes.

31. Si à $a - b$ on doit ajouter $c + d - e$, pour indiquer cette addition on enveloppe la seconde quantité entre des parenthèses, et on écrit

$$a - b + (c + d - e);$$

mais je vais montrer que les parenthèses peuvent se supprimer.

Concevons pour un moment qu'on ait effectué les opérations indiquées dans le second polynome $c + d - e$, et que le résultat soit une quantité positive $+P$. En ajoutant $+P$ avec $a - b$, il vient $a - b + P$. On peut changer la place des termes, et écrire $+P + a - b$. Mais ici l'addition de a et la soustraction de b ne doivent venir qu'après les opérations qui donnent $+P$; par conséquent on peut remettre, au lieu de $+P$, le polynome $c + d - e$, et alors on a $c + d - e + a - b$. Enfin on transportera aux dernières places les termes qui viennent de $+P$, et on aura

$$a - b + c + d - e.$$

Si le second polynome était égal à une quantité négative $-P$, le même raisonnement se ferait encore en mettant partout $-P$ au lieu de $+P$, et on arriverait encore au même résultat. Dans ce résultat, les termes des deux polynomes se trouvent écrits, avec leurs signes, les uns à la suite des autres; et il est évident que la même chose doit arriver, quels que soient les polynomes qu'on ajoute. De là on conclut cette règle :

Pour ajouter des polynomes, il suffit de les écrire les uns à la suite des autres, en conservant les signes de tous leurs termes.

Après avoir appliqué cette règle, il ne faut pas négliger de faire la réduction des termes semblables, s'il y en a. Pour faciliter cette réduction, on ordonne assez ordinairement les polynomes par rapport à une lettre, et on les écrit les uns sous les autres; alors on fait immédiatement la réduction. Voici un exemple :

$$\text{Polynomes à ajouter}\left\{\begin{array}{r} 8a^2 - \frac{3}{2}ab - 2b^2 - \frac{3}{4} \\ -\ a^2 + \frac{1}{4}ab + 7c^2 + 2 \\ ab + 2b^2 + 4c^2 + \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\text{Somme}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7a^2 - \frac{1}{4}ab + 11c^2 + \frac{7}{4}.$$

32. Passons à la soustraction. Pour indiquer qu'on doit soustraire $c+d-e$ de $a-b$, on écrit

$$a-b-(c+d-e);$$

et, pour arriver à une expression débarrassée des parenthèses, on raisonnera comme il suit :

D'après ce qui a été dit n° 24, la soustraction revient à une addition dans laquelle la quantité à soustraire est prise avec un signe contraire. Or, la valeur d'un polynome est égale à la différence qui existe entre la somme de ses termes positifs et celle de ses termes négatifs; et le signe de cette valeur est celui de la plus grande des deux sommes : donc cette valeur ne fera que changer de signe, si on change dans le polynome tous les $+$ en $-$, et tous les $-$ en $+$. Il suit de là que, pour soustraire un polynome d'une quantité quelconque, il suffit de changer les signes de tous ses termes, et de l'ajouter ensuite à cette quantité. Mais, dans l'addition, les polynomes qu'on ajoute se placent à la suite les uns des autres, en conservant les signes de leurs termes; donc,

Pour soustraire un polynome, il suffit de l'écrire, après avoir changé le signe de tous ses termes, à la suite de la quantité dont il doit être soustrait.

On peut encore démontrer cette règle en prouvant que, si on ajoute au résultat le polynome qui était à soustraire, on reproduit la quantité dont il devait être soustrait. En effet, pour faire cette addition, on écrira à la suite du résultat les termes de ce polynome avec leurs signes; mais ces termes se trouvant tous, dans le résultat, avec des signes contraires, il est clair qu'ils seront

détruits, et qu'après la réduction il ne restera plus que ceux qui composent la quantité sur laquelle la soustraction devait être faite.

Voici un exemple de soustraction :

Soustraire de.....	$9a^2 - 3ab + 2b^2 + \frac{1}{2}bc$
Le polynome......	$5a^2 + 4ab - 3b^2 - \frac{1}{4}bc$
Reste avant la réduction,	$9a^2 - 3ab + 2b^2 + \frac{1}{2}bc$ $-5a^2 - 4ab + 3b^2 + \frac{1}{4}bc,$
Après la réduction,	$4a^2 - 7ab + 5b^2 + \frac{3}{4}bc.$

Multiplication des monomes.

33. Pour indiquer des multiplications successives, on est convenu (8) d'écrire les facteurs à la suite les uns des autres, en les séparant par le signe $\times$, ou seulement par des points, ou même sans aucun signe quand il n'en résulte point d'ambiguïté. Par exemple, si on doit multiplier a^2b par c, et le produit par d^2, on écrira $a^2b \times c \times d^2$, ou $a^2b \,.\, c \,.\, d^2$, ou simplement a^2bcd^2.

S'il fallait multiplier a^2 par un nombre tel que 3 ou $\frac{5}{7}$, ce nombre deviendrait le cofficient de a^2, et on écrirait $3a^2$ ou $\frac{5}{7}a^2$.

Si on avait à indiquer la multiplication de a^2b par cd^2, on pourrait écrire indifféremment $a^2b \times cd^2$, ou $a^2b \,.\, cd^2$; mais on ne devrait pas supprimer le signe, car alors on aurait l'expression a^2bcd^2, dans laquelle on devrait voir que a^2b est multiplié par c, et que le produit a^2bc est lui-même multiplié par d^2 : or, ce n'est point là ce qu'on voulait indiquer. A la vérité, les deux expressions $a^2b \times cd^2$ et a^2bcd^2 sont équivalentes, mais il faut le prouver, et c'est ce qu'on fait en rappelant que, d'après un principe démontré en arithmétique, on peut multiplier une quantité par un produit de plusieurs facteurs en multipliant cette quantité successivement par chacun des facteurs (*).

34. Les règles des signes ayant été établies n° 25, on laissera ici les signes de côté. Soient d'abord deux quantités telles que a^2 et a^3. D'après la définition de l'exposant, a^2 et a^3 sont la même

(*) Soit m une quantité qu'on doit multiplier par le produit abc. Puisqu'un produit ne change pas, quel que soit l'ordre des facteurs, on aura $m \times abc = abcm = mabc$: c'est le principe dont il s'agit.

chose que aa et aaa; donc $a^2 \times a^3 = aa \times aaa$. Or, par le principe rappelé plus haut, on doit avoir $aa \times aaa = aaaaa$; donc

$$a^2 \times a^3 = a^5.$$

Si on prenait d'autres exposants, il est clair qu'il faudrait encore les ajouter pour avoir l'exposant du produit. Donc, en général, *quand on multiplie entre elles des puissances d'une même quantité, on doit donner à cette quantité un exposant égal à la somme de ceux des facteurs.*

Une lettre sans exposant doit être regardée comme ayant l'exposant 1 : car, par exemple, on aurait $a^3 \times a = a^4$.

35. A présent, considérons des monomes quelconques. Soit à effectuer le produit

$$3\,a^2b^4c \times 7\,a^3cd^2.$$

Les deux monomes peuvent être écrits ainsi, $3 \times a^2 \times b^4 \times c$ et $7 \times a^3 \times c \times d^2$; et, par le principe déjà cité, le produit est égal à

$$3 \times a^2 \times b^4 \times c \times 7 \times a^3 \times c \times d^2.$$

En changeant l'ordre des facteurs, il devient

$$3 \times 7 \times a^2 \times a^3 \times b^4 \times c \times c \times d^2.$$

Or, au lieu de 3×7 on peut mettre 21; au lieu des deux facteurs successifs a^2 et a^3, on peut mettre leur produit, qui, d'après la règle trouvée plus haut, est a^5; au lieu des deux facteurs égaux à c, on mettra leur produit c^2; et quant aux facteurs b^4 et d^2, on les laissera au produit sans aucune altération. Alors on aura

$$3\,a^2b^4c \times 7\,a^3cd^2 = 21\,a^5b^4c^2d^2.$$

On peut faire des raisonnements analogues sur tels monomes qu'on voudra; donc, abstraction faite du signe, *le produit de deux monomes s'obtient en multipliant les coefficients entre eux, en donnant à chaque lettre commune aux deux monomes un exposant égal à la somme de ceux dont elle est affectée dans ces monomes, et en prenant les autres lettres sans changer leurs exposants.*

En combinant cette règle avec celle des signes qui a été établie au n° **25**, on trouve sur-le-champ

$$-7\,a^4bd^2 \times 13\,a^3b^2c = -91\,a^7b^3cd^2,$$

$$-\tfrac{2}{3}ab^4c \times -\tfrac{8}{7}a^2c = +\tfrac{16}{21}a^3b^4c^2.$$

Multiplication des polynomes.

36. Si l'on a des polynomes tels que $a^2 - ab + 2$ et $2a - b$, et qu'on veuille indiquer leur produit, on devra employer des parenthèses ou des crochets, et écrire

$$(a^2 - ab + 2)(2a - b) \quad \text{ou} \quad [a^2 - ab + 2][2a - b].$$

Quelquefois aussi, mais rarement, on emploie des barres comme ci-dessous :

$$\overline{a^2 - ab + 2} \times \overline{2a - b}.$$

37. Pour effectuer de pareilles multiplications, je raisonnerai d'abord comme si les soustractions qui sont indiquées dans les polynomes ne devaient jamais amener de quantités négatives ; et je prouverai ensuite que la règle, à laquelle on arrive dans cette hypothèse, s'étend à tous les cas.

Supposons, en premier lieu, qu'un seul facteur soit complexe, comme dans l'expression

$$(a + b - c) \times m.$$

Si on avait simplement à multiplier a par m, le produit serait am. Quand c'est $a + b$ qu'on doit multiplier par m, il est évident qu'on aura le produit en prenant séparément m fois la quantité a, m fois la quantité b, et en ajoutant les deux produits : or ces produits partiels sont exprimés par am et bm ; donc $(a + b) \times m = am + bm$. Mais quand c'est $a + b - c$ qui est le multiplicande, la quantité $a + b$ étant diminuée de c, il s'ensuit qu'en multipliant $a + b$ par m, on doit avoir un produit trop grand de m fois c ; donc, de ce produit, qui est $am + bm$, il faut retrancher celui de c par m qui est cm ; donc enfin,

$$(a + b - c) \times m = am + bm - cm.$$

En quelque nombre que soient les termes du polynome, on voit que dans le produit chacun d'eux se trouve multiplié par m, et conservera le signe qu'il avait dans le polynome.

Supposons le multiplicande et le multiplicateur tous deux complexes. Par exemple, soit

$$(a + b - c) \times (m - n + p).$$

Imaginons qu'on ait effectué les opérations indiquées dans le poly-

nome $a+b-c$, et qu'il ait pour valeur T. Le produit à effectuer deviendra $T\times(m-n+p)$. Alors, l'un des facteurs étant monome, on aura, par ce qui vient d'être dit,

$$\begin{aligned}(a+b-c)\times(m-n+p) &= T\times(m-n+p)\\ &= Tm-Tn+Tp.\end{aligned}$$

Puisque T représente la valeur du polynome $a+b-c$, Tm est égal au produit de $a+b-c$ par m; et, d'après ce qui précède, ce produit est $am+bm-cm$.

De même Tn est égal au produit de $a+b-c$ par n, lequel est $an+bn-cn$.

Et pareillement, Tp est égal au produit de $a+b-c$ par p, ou à $ap+bp-cp$.

Or, de Tm on doit retrancher Tn, ensuite on doit ajouter Tp; donc il faudra, à la suite des termes du premier produit, écrire tous ceux du second avec des signes contraires (32), et tous ceux du troisième avec leurs signes (31). En conséquence, on aura

$$\begin{aligned}(a+b-c)\times(m-n+p) = &+am+bm-cm\\ &-an-bn+cn\\ &+ap+bp-cp.\end{aligned}$$

De là on tire cette règle : ***Pour effectuer la multiplication des polynomes, on multiplie successivement tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en ayant soin de conserver tous les signes du multiplicande quand le terme du multiplicateur a le signe +, et de les changer tous quand ce terme a le signe —.***

Si, dans les deux polynomes, on regarde tous les termes, pris avec leurs signes, comme des monomes isolés, si alors on multiplie successivement les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, et si ensuite on ajoute tous les produits, il est évident qu'on aura le même résultat que par la règle précédente.

38. Maintenant il faut démontrer que cette règle convient à tous les cas; mais auparavant je ferai deux remarques.

La première, c'est que de quelque manière qu'on intervertisse l'ordre des termes dans deux polynomes, le résultat qu'on trouve en leur appliquant cette règle ne changera pas de valeur. En effet, d'après cette règle même, il est évident qu'il contiendra toujours

les mêmes termes : seulement ils y seront dans un ordre différent, ce qui n'altère en rien sa valeur.

La seconde remarque, c'est qu'en changeant tous les signes de l'un des polynomes, les termes du résultat changeront de signes, et par suite la valeur représentée par ce résultat en changera également. A quoi j'ajouterai que, si on changeait aussi les signes de l'autre polynome, les termes du résultat ne seraient point altérés; car, après le premier changement, ils devraient en subir un second qui rétablirait le résultat tel qu'il était d'abord.

Cela posé, je nommerai V l'ensemble des termes qu'on obtient en appliquant la règle à deux polynomes quelconques, et je vais prouver que le produit de ces polynomes est toujours égal à V. D'abord, supposons que ces polynomes aient des valeurs positives, mais qu'en effectuant les additions et les soustractions qui y sont indiquées, on doive passer par des quantités négatives avant d'arriver à la dernière opération. Comme on peut changer l'ordre des termes d'un polynome sans changer sa valeur, j'écrirai dans chaque facteur tous les termes positifs aux premiers rangs, et à leur suite tous les termes négatifs : alors la difficulté dont il s'agit disparaîtra, et la règle fera trouver le produit cherché. Or, d'après notre première remarque, ce produit est égal à V.

Quand l'un des deux polynomes a une valeur négative, c'est que la somme de ses termes négatifs l'emporte sur celle de ses termes positifs. En changeant les signes de tous ses termes, la valeur de ce polynome deviendra positive, sans autre altération; alors on pourra appliquer la règle, et, d'après la seconde remarque, on aura un produit de signe contraire à V. Mais, puisqu'on a pris positivement un facteur qui devait être négatif, ce produit doit être de signe contraire au produit cherché (25); donc V est le produit cherché.

Enfin, quand les deux polynomes ont des valeurs négatives, on changera les signes de tous leurs termes, ce qui donnera deux polynomes dont les valeurs seront positives, et dont on pourra trouver le produit par la règle du numéro précédent. D'après la seconde remarque, ce produit aura les mêmes termes que V; mais les valeurs des deux facteurs ayant changé de signe, leur produit n'a pas dû en changer; donc le produit cherché est encore égal à V.

39. Pour plus de facilité, il sera bien d'ordonner les poly-

nomes. Un exemple va montrer comment on dispose l'opération.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Multiplicande....} & 3a^3 & -\ 5a^2b & -\ \frac{1}{2}ab^2 & \\
\text{Multiplicateur....} & -\ 2a^2 & -\ 3ab & +\ b^2 & \\
\hline
\text{Produits partiels.}\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right. & -\ 6a^5 & +\ 10a^4b & +\ a^3b^2 & \\
 & & -\ 9a^4b & +\ 15a^3b^2 & +\ \frac{3}{2}a^2b^3 \\
 & & & +\ 3a^3b^2 & -\ 5a^2b^3 \quad -\ \frac{1}{2}ab^4 \\
\hline
\text{Produit.........} & -\ 6a^5 & +\ a^4b & +\ 19a^3b^2 & -\ \frac{7}{2}a^2b^3 \quad -\ \frac{1}{2}ab^4.
\end{array}
$$

La première ligne des produits partiels a été trouvée en multipliant tous les termes du multiplicande par le premier terme $-2a^2$ du multiplicateur. Les signes du multiplicande ont été changés, parce que ce terme a le signe $-$.

La seconde ligne des produits partiels a été trouvée en multipliant les termes du multiplicande par le second terme $-3ab$ du multiplicateur; et on a dû changer encore tous les signes du multiplicande.

La troisième ligne des produits partiels renferme les produits de tous les termes du multiplicande par le troisième terme $+b^2$ du multiplicateur; et comme ce terme a le signe $+$, on a conservé les signes du multiplicande.

Enfin, en opérant les réductions entre tous ces produits, on remplace $+10a^4b - 9a^4b$ par $+a^4b$, $+a^3b^2 + 15a^3b^2 + 3a^3b^2$ par $+19a^3b^2$, $+\frac{3}{2}a^2b^3 - 5a^2b^3$ par $-\frac{7}{2}a^2b^3$. Alors on a le produit cherché, tel qu'il est écrit plus haut.

40. Quand on veut ordonner des polynomes par rapport à une lettre, il peut arriver qu'il y ait plusieurs termes où cette lettre soit affectée du même exposant. Dans ce cas on ordonnera ces termes entre eux par rapport à une autre lettre, comme on le voit dans le polynome $ax^2 - x^2 + a^2x - ax - a$. Il contient deux termes en x^2 qu'on a ordonnés entre eux par rapport à a, et aussi deux termes en x qu'on a ordonnés de la même manière.

Mais le plus souvent on réunira les termes qui contiennent une même puissance de x en un produit dont cette puissance sera un facteur. Ainsi, on remarquera que le produit $(a-1)x^2 = ax^2 - x^2$, que $(a^2 - a)x = a^2x - ax$; et en conséquence le polynome ci-dessus s'écrira sous cette forme : $(a-1)x^2 + (a^2-a)x - a$.

Pour offrir l'exemple d'une multiplication dans laquelle on em-

ploie cette seconde manière d'ordonner, je prendrai le suivant :

$$
\begin{array}{l}
(a-1)x^2+(a^2-a)x-a \\
(a+1)x^2-a^2x \\
\hline
(a^2-1)x^4+(a^3-a)x^3-(a^2+a)x^2 \\
\qquad\qquad -(a^3-a^2)x^3-(a^4-a^3)x^2+a^3x \\
\hline
(a^2-1)x^4+(a^2-a)x^3-(a^4-a^3+a^2+a)x^2+a^3x.
\end{array}
$$

On considère dans chaque polynome tous les termes qui contiennent une même puissance de x comme n'en formant qu'un seul, et on suit la règle générale du n° 37. Mais alors, parmi les opérations partielles, il y a des multiplications de polynomes. Ainsi, pour multiplier le multiplicande par $(a+1)x^2$, qui est la première partie du multiplicateur, on aura à multiplier $a-1$, a^2-a et $-a$ par $a+1$. On trouve que ces produits sont a^2-1, a^3-a, $-(a^2+a)$; et ce sont eux qui, dans la première ligne des produits partiels, sont placés devant les puissances x^4, x^3, x^2. On forme de même la seconde ligne. Les commençants doivent surtout avoir grand soin de ne point commettre d'erreurs dans les signes.

41. Au moyen de la multiplication, on démontre plusieurs propositions d'un usage fréquent. Effectuons les multiplications ci-après :

$$
\begin{array}{l}
a+b \\
a+b \\
\hline
a^2+ab \\
\quad +ab+b^2 \\
\hline
a^2+2ab+b^2,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a-b \\
a-b \\
\hline
a^2-ab \\
\quad -ab+b^2 \\
\hline
a^2-2ab+b^2,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a+b \\
a-b \\
\hline
a^2+ab \\
\quad -ab-b^2 \\
\hline
a^2-b^2.
\end{array}
$$

Le premier produit est le carré de $a+b$; et comme les lettres a et b peuvent représenter telles quantités qu'on voudra, on conclut que *le carré de la somme de deux quantités contient le carré de la première, plus deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

Semblablement, la deuxième multiplication prouve que *le carré de la différence de deux quantités est égal au carré de la première moins deux fois le produit des deux quantités, plus le carré de la seconde.*

Enfin, la troisième multiplication démontre que *le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence des carrés de ces deux quantités.*

Si on multipliait par $a+b$ le carré de $a+b$, on trouverait com-

ment se compose le cube de la somme de deux quantités. En multipliant le cube par $a+b$, on reconnaîtrait de quelles parties se compose la 4e puissance, et ainsi de suite.

42. Ces propositions peuvent souvent abréger les calculs. Supposons qu'on ait à effectuer le produit

$$(3a^3b+2a^2b^2+ab^3-b^4)(3a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4).$$

Le premier facteur est la somme des deux quantités

$$3a^3b+2a^2b^2 \quad \text{et} \quad ab^3-b^4,$$

tandis que le second facteur en est la différence; donc, en vertu de la troisième règle du numéro précédent, le produit demandé est égal à la différence des carrés de ces deux quantités. Or, l'un de ces carrés étant celui d'une somme, et l'autre celui d'une différence, on peut les former par les deux premières règles. De cette manière, on trouve sur-le-champ le produit cherché

$$9a^6b^2+12a^5b^3+4a^4b^4-a^2b^6+2ab^7-b^8.$$

Division des monomes.

43. Les règles des signes étant connues (**26**), je supposerai que les monomes soient positifs, et je proposerai, par exemple, d'effectuer la division indiquée dans l'expression

$$\frac{48a^7b^3c^2}{6a^4b^3}.$$

Le quotient doit être tel qu'en le multipliant par le diviseur $6a^4b^3$ on reproduise le dividende $48a^7b^3c^2$. Or, un polynome multiplié par un monome ne pourrait pas donner un monome : c'est pourquoi l'on doit considérer le quotient comme monome, et pour le découvrir, on fera le raisonnement qui suit.

D'après les règles de la multiplication (**35**), le coefficient 48 du dividende doit être le produit des coefficients du diviseur et du quotient; donc en divisant 48 par 6 on aura le coefficient du quotient : ce coefficient est 8.

D'après les mêmes règles, l'exposant 7, dans le dividende, doit être la somme des exposants de la lettre a dans le diviseur et dans le quotient; donc la différence $7-4$ ou 3 est l'exposant que la lettre a doit avoir dans le quotient.

Enfin, ces règles prouvent aussi que les lettres qui ne sont pas communes au diviseur et au quotient doivent se trouver dans le dividende, sans aucun changement dans leurs exposants : donc la lettre b, qui a le même exposant dans le dividende que dans le diviseur, ne doit point appartenir au quotient; et, au contraire, la lettre c, qui n'est point dans le diviseur, doit se trouver dans le quotient avec le même exposant que dans le dividende.

Maintenant le quotient est connu, et l'on a

$$\frac{48a^7b^3c^2}{6a^4b^3} = 8a^3c^2.$$

Des raisonnements précédents on conclut cette règle : *Pour effectuer la division des monomes, on divise le coefficient du dividende par celui du diviseur, et l'on a le coefficient du quotient; lorsqu'une lettre est commune aux deux monomes, et qu'elle a un exposant plus élevé dans le dividende que dans le diviseur, on l'écrit au quotient avec un exposant égal à la différence de ces deux exposants; lorsqu'une lettre a le même exposant dans le dividende et dans le diviseur, on ne l'écrit pas au quotient; et enfin, lorsqu'une lettre du dividende n'est pas dans le diviseur, on l'écrit au quotient sans changer son exposant.*

En joignant à cette règle celle des signes (**26**), on trouve

$$\frac{8a^7}{4a^2} = 2a^5, \qquad \frac{35a^7x^5}{-7a^3x^2} = -5a^4x^3, \qquad \frac{-8ab^3x^6}{-12abx} = \tfrac{2}{3}b^2x^5.$$

Division des polynomes.

44. Si l'on a un polynome à diviser par un monome, on remarque d'abord que le quotient doit être polynome; et comme on multiplie un polynome par un monome, en multipliant tous ses termes, pris avec leurs signes, par ce monome, on conclut réciproquement qu'*on divise un polynome par un monome en divisant séparément par ce monome tous les termes du dividende.*

C'est ainsi qu'on trouve

$$\frac{8a^4b - 2a^3b^2 + 4a^2b^3}{-4a^2b} = -2a^2 + \tfrac{1}{2}ab - b^2.$$

45. Je passe au cas où le dividende et le diviseur sont deux polynomes. La question est celle-ci : Un polynome donné, que je nommerai A, est le produit d'un autre polynome donné B, par un

polynome inconnu C, et il s'agit de trouver C. Ici le polynome A est le dividende, B est le diviseur, et C est le quotient.

D'après les règles de la multiplication, si on connaissait le quotient C, il faudrait, pour reproduire A, multiplier les termes de B successivement par chaque terme de C (en observant la règle des signes), et ajouter entre eux tous ces produits partiels. Cela étant, si, dans le dividende A, on pouvait retrouver, tels qu'ils étaient avant les réductions, les produits partiels d'un certain terme de B par les différents termes de C, il est évident qu'en divisant ces produits partiels par le terme de B avec lequel ils sont formés, on connaîtrait facilement tous les termes de C. Au premier coup d'œil, cette remarque ne semble pas devoir être d'une grande utilité, à cause des réductions qui ont pu être opérées entre les termes semblables.

Cependant, en y réfléchissant davantage, et surtout en faisant attention que l'exposant d'une lettre, dans chaque produit partiel, est la somme des exposants qu'elle a dans les deux termes dont ce produit partiel est composé (34), on aperçoit que, si on considère en particulier le terme de B dans lequel une lettre a l'exposant le plus élevé, et le terme de C dans lequel cette lettre a aussi l'exposant le plus élevé, le produit partiel formé par la multiplication de ces deux termes doit lui-même contenir cette lettre avec un plus haut exposant que tous les autres produits partiels : donc ce produit partiel doit se retrouver dans les termes de A sans aucune altération Ainsi, en prenant le terme du dividende où une lettre a le plus haut exposant, et en le divisant par le terme du diviseur où cette lettre a le plus haut exposant, on sera sûr d'avoir un terme du quotient. On peut remarquer que ce terme est aussi celui qui, dans le quotient, doit renfermer cette même lettre au plus haut exposant.

Comme le dividende A provient de l'addition des termes qu'on obtient en multipliant tous les termes de B par chaque terme de C, il s'ensuit qu'en multipliant le diviseur par le terme qui vient d'être trouvé au quotient, et en retranchant ce produit du dividende, le reste sera égal au produit du diviseur par les autres termes du quotient, qui sont encore inconnus.

On peut raisonner sur ce reste, après y avoir fait les réductions qu'amène la soustraction, comme sur le dividende A. Par conséquent, on conclura que si on divise le terme qui, dans ce nouveau

dividende, contient une lettre au plus haut exposant par le terme qui, au diviseur, contient aussi cette lettre au plus haut exposant, on connaîtra un second terme du quotient.

On fera le produit du diviseur par ce terme, et on le retranchera du dernier dividende. On obtiendra ainsi un second reste, qui lui-même devra être considéré comme un nouveau dividende partiel, et sur lequel on pourra encore répéter les mêmes raisonnements, ce qui fera connaître un troisième terme du quotient.

En continuant de la même manière, il est clair qu'on doit trouver tous les termes du quotient, et on sera averti qu'il n'y en a plus à connaître, quand on sera parvenu à un reste zéro.

Les raisonnements précédents subsisteraient encore si, au lieu des termes où une lettre a les plus hauts exposants, on considérait ceux où elle est affectée des moindres exposants. Par conséquent, dans les divisions partielles on peut se servir de ces derniers aussi bien que des premiers.

On facilitera beaucoup les calculs en ordonnant les polynomes de manière que les exposants d'une même lettre aillent en croissant ou en décroissant. De cette manière, les termes du dividende et du diviseur, qui doivent être divisés l'un par l'autre, se trouveront les premiers sur la gauche; et la même chose arrive encore dans les autres divisions partielles, si on a soin de laisser toujours les restes ou dividendes partiels ordonnés comme le dividende primitif. La disposition des calculs est d'ailleurs la même qu'en arithmétique.

S'il restait quelques nuages dans l'esprit du lecteur, l'exemple suivant achèvera de les dissiper.

	Dividende.	Diviseur.
	$14a^5 - 27a^4b + 21a^3b^2 - 3a^2b^3 - 2ab^4$	$2a^2 - 3ab + 2b^2$
	$-14a^5 + 21a^4b - 14a^3b^2$	Quotient.
1er reste.......	$-6a^4b + 7a^3b^2 - 3a^2b^3 - 2ab^4$	$7a^3 - 3a^2b - ab^2$
	$+6a^4b - 9a^3b^2 + 6a^2b^3$	
2e reste......	$-2a^3b^2 + 3a^2b^3 - 2ab^4$	
	$+2a^3b^2 - 3a^2b^3 + 2ab^4$	
3e reste......	0 0 0	

Après avoir ordonné les polynomes par rapport aux exposants décroissants de a, et en supposant que le quotient soit aussi ordonné de la même manière, on est certain que le 1er terme $14a^5$ du dividende est le produit du 1er terme $2a^2$ du diviseur par le 1er terme du quotient; de sorte qu'en divisant $14a^5$ par $2a^2$ on

connaîtra le 1er terme du quotient. Ce terme doit être positif, comme résultant de la division de deux termes positifs (26) : il est égal à $7a^3$.

Alors on multiplie le diviseur par $7a^3$, et on soustrait le produit du dividende. A cet effet, on écrit les termes de ce produit, en changeant leurs signes, au-dessous du dividende, puis on fait les réductions. On obtient ainsi le 1er reste.

Dans ce reste, le 1er terme est $-6a^4b$, et en le divisant par $2a^2$ on obtient $-3a^2b$ pour le 2e terme du quotient. On multiplie encore le diviseur par ce terme, on pose encore les produits partiels, en changeant leurs signes, au-dessous du 1er reste, et après la réduction on a le 2e reste.

Enfin, le 1er terme de ce reste est $-2a^3b^2$, et en le divisant par $2a^2$, on trouve que le 3e terme du quotient est $-ab^2$. On forme le 3e reste de la même manière que les précédents; mais ici ce reste étant zéro, on en conclut que l'opération est terminée, et que le quotient cherché est $7a^3-3a^2b-ab^2$.

Continuation. — Division dans les cas les plus compliqués.

46. Quand on ordonne, par rapport à une lettre, les polynomes qu'on veut diviser, il peut arriver que plusieurs termes contiennent cette lettre au même degré. Alors on doit avoir soin d'ordonner ces termes entre eux par rapport à une autre lettre. Par exemple, s'il s'agit des termes $abx^2+a^2x^2-b^3x^2$ qui contiennent tous trois x^2, on les ordonnera par rapport à a, et on les disposera horizontalement de l'une de ces deux manières,

$$a^2x^2+abx^2-b^2x^2,\qquad (a^2+ab-b^2)x^2,$$

ou bien verticalement de l'une de ces deux-ci,

$$\begin{array}{r} a^2x^2\\ +abx^2\\ -b^2x^2\end{array}\qquad\qquad \left.\begin{array}{r} a^2\\ +ab\\ -b^2\end{array}\right| x^2.$$

Quelle que soit celle qu'on adopte, on y reconnaît avec la même facilité que a^2x^2 est le 1er terme, que $+abx^2$ est le 2e, et que $-b^2x^2$ est le 3e.

Alors on pourra suivre tout à fait, pour la division, la marche qui a été tracée dans l'article précédent; car il est bien clair que

dans chaque division partielle le 1[er] terme du dividende devra toujours être le produit du 1[er] terme du diviseur par le 1[er] de ceux qui sont à trouver au quotient. On obtiendra ainsi tous les termes du quotient, ordonnés entre eux de la même manière que le dividende et le diviseur.

47. On peut encore se représenter dans la pensée tous les termes de chaque polynome, qui contiennent une même puissance de la lettre par laquelle on a ordonné d'abord, comme ne formant qu'un seul terme; et alors les divisions partielles pourront être elles-mêmes des divisions complexes qu'il faudra effectuer à part.

Pour nous convaincre de l'exactitude de ce procédé, prenons deux polynomes ordonnés par rapport à x, tels que

$$\mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x + \mathrm{D}, \quad \mathrm{M}x^2 + \mathrm{N}x + \mathrm{P}.$$

Et supposons que les lettres A, B,... P, représentent des quantités complexes qui ne contiennent point x. Il est clair que, dans le produit des deux polynomes, la partie qui contient x au plus haut degré est égale à $\mathrm{A}x^3 \times \mathrm{M}x^2$; donc réciproquement, en divisant cette partie par $\mathrm{A}x^3$ on retrouvera la partie $\mathrm{M}x^2$, qui contient les termes de l'autre facteur dans lesquels x a le plus haut exposant. On voit que le raisonnement est exactement le même que si les diverses puissances de x n'étaient multipliées que par des monomes. L'exemple suivant lèvera toutes les difficultés.

N. B. Les termes affectés de la même puissance de x sont ordonnés en colonne ; et, pour abréger, on n'écrit pas les termes qui doivent détruire la première colonne de chaque dividende partiel. Par la même raison, on sous-entend dans chaque reste les colonnes du dividende qui devraient s'y placer sans altération.

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
a^4 & x^4 + a^5 & x^3 - a^5b & x^2 + a^4b^3 & x - a^2b^6 \\
-a^3b & -a^4b & -2a^4b^2 & +2a^3b^4 & \\
+a^2b^2 & +a^3b^2 & -ab^5 & & \\
-ab^3 & +a^2b^3 & & & \\
 & -a^5 & x^3 + a^4b^2 & x^2 & \\
 & -a^3b^2 & +a^2b^4 & & \\
\hline
 & -a^4b & x^3 - a^5b & x^2 + \ldots\ldots & \\
 & +a^2b^3 & -a^4b^2 & & \\
 & & +a^2b^4 & & \\
 & & -ab^5 & & \\
 & & +a^5b & x^2 - a^4b^3 & x \\
 & & +a^4b^2 & -a^3b^4 & \\
\hline
 & & +a^2b^4 & x^2 + a^3b^4x \ldots\ldots & \\
 & & -ab^5 & & \\
 & & & -a^3b^4x + a^2b^6 & \\
\hline
 & & & 0 \qquad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l|l}
a^2 & x^2 + a^3x - a^2b^2 & \\
-ab & & \\
\hline
a^2 & x^2 - a^2b & x + b^4 \\
+b^2 & -ab^2 &
\end{array}$$

1re division partielle . .
$$\left\{\begin{array}{l|l} a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 & a^2 - ab \\ \underline{- a^4 + a^3b \qquad\qquad\qquad} & \overline{a^2 + b^2} \\ \qquad + a^2b^2 - ab^3 & \\ \qquad \underline{- a^2b^2 + ab^3} & \\ \qquad\quad 0 \qquad 0 & \end{array}\right.$$

2e division partielle. . .
$$\left\{\begin{array}{l|l} - a^4b + a^2b^3 & a^2 - ab \\ \underline{+ a^4b - a^3b^2} & \overline{- a^2b - ab^2} \\ - a^3b^2 + a^2b^3 & \\ \underline{+ a^3b^2 - a^2b^3} & \\ \quad 0 \qquad 0 & \end{array}\right.$$

3e division partielle...
$$\left\{\begin{array}{l|l} + a^2b^4 - ab^5 & a^2 - ab \\ \underline{- a^2b^4 + ab^5} & \overline{+ b^4} \\ \quad 0 \qquad 0 & \end{array}\right.$$

48. Comme dernier cas de la division, je mentionnerai celui où le diviseur ne contient point une lettre x, par rapport à laquelle on a ordonné le dividende. Soient $Ax^2 + Bx + C$ ce dividende, et M le diviseur qui ne contient point x. Pour que le quotient multiplié par M reproduise le dividende, il faudra que ce quotient contienne les mêmes puissances de x que le dividende, et qu'en multipliant par M les parties de ce quotient qui renferment ces puissances, on retrouve $Ax^2 + Bx + C$. Donc, pour faire la division proposée, on doit diviser séparément par le diviseur les parties du dividende affectées des diverses puissances de x.

49. Quelquefois on peut décomposer le dividende en facteurs de manière que le diviseur y soit en évidence; il suffit alors de le supprimer pour avoir le quotient. Par exemple, soit à diviser

$$x^4 - 4ax^3 + 4a^2x^2 - 4b^2x^2 \quad \text{par} \quad x^2 - 2ax + 2bx.$$

On observera que les trois premiers termes du dividende sont le carré de $x^2 - 2ax$ (**41**), et que de ce carré on retranche $4b^2x^2$ qui est le carré de $2bx$. Le dividende est donc la différence des carrés de $x^2 - 2ax$ et de $2bx$: donc il est égal au produit de la somme de ces deux quantités, multipliée par leur différence (**41**); et, en se bornant à indiquer la multiplication, il peut s'écrire ainsi : $(x^2 - 2ax + 2bx)(x^2 - 2ax - 2bx)$. Or, le premier facteur est le diviseur proposé; donc l'autre facteur est le quotient. L'habitude du calcul peut seule suggérer de pareilles décompositions.

Continuation. — A quels symptômes on reconnaît la possibilité ou l'impossibilité de la division.

50. Dans le n° **45**, pour découvrir le procédé de la division, on a supposé que le dividende était un produit du diviseur par un

polynome inconnu. Je vais montrer qu'on peut reconnaître, par ce procédé même, si cette condition a lieu ou non : c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'on apprendra si la division est possible ou si elle ne l'est pas.

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait ordonné par rapport aux puissances descendantes de la lettre x. Il est clair que dans le 1er terme de chaque reste, l'exposant de x est moindre que dans le 1er terme du reste précédent ; par conséquent on doit nécessairement arriver à un reste nul, ou à un reste dont le 1er terme contienne x à un exposant moindre que le 1er terme du diviseur.

Dans le premier cas, la division est possible. En effet, c'est en retranchant du dividende les produits du diviseur par les différents termes de la quantité placée au quotient qu'on est arrivé au reste zéro : or, c'est la somme de ces produits partiels qui compose le produit du diviseur par la quantité écrite au quotient ; donc le dividende est égal à ce produit.

Dans le second cas, il est évident que le 1er terme du reste ne pourra pas se diviser par le 1er terme du diviseur. Or, quand on suppose que le dividende est un produit du diviseur, on a vu dans les raisonnements du n° 45 que cette division doit donner un terme du quotient ; donc, puisque cette division est impossible, celle des polynomes proposés l'est également. Ainsi, la division ci-dessous est impossible, et la raison en est que le 1er terme du reste $3x - 1$ ne peut plus se diviser par le 1er terme x^2 du diviseur.

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 + x^2 - 9x + 8 & x^2 + 2x - 3 \\
\cline{2-2}
-2x^3 - 4x^2 + 6x & 2x - 3 \\
\hline
-3x^2 - 3x + 8 & \\
+3x^2 + 6x - 9 & \\
\hline
+3x - 1 &
\end{array}$$

Quelquefois l'impossibilité de la division se manifestera sans pousser l'opération aussi loin, attendu qu'il peut y avoir dans le 1er terme du diviseur différentes lettres qui empêchent les divisions partielles. Il convient même, avant de commencer l'opération, de porter son attention sur chacune des lettres communes aux deux polynomes proposés ; et si, pour l'une d'elles, il arrive que les termes qui, dans le dividende et le diviseur, la contiennent respectivement au plus haut exposant ou bien au plus faible, ne

soient pas divisibles l'un par l'autre, on sera certain que la division proposée est impossible. Cette observation doit s'appliquer aussi aux divisions partielles auxquelles le calcul peut conduire.

Dans le dernier exemple, on peut, si on veut, compléter le quotient en lui ajoutant une expression fractionnaire dans laquelle sera indiquée la division du dernier reste par le diviseur, et alors on aura

$$\frac{2x^3+x^2-9x+8}{x^2+2x-3}=2x-3+\frac{3x-1}{x^2+2x-3}.$$

Le second membre de cette égalité est souvent employé à la place du premier; et ce qu'on doit remarquer dans cette transformation, c'est que le numérateur de la partie fractionnaire ne contient plus x à un aussi haut degré que le dénominatenr. En cela, elle a quelque analogie avec l'extraction des entiers en arithmétique.

51. Il y a, pour reconnaître l'impossibilité de la division, un autre symptôme, qui se fonde sur ce que le terme du dividende dans lequel une lettre a le moindre exposant doit provenir, sans réduction, de la multiplication des termes du diviseur et du quotient dans lesquels cette lettre a le moindre exposant. De là il suit qu'après avoir ordonné par rapport aux exposants décroissants d'une lettre, si on divise le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur, on doit obtenir le dernier du quotient, c'est-à-dire celui où cette lettre a le plus faible exposant. Par conséquent, lorsque les opérations successives conduisent à placer au quotient cette lettre avec un exposant plus faible, on sera certain que la division est impossible : car les opérations subséquentes ne donneront que des exposants moindres.

Dans l'exemple suivant, si la division était possible, le dernier terme du quotient devrait être $+x^4$: or le calcul conduit à mettre au quotient le terme $-x^4$, sans que la division se termine; on est donc assuré qu'elle ne doit pas se terminer, et dès lors il est inutile de la continuer, à moins qu'on ne veuille effectuer la transformation dont j'ai parlé à la fin du n° précédent.

$x^9+x^7-ax^5+ax^4$	x^4+x^3+a
$-x^9-x^8-ax^5$	x^5-x^4
$-x^8+x^7-2ax^5+ax^4$	
$+x^8+x^7+ax^4$	
$+2x^7-2ax^5+2ax^4$	

32. Quand on ordonne par rapport aux puissances ascendantes d'une lettre, l'impossibilité de la division se manifeste d'une manière analogue. Alors le dernier terme du dividende divisé par le dernier terme du diviseur, doit donner le terme du quotient où cette lettre a le plus haut exposant; donc, si le calcul amène au quotient cette lettre avec un exposant plus fort, la division sera impossible.

33. Je citerai ici deux exemples de division qui conduisent à des résultats remarquables, dont nous ferons usage plus tard.

Le premier exemple sera la division de $x^m - a^m$ par $x - a$. Si on divise les binomes $x^2 - a^2$, $x^3 - a^3$, $x^4 - a^4$, par $x - a$, on trouve

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a,$$

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2,$$

$$\frac{x^4 - a^4}{x - a} = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3.$$

On aperçoit une loi fort simple dans ces quotients : 1° tous les termes sont additifs; 2° le premier terme et le dernier sont formés en ôtant une unité aux exposants de x et de a dans le dividende; 3° dans l'intervalle, les exposants de x vont en diminuant d'une unité, et ceux de a en augmentant d'une unité, de telle sorte que la somme des exposants de x et de a, dans chaque terme, est constamment la même.

En suivant cette loi, si on désigne par m un nombre entier positif quelconque, on devrait conclure

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \dots + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

Les points indiquent ici une lacune qui doit être remplie par des termes qu'on sous-entend, et qui sont soumis à la même loi que les précédents. Ce quotient n'est établi que sur une simple analogie : à la vérité, on pourrait y parvenir en divisant immédiatement $x^m - a^m$ par $x - a$, et en faisant attention à la manière dont chaque terme du quotient se trouve formé; mais il sera plus simple de le vérifier en le multipliant par le diviseur $x - a$. Il vient alors

$$\begin{array}{l} x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} \dots + a^{m-2}x^2 + a^{m-1}x \\ \quad - ax^{m-1} - a^2x^{m-2} \dots\dots\dots\dots - a^{m-1}x - a^m. \end{array}$$

Or, il est évident que dans la première ligne chaque terme, à partir du second, doit avoir au-dessous de lui un terme égal et de signe contraire par lequel il est détruit, de sorte qu'après la réduction on retrouve le dividende $x^m - a^m$.

Le deuxième exemple que je vais proposer sera la division du polynome $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + tx + u$ par $x - a$.

$$\begin{array}{l|l}
x^m + p\,x^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + tx + u & x - a \\ \hline
\quad \left.\begin{array}{r} +a \\ +p \end{array}\right| x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots & x^{m-1} \left.\begin{array}{r} +a \\ +p \end{array}\right| x^{m-2} \left.\begin{array}{r} +a^2 \\ +pa \\ +q \end{array}\right| x^{m-3} \ldots \begin{array}{l} +a^{m-1} \\ +pa^{m-2} \\ +qa^{m-3} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ +t \end{array} \\
\qquad\qquad \left.\begin{array}{r} +a^2 \\ +pa \\ +q \end{array}\right| x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots & \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

En divisant x^m par x, on a x^{m-1} pour le premier terme du quotient.

Dans le premier reste, la partie en x^{m-1} est $(a + p)x^{m-1}$: on la divise par x, et on obtient $(a + p)x^{m-2}$ au quotient.

Dans le reste suivant, la partie en x^{m-2} est $(a^2 + pa + q)x^{m-2}$: on la divise par x, et on trouve $(a^2 + pa + q)x^{m-3}$.

En continuant de la même manière, et en considérant toujours comme un seul terme tous ceux qui renferment la même puissance de x, on aperçoit clairement que chaque terme du quotient se forme du précédent en le multipliant par a, en ajoutant au produit le terme qui a la même puissance de x dans le dividende, et en divisant ensuite par x.

Il suit de là que, dans le quotient, la partie indépendante de x sera $a^{m-1} + pa^{m-2} + qa^{m-3} \ldots + t$. Si on multiplie le diviseur par cette quantité, la partie en x détruira celle qui doit se trouver dans le dernier dividende partiel, et alors il viendra, pour reste,

$$a^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} \ldots + ta + u.$$

La division s'arrête ici, et l'on doit remarquer que ce reste n'est autre que le dividende dans lequel on remplacerait x par a.

Lorsque ce reste est nul, la division se fait exactement. Ainsi, on peut déjà regarder comme démontrée la proposition suivante, dont l'importance sera reconnue plus tard : *Si* a *est une quantité qui, mise à la place de* x, *rende le polynome* $x^m + px^{m-1} + \text{etc.}$, *égal à zéro, ce polynome sera divisible par* $x - a$.

Fractions algébriques.

54. On donne le nom de *fractions algébriques* à des expressions telles que $\frac{3a}{2b}$, $\frac{a^2 - b^2}{2a + b}$, qui indiquent le quotient d'une division, soit qu'on puisse l'effectuer ou qu'on ne le puisse pas.

Si les numérateurs et les dénominateurs étaient des nombres entiers, il est évident que ces fractions devraient entrer dans le calcul par les mêmes règles que les fractions de l'arithmétique. Mais comme ils peuvent représenter des quantités quelconques, quelques explications nouvelles sont nécessaires.

55. Désignons par a et b deux quantités quelconques, et par q leur quotient, on aura

$$\frac{a}{b} = q, \quad \text{d'où} \quad a = bq.$$

Si on multiplie a et bq par une quantité quelconque m, il vient

$$am = bqm \text{ ou } am = q \times bm; \text{ donc } \frac{am}{bm} = q.$$

Mais q représente le quotient de a par b; donc

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

De là on conclut, comme en arithmétique, qu'une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par une même quantité.

De ce principe résultent aussi, comme en arithmétique, la simplification des fractions et leur réduction au même dénominateur.

La simplification d'une fraction s'opère en supprimant les facteurs communs à ses deux termes. Ainsi

$$\frac{12a^3bc^3}{18a^4bc^2} = \frac{2c}{3a}, \quad \frac{a^2 - 4b^2}{2a + 4b} = \frac{a - 2b}{2}.$$

La réduction des fractions au même dénominateur peut se faire en multipliant les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres. Mais il convient de rappeler que s'il y a des facteurs qui appartiennent à plusieurs dénominateurs, on obtiendra un dénominateur commun plus simple en prenant

chacun des facteurs qui entrent dans les dénominateurs des fractions proposées, et donnant à chacun la plus haute puissance dont il soit affecté dans ces dénominateurs. Par exemple, soient les fractions

$$\frac{3a^4}{40b^2c}, \quad \frac{7b^6}{18a^2c^3}, \quad \frac{11c^5}{45a^2b^2}.$$

Les trois dénominateurs peuvent s'écrire ainsi :

$$2^3 \times 5 \times b^2c, \quad 3^2 \times 2 \times a^2c^3, \quad 3^2 \times 5 \times a^2b^2.$$

Alors, on prendra chacun des facteurs avec son plus haut exposant, et le dénominateur commun sera $2^3 \times 3^2 \times 5 \times a^2b^2c^3$, ou $360a^2b^2c^3$ (*). Pour réduire les fractions à ce dénominateur, on le divise d'abord par chaque dénominateur successivement, ce qui donne les trois quotients $9a^2c^2$, $20b^2$, $8c^3$; ensuite on multiplie les trois numérateurs respectivement par ces trois quotients; enfin on place sous les produits le dénominateur commun $360a^2b^2c^3$, et les trois fractions deviennent

$$\frac{27a^6c^2}{360a^2b^2c^3}, \quad \frac{140b^8}{360a^2b^2c^3}, \quad \frac{88c^8}{360a^2b^2c^3}.$$

Si avec des fractions on a des quantités de forme entière, on pourra donner à ces quantités le dénominateur commun, après les avoir multipliées préalablement par ce dénominateur.

56. Quand on veut réduire en une seule fraction plusieurs termes qui ont des dénominateurs différents, on commence par les réduire au même dénominateur, et alors on aura des expressions comme celle-ci

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m},$$

dans laquelle les lettres désignent telles quantités qu'on voudra. Si on multiplie chaque fraction par m, l'expression entière sera multipliée par m, et on aura $a + b - c$. Or, en divisant ce produit par m, on doit revenir à la première quantité; donc

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} = \frac{a + b - c}{m}.$$

(*) En arithmétique, pour trouver le plus petit nombre divisible par des nombres donnés, sans les décomposer en facteurs, on s'élève successivement aux multiples de l'un d'eux, jusqu'à ce qu'on en trouve un qui soit divisible par chacun des autres nombres. Pour abréger, ce sont les multiples du plus grand nombre qu'il convient d'essayer.

Ainsi, après avoir réduit les fractions au même dénominateur, on fait, sur les numérateurs, les additions et les soustractions qu'on devait faire sur les fractions, puis on donne au résultat le dénominateur commun.

Considérons les multiplications et les divisions de fractions. Soient

$$p=\frac{a}{b},\quad q=\frac{c}{d}.$$

On devra avoir $pb=a$, $qd=c$; donc $pb\times qd=a\times c$, ou $pq\times bd=ac$. De là on tire

$$pq=\frac{ac}{bd};$$

donc on multiplie des fractions entre elles en multipliant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

De cette règle on conclut celle de la division. En effet, elle donne

$$\frac{ad}{bc}\times\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b};$$

donc $\frac{ad}{bc}$ est le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$: or, la quantité $\frac{ad}{bc}$ est aussi égale au produit $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$; donc on divise une fraction par une fraction en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

Les quantités entières seront comprises dans les fractions en leur donnant l'unité pour dénominateur.

57. Pour donner un exemple de calcul algébrique, je proposerai de simplifier cette expression

$$\frac{\left(a-\frac{b^2}{2a}\right)\left(a-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)}{1-\frac{a}{a+b}}.$$

En réduisant chaque terme entier en fraction de même dénominateur que celle dont il est suivi, puis renversant la quantité fractionnaire qui sera en diviseur, pour la mettre en multiplicateur, cette expression devient

$$\frac{2a^2-b^2}{2a}\times\frac{ab-b^2}{a+b}\times\frac{a+b}{b}.$$

Après qu'on aura multiplié les numérateurs entre eux et les dé-

nominateurs entre eux, il est facile d'apercevoir que b et $a+b$ seront des facteurs communs aux deux termes de la fraction résultante. On peut donc les supprimer, et on aura

$$\frac{(2a^2-b^2)(a-b)}{2a}.$$

Si on juge à propos d'effectuer la multiplication, il viendra

$$\frac{2a^3-2a^2b-ab^2+b^3}{2a};$$

et même, s'il y avait quelque utilité à diviser par $2a$ tous les termes du numérateur, on pourrait écrire

$$a^2-ab-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{2a}.$$

Comme exercice, je proposerai encore au lecteur d'effectuer la transformation suivante :

$$\frac{\left(1-\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{2b}\right)}{\left(a-2b+\frac{b^2}{a}\right)\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)}=-\frac{(a^2-ab-b^2)(a+b)}{2ab^2(a-b)}.$$

De l'exposant zéro et des exposants négatifs.

58. Quand on divise l'une par l'autre deux puissances de la même quantité, telles que a^m et a^n, la règle des exposants (45) donne

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

Les raisonnements qui ont conduit à cette règle supposent l'exposant du dividende plus grand que celui du diviseur; mais je vais montrer comment, au moyen de conventions nouvelles, la même règle peut s'étendre aux autres cas.

Supposons d'abord qu'on applique cette règle aux cas où les deux exposants sont égaux : on trouvera a^0 pour résultat. Or, l'exposant d'une lettre indiquant le nombre de fois que cette lettre est prise comme facteur (10), et l'expression a^0 ne pouvant recevoir de cette définition aucune interprétation, on reste maître de lui donner tel sens qu'on veut. Mais comme elle vient d'une division dans laquelle le diviseur est égal au dividende, et qu'alors le quotient est toujours l'unité, on est convenu de regarder l'expres-

sion a^0 comme équivalente à l'unité. Ainsi désormais, *toute quantité qui aura l'exposant zéro sera égale à* 1.

Supposons, en second lieu, que l'exposant de a dans le diviseur surpasse celui du dividende et qu'on ait $n = m + p$. En appliquant encore la règle des exposants, on aurait pour quotient a^{-p}; et cette expression, dans laquelle l'exposant est négatif, ne peut elle-même avoir aucune signification si ce n'est en vertu de quelque convention nouvelle. Toutefois, on aura soin que cette convention permette de considérer la puissance négative a^{-p} comme le quotient de a^m par a^{m+p}. Or, si je remarque que ce quotient peut se représenter par la fraction $\frac{a^m}{a^{m+p}}$, qu'on peut le simplifier en divisant les deux termes de cette fraction par a^m, et qu'alors il devient $\frac{1}{a^p}$, on est naturellement conduit à regarder l'expression a^{-p} comme équivalant à $\frac{1}{a^p}$; c'est-à-dire que *toute quantité affectée d'un exposant négatif équivaut au quotient de l'unité divisée par cette même quantité, après qu'on a changé le signe de son exposant.*

Au moyen des nouvelles conventions qu'on vient de faire connaître, on aura toujours, m et n étant des nombres entiers positifs quelconques,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Par suite, on aura aussi

$$\frac{a^m b^n c^p}{a^r b^s c^t} = \frac{a^m}{a^r} \times \frac{b^n}{b^s} \times \frac{c^p}{c^t} = a^{m-r} b^{n-s} c^{p-t}.$$

59. On emploie quelquefois l'exposant zéro pour conserver la trace d'une lettre que le calcul fait disparaître, et l'exposant négatif pour présenter une quantité fractionnaire sous forme entière. C'est ainsi qu'on écrira

$$\frac{2a^3b^2x^2}{abx^2} = 2 \times \frac{a^3}{a} \times \frac{b^2}{b} \times \frac{x^2}{x^2} = 2a^2bx^0,$$

$$\frac{3a^4b^2}{c^2d} = 3a^4b^2 \times \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{d} = 3a^4b^2c^{-2}d^{-1}.$$

60. Puisque les exposants négatifs sont admis dans les expressions algébriques, il faut chercher les règles suivant lesquelles ils doivent se combiner dans les calculs. Or, il est digne de re-

marque que ces règles sont toutes comprises dans les mêmes énoncés que celles qui ont été trouvées pour les exposants positifs. Rien de plus simple à démontrer. Par la nature des exposants négatifs, on a

$$a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}.$$

Dans chacun de ces produits, l'exposant de a est la somme des exposants des facteurs. Ainsi, dans la multiplication des puissances d'une quantité, l'exposant de cette quantité est toujours la somme des exposants des facteurs. Par une conséquence nécessaire, on conclut que, dans la division, l'exposant du quotient s'obtiendra toujours en retranchant celui du diviseur de celui du dividende.

61. Tout ce qui a été dit dans la division des polynomes repose principalement sur cette proposition, que, si deux polynomes et leur produit sont ordonnés par rapport à une même lettre, le premier terme du produit est le produit des premiers termes des deux facteurs, et le dernier terme est le produit des derniers termes de ces facteurs. Or, cette proposition subsiste également quand il y a des exposants négatifs; par conséquent la théorie de la division n'aura aucune modification à souffrir.

Quand on ordonne des polynomes par rapport aux exposants décroissants d'une lettre quelconque x, il faut bien faire attention à l'ordre qu'on est convenu d'établir entre les grandeurs selon leurs signes. D'après le nº **20**, les exposants négatifs devront venir après x^0, c'est-à-dire après les termes qui ne contiennent point x; et parmi ces exposants, ceux qui sont les plus forts en valeur absolue devront être rangés les derniers. Exemple :

$$2ax^2 - abx + ab^2 - a^2b^2x^{-1} - a^3b^2x^{-2}.$$

Cela posé, si la proposition dont il s'agit ne semble point assez évidente, on pourra la démontrer comme il suit. Soient A et B deux polynomes quelconques ordonnés comme ci-dessus, et désignons par k un nombre positif supérieur au plus grand exposant négatif qui se trouve dans A et B. Si on multiplie A et B par x^k sans troubler l'ordre des termes, on aura deux nouveaux polynomes A′ et B′ qui ne renfermeront plus que des exposants

positifs, et qui seront encore ordonnés par rapport aux puissances descendantes de x. De plus, il est clair que si les premiers termes de A et B sont ax^m et bx^n (m et n pouvant être des nombres négatifs), ceux de A′ et B′ seront ax^{m+k} et bx^{n+k}; donc, en multipliant les nouveaux polynomes l'un par l'autre, le premier terme du produit sera

$$abx^{m+n+2k}.$$

Semblablement, si les derniers termes de A et B sont fx^p et gx^q, ceux des nouveaux polynomes seront fx^{p+k} et gx^{q+k}; et par suite le dernier terme de leur produit sera

$$fgx^{p+q+2k}.$$

Le produit des nouveaux polynomes est égal à $Ax^k \times Bx^k$ ou ABx^{2k}, et il est évident qu'en le divisant par x^{2k} on reviendra au produit AB des polynomes primitifs. Mais par là le produit ne cesse pas d'être ordonné, et ses deux termes extrêmes se réduisent à abx^{m+n} et fgx^{p+q} : or, c'est précisément ce qui était à démontrer.

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

Quelques définitions.

62. Revenons aux questions dont la solution exige les ressources de l'algèbre. Si on se reporte à celle qui a été traitée dans le n° **16**, on remarquera qu'après avoir désigné par x la plus petite partie du nombre à partager, par b l'excès de la moyenne sur la plus petite, et par c l'excès de la plus grande sur la moyenne, on a reconnu que la somme $3x+2b+c$ devait être égale à ce nombre; et, comme ce nombre était représenté par a, on a posé l'égalité

$$3x+2b+c=a.$$

De là, ensuite, on est parvenu facilement à la valeur de x.

Proposons-nous encore ce problème : *Trouver un nombre dont le quintuple diminué de* 13 *soit égal à son triple augmenté de* 11.

En représentant par x le nombre inconnu, son quintuple dimi-

nué de 13 sera exprimé par $5x - 13$, et son triple augmenté de 11 sera exprimé par $3x + 11$. Or, d'après l'énoncé, il faut que ces deux quantités soient égales : donc on doit avoir

$$5x - 13 = 3x + 11.$$

Ajoutons 13 à chaque membre de cette égalité, puis retranchons-en $3x$, on aura

$$5x - 13 + 13 - 3x = 3x + 11 + 13 - 3x,$$

ou bien en effectuant les réductions,

$$2x = 24.$$

Alors en divisant par 2 on obtient

$$x = \frac{24}{2} = 12,$$

c'est-à-dire que le nombre cherché est 12. En effet, si on ôte 13 du quintuple de 12, il reste 47 ; et si on ajoute 11 au triple de 12, on trouve encore le même nombre 47.

La question précédente ne renfermait qu'une seule inconnue, et elle n'a conduit qu'à une seule égalité. D'autres questions pourraient contenir plus d'une inconnue et donner plus d'une égalité. Mais quel que soit le nombre des inconnues, la solution de la question devra toujours offrir deux parties bien distinctes. Dans la première, on exprimera, au moyen des signes algébriques, les relations entre les quantités connues, et les quantités inconnues, ce qui mènera à égaler entre elles certaines expressions ; et, dans la seconde, on déduira de ces égalités les valeurs des inconnues. La première partie ne peut être soumise à aucune règle précise ; mais la deuxième est assujettie à des règles générales qui font l'objet principal de l'algèbre, et dont je vais commencer l'exposition après avoir expliqué quelques nouvelles dénominations dont l'usage est continuel.

63. Lorsque deux expressions algébriques ne sont pas actuellement égales, mais qu'elles renferment une ou plusieurs quantités inconnues qu'il faut déterminer de manière qu'elles deviennent égales, on les joint par le signe $=$, comme si elles étaient actuellement égales, et l'on donne à l'ensemble des deux expressions, ainsi réunies, le nom d'*équation*. Par exemple, désignez par x une quantité inconnue, et posez

$$2x + 3 = x + 7\,;$$

ce sera là une équation. La quantité $2x + 3$ étant la même chose

que $x+7+x-4$, on reconnaît sur-le-champ qu'elle ne peut devenir égale à $x+7$ qu'en donnant à x la valeur 4.

Lorsqu'on peut démontrer que deux expressions ont des valeurs égales et qu'on joint ces deux expressions par le signe $=$, elles constituent une *égalité*. Ainsi, en posant

$$(x+1)(x-2)=x^2-x-2,$$

on aurait une égalité : car en effectuant le produit $(x+1)(x-2)$ on trouve x^2-x-2.

Si on désigne par a, b, c, d, quatre quantités connues en proportion géométrique, et qu'on écrive $a\times d=b\times c$, ce sera encore là une égalité : car il est démontré que dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

Si les deux quantités séparées par le signe $=$ sont égales et exprimées tout à fait de la même manière, elles forment une *identité*. Par exemple, on a des identités quand on écrit

$$4=4,\quad x^4+2=x^4+2.$$

Qu'il s'agisse d'une équation, d'une égalité, ou d'une identité, il est inutile d'avertir que les noms de *premier membre* et de *second membre* désignent toujours les deux quantités séparées par le signe $=$.

64. D'après les définitions précédentes, quand on parle d'*équations*, on doit toujours entendre qu'il y a des inconnues à trouver, et que les valeurs de ces inconnues doivent être telles, qu'en les substituant à la place des lettres qui les représentent, les équations doivent se changer en de véritables égalités. Le mot *égalité* rappelle des quantités qui sont actuellement égales, mais dont l'égalité doit être démontrée, si elle ne l'a déjà été. Enfin, l'*identité* est une égalité évidente d'elle-même.

Dans l'usage, on s'écarte souvent de l'acception rigoureuse des termes, et on confond l'équation avec l'égalité. Cela tient à ce que, dans les raisonnements, on a besoin presque toujours de supposer que les inconnues soient remplacées par leurs valeurs; et, comme ces valeurs doivent rendre effectivement les deux membres de chaque équation égaux entre eux, on conçoit que, sous ce point de vue, les équations deviennent des égalités.

Souvent aussi, lorsqu'on veut désigner une égalité telle que $3\times 4=2\times 6$, ou $(a+1)(a-1)=a^2-1$, on se sert du mot identité : c'est que, par la pensée, on regarde les opérations indiquées

comme déjà effectuées, et qu'alors en effet on aurait de vraies identités, $12=12$, ou $a^2-1=a^2-1$.

65. Déterminer les valeurs des inconnues qui sont engagées dans des équations, c'est chercher toutes les valeurs qui, étant mises dans ces équations à la place des inconnues, peuvent rendre les deux membres égaux entre eux. Cela s'appelle *résoudre* les équations.

Il suit de là qu'on peut vérifier les valeurs des inconnues, en les substituant dans les équations, et en effectuant tous les calculs indiqués dans les deux membres de chacune d'elles : les équations devront devenir *identiques*, c'est-à-dire, se réduire à des identités. On dit alors que les équations *sont vérifiées*, ou bien encore qu'elles *sont satisfaites*.

66. Les équations qu'on peut avoir à résoudre ne sont pas toutes également simples. Dans un très-grand nombre de cas, on les ramène à ne contenir que des termes joints entre eux par les signes $+$ et $-$, dans lesquels les inconnues sont élevées à des puissances positives, et multipliées soit entre elles, soit par des quantités données. Alors, ce qu'on nomme le *degré* d'une équation, c'est la somme des exposants des inconnues, prise dans le terme où cette somme est la plus forte.

Ainsi, par exemple, considérons les équations

[1] $2x-a=b-x$, [2] $ax-by=cx-d$,

[3] $2x^2+a=4x+2$, [4] $xy^4-2x^3=y^3-1$,

dans lesquelles les inconnues sont x et y. Les équations [1] et [2] sont du 1er degré, l'équation [3] est du 2e, et l'équation [4] est du 5e.

Quelques principes généraux relatifs aux équations. — Transposition des termes. Évanouissement des dénominateurs.

67. *On peut ajouter ou retrancher une même quantité aux deux membres d'une équation, sans que les valeurs des inconnues soient altérées.* Il est évident en effet que les mêmes valeurs, qui satisfont à l'équation dans son état primitif, doivent y satisfaire également dans le second état, et *vice versâ*.

68. De là il suit qu'*on peut effacer dans l'un des membres d'une équation, une quantité qui est ajoutée ou retranchée à ce membre, pourvu qu'on l'écrive dans l'autre membre avec un signe contraire.* Cela revient évidemment à ajouter à chaque membre cette quan-

tité, prise avec un signe contraire à celui dont elle est précédée dans le membre où elle se trouve.

Au moyen de cette règle, on pourra faire passer d'un membre dans l'autre tels termes qu'on voudra, en ayant soin de changer leurs signes. C'est ce qu'on appelle la *transposition* des termes. Ainsi, qu'on ait l'équation

$$17x-3=45+11x.$$

Si on veut mettre dans le premier membre les termes qui contiennent x, et les autres dans le second, on effacera $+11x$ dans le second membre, et on écrira $-11x$ dans le premier ; et pareillement on effacera -3 dans le premier, puis on écrira $+3$ dans le second. Alors l'équation devient

$$17x-11x=45+3.$$

69. *On peut aussi, sans que les valeurs des inconnues soient altérées, multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par une même quantité, pourvu que cette quantité ne renferme aucune inconnue.* En effet, les mêmes valeurs des inconnues doivent évidemment satisfaire à l'équation dans les deux états (*).

Toutefois la proposition pourrait cesser d'être vraie, si la quantité par laquelle on multiplie ou on divise les deux membres contenait des inconnues : car, si cela était, certaines valeurs des inconnues, qui satisfont à l'équation dans l'un des deux états, pourraient n'y pas satisfaire dans l'autre. Par exemple, qu'on ait l'équation $2x=4$, et qu'on multiplie chaque membre par $x-1$, il viendra $2x(x-1)=4(x-1)$: cette dernière équation admettra évidemment la valeur $x=1$, qui ne satisfait pas à la première.

70. De la proposition précédente il résulte que, si une quantité donnée est facteur dans les deux membres, on pourra simplifier l'équation en divisant les deux membres par cette quantité. Par exemple, si on a

$$27a^2bx+18a^3b=9a^2b^2-45a^3x,$$

on pourra diviser tous les termes par $9a^2$, et l'équation deviendra

$$3bx+2ab=b^2-5ax.$$

71. Une autre remarque, qui découle immédiatement de la

(*) Il est entendu, sans qu'il soit nécessaire de le dire, que la quantité par laquelle on multiplie ou divise l'équation, n'est ni nulle ni infinie.

même proposition, c'est qu'on peut changer les signes de tous les termes d'une équation : car cela revient à multiplier les deux membres par -1. Il est d'ailleurs évident (32) que, par ce changement de signes, les valeurs des deux membres ne font que changer de signe, et que par conséquent, si elles sont égales avant, elles le sont encore après, et *vice versâ*.

72. Cette proposition est surtout utile pour ramener une équation qui renferme des dénominateurs, à n'avoir plus que des termes entiers. On obtient sur-le-champ cette transformation en multipliant les deux membres par une quantité qui soit divisible par chaque dénominateur de l'équation. Alors, en effet, chaque terme fractionnaire contiendra dans son numérateur tous les facteurs de son dénominateur, de sorte qu'en les supprimant, la division indiquée par ce dénominateur se trouvera effectuée, et il n'y aura plus que des termes entiers. Quant à la quantité par laquelle on multiplie l'équation, il convient de choisir toujours la plus simple possible, comme on le fait dans la réduction des fractions au même dénominateur. De là résulte la règle suivante :

Pour chasser les dénominateurs d'une équation, on forme une quantité divisible par chaque dénominateur, et ordinairement on la prend la plus simple possible ; on multiplie ensuite chaque terme entier par cette quantité, et le numérateur de chaque terme fractionnaire par le quotient que donne cette quantité divisée par le dénominateur ; puis on supprime tous les dénominateurs.

Comme exemple, prenons d'abord l'équation

$$\frac{ax}{b} - b = \frac{a}{3} + \frac{5x}{2}.$$

Ici la quantité la plus simple qui soit divisible par les différents dénominateurs n'est autre que leur produit. Alors la règle revient à multiplier le numérateur de chaque fraction par le produit des dénominateurs des autres, et chaque terme entier par le produit de tous ces dénominateurs. De cette manière il vient

$$2\times3\times ax - 2\times3\times b\times b = 2\times b\times a + 3\times b\times 5x,$$

ou, en effectuant les multiplications,

$$6ax - 6b^2 = 2ab + 15bx.$$

En second lieu, soit l'équation

$$5a + \frac{a^2x}{18b^2} = \frac{3a^2}{4b} - \frac{bx}{9a}.$$

La quantité la plus simple qui soit divisible par les dénominateurs est $36ab^2$, et les quotients sont $2a$, $9ab$, $4b^2$. Il faudra donc multiplier les numérateurs des fractions par ces quotients, et le terme entier $5a$ par $36ab^2$. On a ainsi

$$5a\times 36ab^2+a^2x\times 2a=3a^2\times 9ab-bx\times 4b^2;$$

et, en effectuant les produits,

$$180a^2b^2+2a^3x=27a^3b-4b^3x.$$

Soit encore l'équation

$$2b-\frac{ax}{6b}=\frac{a^2x}{ab+b^2}-\frac{3a^2b}{2a^2-2b^2}.$$

En décomposant les dénominateurs en facteurs, ils deviennent

$$2.3.b,\quad (a+b)b,\quad 2(a+b)(a-b);$$

et on voit que la quantité la plus simple qui puisse se diviser par chacun d'eux est $2.3.b(a+b)(a-b)$ ou $6a^2b-6b^3$. Les quotients sont a^2-b^2, $6a-6b$, $3b$; par conséquent, pour chasser les dénominateurs de l'équation, je multiplierai les numérateurs des fractions par ces quotients, et le terme entier $2b$ par la quantité $6a^2b-6b^3$. Alors il vient

$$12a^2b^2-12b^4-a^3x+ab^2x=6a^3x-6a^2bx-9a^2b^2.$$

73. Ce qui a été dit dans ce paragraphe est applicable à toute espèce d'équation, et suffit pour résoudre celles du 1er degré.

Résolution d'une équation du 1er degré à une seule inconnue.

74. La difficulté de résoudre les équations dépend de leur degré et du nombre des inconnues. Je vais parcourir ici, dans différents exemples, tous les cas que peut présenter une équation du 1er degré à une seule inconnue.

Exemple I. Soit l'équation

[1] $$18x-61=13x-31.$$

En transposant $13x$ dans le premier membre, et -61 dans le second, on aura

$$18x-13x=61-31,$$

et, en effectuant les réductions,

$$5x=30.$$

Enfin, en divisant chacun des deux membres par 5, on obtient

$$x = 6.$$

De là on conclut que l'inconnue x est égale à 6. En effet, remarquez que, d'après les principes des nos 68 et 69, les équations successives par lesquelles on est passé doivent admettre les mêmes valeurs de x que l'équation [1]. Or, il est évident que la dernière, $x = 6$, est satisfaite en mettant 6 à la place de x, et qu'elle ne peut pas l'être autrement ; donc il en doit être de même de l'équation [1]. Ce raisonnement s'applique à tous les exemples qui vont suivre.

Pour vérifier si les calculs ont été faits avec exactitude, on substituera la valeur de x dans l'équation, et on examinera si elle la rend identique. C'est effectivement ce qui arrive, car on trouve successivement

$$18 \times 6 - 61 = 13 \times 6 - 31,$$
$$108 - 61 = 78 - 31,$$
$$47 = 47.$$

73. Exemple II. Soit l'équation

$$[2] \qquad 2ax - bx + 2ab = 4a^2 - ab - 3ax.$$

Je ferai encore passer dans le premier membre les termes qui contiennent x, et dans le second tous les autres. Il vient

$$2ax - bx + 3ax = 4a^2 - ab - 2ab;$$

et, en réduisant, on a

$$5ax - bx = 4a^2 - 3ab.$$

Les deux membres ne peuvent plus ici se réduire à des monomes ; mais en remarquant que le premier est la même chose que le produit $(5a - b)x$, l'équation peut s'écrire ainsi :

$$(5a - b)x = 4a^2 - 3ab.$$

Alors il n'y a plus qu'à diviser les deux membres par le multiplicateur de x, et l'on obtiendra la valeur de cette inconnue, savoir :

$$x = \frac{4a^2 - 3ab}{5a - b}.$$

Vérification. On substitue cette expression à la place de x dans l'équation [2], on effectue les calculs, et l'on parvient à une identité, comme on le voit à la page qui suit :

$$\frac{2a(4a^2-3ab)}{5a-b}-\frac{b(4a^2-3ab)}{5a-b}+2ab=4a^2-ab-\frac{3a(4a^2-3ab)}{5a-b},$$

$$\frac{8a^3-6a^2b-4a^2b+3ab^2+10a^2b-2ab^2}{5a-b}=$$

$$\frac{20a^3-4a^2b-5a^2b+ab^2-12a^3+9a^2b}{5a-b},$$

$$\frac{8a^3+ab^2}{5a-b}=\frac{8a^3+ab^2}{5a-b}.$$

76. Exemple III. Soit l'équation

$$[3] \qquad \frac{x}{4}-4=\frac{5x}{3}-\frac{7}{6}.$$

On peut suivre la même marche que dans les exemples précédents; mais il est plus commode de chasser les dénominateurs par la règle connue (**72**). Le calcul se réduit à convertir tous les termes en douzièmes et à supprimer le dénominateur commun. Il vient

$$3x-48=20x-14,$$

$$3x-20x=48-14,$$

$$-17x=34,$$

$$x=\frac{34}{-17}=-2.$$

Pour passer de l'équation $-17x=34$ à la valeur de x, c'est par -17 qu'on doit diviser 34, et c'est ce qui amène le quotient négatif -2.

Vérification. On substitue la valeur $x=-2$ dans l'équation [3], et il vient

$$\frac{-2}{4}-4=\frac{-2\times5}{3}-\frac{7}{6},$$

$$-\frac{6}{12}-\frac{48}{12}=-\frac{40}{12}-\frac{14}{12},$$

$$-\frac{54}{12}=-\frac{54}{12}.$$

77. Exemple IV. Soit l'équation

$$[4] \qquad \frac{3bx}{2a^2}-\frac{x-b}{a+b}=\frac{bx-a^2}{a^2-b^2}-\frac{x}{4a}.$$

On chasse d'abord les dénominateurs au moyen de la règle du n° **72**, ce qui revient à multiplier les deux membres de l'équation par la quantité $4a^2(a^2-b^2)$: on a ainsi

$$6bx(a^2-b^2)-4a^2(a-b)(x-b)=4a^2(bx-a^2)-ax(a^2-b^2).$$

Ensuite, pour mettre en évidence les termes affectés de x, on effectue les multiplications, et il vient

$$\begin{aligned}6a^2bx - 6b^3x - 4a^3x + 4a^2bx + 4a^3b - 4a^2b^2\\ = 4a^2bx - 4a^4 - a^3x + ab^2x.\end{aligned}$$

En transposant, réduisant et ordonnant, on trouve

$$-3a^3x + 6a^2bx - ab^2x - 6b^3x = -4a^4 - 4a^3b + 4a^2b^2.$$

D'après la remarque du nº **71**, on aurait pu donner le signe $+$ au premier terme $3a^3x$, en ayant soin de changer tous les signes de l'équation. De cette manière, la dernière équation eût été

$$3a^3x - 6a^2bx + ab^2x + 6b^3x = 4a^4 + 4a^3b - 4a^2b^2.$$

On peut l'écrire ainsi :

$$(3a^3 - 6a^2b + ab^2 + 6b^3)x = 4a^2(a^2 + ab - b^2);$$

et par suite on a

$$x = \frac{4a^2(a^2 + ab - b^2)}{3a^3 - 6a^2b + ab^2 + 6b^3}.$$

78. Exemple V. Soit l'équation

$$[5] \qquad \frac{2}{1-x} + 1 = \frac{x}{1+x}.$$

Comme l'inconnue x est engagée dans les dénominateurs, on ne voit pas comment tirer de cette équation la valeur de x, si on ne les fait pas disparaître. Mais en les chassant, il vient

$$2 + 2x + 1 - x^2 = x - x^2;$$

puis, en transposant et réduisant,

$$x = -3.$$

Remarque. Les règles pour chasser les dénominateurs sont fondées sur le principe du nº **69**, lequel peut cesser d'être vrai quand l'inconnue se trouve dans la quantité par laquelle on multiplie ou on divise l'équation. Or l'évanouissement des dénominateurs revient à multiplier toute l'équation par un produit divisible par chaque dénominateur ; par conséquent, lorsque l'inconnue entre dans les dénominateurs, et c'est ce qui arrive à l'équation [5], il y a lieu d'examiner si toute valeur de x qui satisfait à l'équation, avant la disparition de ces dénominateurs, y satisfait encore après, et *vice versâ*.

Afin de n'effectuer que des changements qui n'altèrent point

l'inconnue, transportons le 2ᵉ membre dans le 1ᵉʳ, et réduisons tout au même dénominateur : il vient

$$\frac{x+3}{1-x^2}=0.$$

Si on égale le numérateur à zéro, on a $x=-3$; c'est la valeur trouvée plus haut, et elle convient véritablement à l'équation ci-dessus, car en la substituant à la place de x le 1ᵉʳ membre devient égal à zéro. Il est évident d'ailleurs qu'aucune autre valeur ne le rendrait égal à zéro ; ainsi, dans ce cas, on peut ne tenir aucun compte du dénominateur.

Dans certains cas, une valeur qui rend nul le numérateur d'une fraction peut aussi rendre nul son dénominateur, et alors la fraction peut n'être pas nulle. Je reviendrai plus tard sur cette observation, et en même temps je parlerai des *valeurs infinies* dont j'ai fait abstraction jusqu'ici. *Voyez* le CHAPITRE V.

79. Laissant pour le moment ces difficultés de côté, je résumerai dans la règle suivante toutes les explications qui viennent d'être données au sujet des équations du 1ᵉʳ degré.

1° *Chassez les dénominateurs, s'il y en a, et effectuez les opérations nécessaires pour que l'équation ne contienne plus que des termes multipliés par l'inconnue, et des termes tout connus ;*

2° *Transposez dans le* 1ᵉʳ *membre les termes affectés de l'inconnue, et dans le* 2ᵉ *les termes tout connus ;*

3° *Donnez au* 1ᵉʳ *membre la forme d'un produit dont l'inconnue soit l'un des facteurs, et alors divisez les deux membres par le multiplicateur de cette inconnue.*

Le lecteur qui voudrait dès à présent s'exercer à la résolution des problèmes, peut se transporter à la page 64, et suivre ensuite jusqu'aux problèmes de la page 72.

Résolution de deux équations du 1ᵉʳ degré à deux inconnues.

80. Quand on a à résoudre deux équations du 1ᵉʳ degré qui contiennent deux inconnues, le moyen qu'on emploie consiste principalement à *éliminer* l'une des inconnues, c'est-à-dire à déduire des équations données une nouvelle équation qui ne renferme plus cette inconnue, et de laquelle on puisse tirer la valeur de l'inconnue restante. Plusieurs méthodes sont employées pour effectuer cette élimination : je vais les exposer successivement.

81. Première méthode, *dans laquelle l'élimination est faite par* comparaison. L'explication sera plus facile en prenant un exemple. Soient les deux équations

$$[1] \qquad 3y - 7x = 4,$$

$$[2] \qquad 2y + 5x = 22.$$

Supposons pour un moment qu'on soit assuré qu'il existe deux nombres qui, mis à la place de x et de y, satisfassent en même temps à ces deux équations; et considérons x et y comme représentant ces nombres eux-mêmes: alors on pourra raisonner sur ces équations comme si elles étaient des égalités actuelles. Or ces équations donnent

$$[3] \qquad y = \frac{7x + 4}{3},$$

$$[4] \qquad y = \frac{22 - 5x}{2};$$

et comme ces valeurs doivent être égales, on a

$$[5] \qquad \frac{7x + 4}{3} = \frac{22 - 5x}{2}.$$

Voilà donc une équation du 1er degré à laquelle l'inconnue x doit satisfaire, et par conséquent on en pourra tirer la valeur de cette inconnue. Par les procédés établis dans le paragraphe précédent, on aura

$$14x + 8 = 66 - 15x,$$
$$29x = 58;$$
$$x = 2.$$

En mettant cette valeur de x dans une des deux expressions de y, qui sont écrites plus haut, on connaîtra la valeur de cette inconnue. Il est d'ailleurs évident qu'en faisant cette substitution dans l'une ou dans l'autre, on doit trouver le même résultat : car la valeur de x, ayant été déduite de l'équation [5], doit rendre identiques les deux membres de cette équation, lesquels sont précisément les deux expressions de y dont il s'agit. La substitution étant faite dans la première, il vient

$$y = \frac{7 \times 2 + 4}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

Ainsi les valeurs des deux inconnues sont

$$x = 2, \quad y = 6.$$

Par la manière dont ces valeurs ont été trouvées, on est certain qu'elles conviennent aux deux équations données. En effet, elles conviennent évidemment aux équations [3] et [4]; et comme celles-ci, en chassant les dénominateurs et en transposant dans le premier membre les termes en x, ramènent aux proposées [1] et [2], il s'ensuit que les valeurs de x et de y doivent aussi satisfaire à ces équations.

Cette remarque était nécessaire : car, pour arriver aux valeurs $x=2$, $y=6$, on a supposé qu'il y avait des valeurs de x et de y qui vérifiaient les équations données, et rien ne prouvait que cette supposition fût vraie. Il restait donc encore à examiner si les valeurs trouvées pour x et y satisfont réellement aux équations.

Dans cette vue, on aurait pu substituer ces valeurs immédiatement dans les équations, afin de voir si elles les rendent identiques. C'est en effet ce qui a lieu : car, par cette substitution, la première devient

$$3\times 6-7\times 2=4,\quad \text{ou}\quad 18-14=4,\quad \text{ou}\quad 4=4;$$

et la seconde

$$2\times 6+5\times 2=22,\quad \text{ou}\quad 12+10=22,\quad \text{ou}\quad 22=22.$$

Toutefois, on doit comprendre qu'une pareille vérification ne prouve rien pour le cas où l'on aurait d'autres équations à résoudre; par conséquent, une démonstration fondée sur le procédé même qui sert à trouver les valeurs des inconnues était indispensable pour prouver que ces valeurs doivent toujours satisfaire aux équations.

82. DEUXIÈME MÉTHODE, *dans laquelle l'élimination est faite par* SUBSTITUTION. Reprenons les deux équations

$$[6]\qquad 3y-7x=4,$$

$$[7]\qquad 2y+5x=22;$$

et considérons toujours x et y comme représentant deux nombres qui satisfont à ces équations. De la première, on tire

$$[8]\qquad y=\frac{7x+4}{3}.$$

On peut donc, dans la seconde équation, remplacer y par cette valeur, et cette équation, ne renfermant plus alors que la seule

inconnue x sans cesser d'être du 1er degré, servira à déterminer cette inconnue. La substitution donne

$$[9] \qquad 2 \times \frac{7x + 4}{3} + 5x = 22;$$

et de cette équation on déduit successivement

$$14x + 8 + 15x = 66,$$
$$29x = 58,$$
$$x = 2.$$

Cette valeur étant mise dans celle de y, qui a été tirée de la première équation, on trouve encore

$$y = \frac{7 \times 2 + 4}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

On a donc, pour x et y, les mêmes valeurs que tout à l'heure. Mais il faut s'assurer que ce nouveau procédé doit toujours donner des valeurs qui conviennent aux équations proposées.

Remarquons d'abord que la valeur $y = 6$ ayant été trouvée en faisant $x = 2$ dans l'éq. [8], il s'ensuit que les valeurs $x = 2$, $y = 6$, doivent satisfaire à cette équation. Or, en multipliant par 3 et remettant $7x$ dans le 1er membre, cette équation devient l'éq. [6]; donc déjà les valeurs $x = 2$, $y = 6$, satisfont à l'éq. [6].

Ensuite, la valeur $x = 2$ doit vérifier l'équation [9] d'où elle est déduite. Mais, dans cette équation, la fraction qui est multipliée par 2, n'étant autre chose que le deuxième membre de l'équation [8], doit devenir égale à 6 quand on remplace x par 2; donc il revient tout à fait au même de faire $x = 2$ dans l'équation [9], ou bien de faire $x = 2$ et $y = 6$ dans l'équation [7]; par conséquent, cette dernière se trouve aussi vérifiée par les valeurs $x = 2$, $y = 6$.

85. TROISIÈME MÉTHODE, *dans laquelle l'élimination est faite par* RÉDUCTION. Il faut d'abord, par des préparations convenables, amener chacune des deux équations à la forme

$$ax + by = c.$$

Alors on voit que si, dans les deux équations, l'une des inconnues avait le même coefficient, on ferait disparaître cette inconnue en retranchant, membre à membre, les équations l'une de l'autre, ou bien en les ajoutant, selon que les termes qui contiennent cette inconnue seraient de même signe ou de signes contraires. De cette manière, on formerait une nouvelle équation qui ne renfermerait plus que l'autre inconnue, et on en pourrait tirer la valeur de cette

inconnue. Or, il est évident qu'on amènera toujours une inconnue à avoir le même coefficient dans les deux équations, en multipliant les deux membres de chaque équation par le coefficient dont cette inconnue est affectée dans l'autre équation : ainsi, voilà un nouveau moyen de résoudre les deux équations.

Pour exemple, reprenons encore les équations

$$3y - 7x = 4,$$
$$2y + 5x = 22.$$

Si on veut d'abord connaître x, on multipliera les deux membres de la première équation par 2, coefficient de y dans la seconde, et les deux membres de la seconde par 3, coefficient de y dans la première. Par ces multiplications, les équations deviennent

$$6y - 14x = 8,$$
$$6y + 15x = 66;$$

et en les retranchant l'une de l'autre, membre à membre, on a

$$29x = 58, \quad \text{d'où} \quad x = 2.$$

Pour avoir y, on pourrait substituer cette valeur dans l'une des deux équations proposées. Mais si on veut trouver y par le même procédé que x, on multipliera la première de ces équations par 5, coefficient de x dans la deuxième; et la deuxième par 7, coefficient de x dans la première. Par là elles deviennent

$$15y - 35x = 20,$$
$$14y + 35x = 154;$$

puis en ajoutant celles-ci, membre à membre, on a

$$29y = 174, \quad \text{d'où} \quad y = 6.$$

On retrouve donc encore les mêmes valeurs, $x = 2$ et $y = 6$, que par les deux autres procédés.

Cette troisième méthode est, comme on voit, assez simple; mais il importe, comme dans les deux précédentes, de faire voir que les valeurs de x et de y, auxquelles elle conduit, ne peuvent pas manquer de satisfaire aux deux équations. Comme ceci exige des explications qu'il serait difficile de suivre sur des équations particulières, je représenterai les deux équations d'une manière générale par

$$[a] \qquad \begin{cases} A = B, \\ A' = B'. \end{cases}$$

Cela posé, si on les multiplie respectivement par des nombres

quelconques m et n, et qu'ensuite on les ajoute, on a $mA + nA' = mB + nB'$; et je vais montrer qu'on peut remplacer par cette équation l'une des deux proposées, la deuxième, par exemple : c'est-à-dire que les deux éq. [a] ont absolument les mêmes solutions que celles-ci

$$[b] \quad \begin{cases} A = B, \\ mA + nA' = mB + nB'. \end{cases}$$

En effet, si de la dernière on retranche le produit de la précédente par m, il vient $nA' = nB'$, ou, en divisant par n, $A' = B'$. Donc, de même que le système des éq. [b] est une conséquence du système [a], réciproquement le système [a] est une conséquence du système [b]. Donc les valeurs de x et de y qui conviennent au dernier ne peuvent pas manquer de convenir aussi au premier. Or, si les multiplicateurs m et n sont choisis, comme on le fait dans la 3e méthode, de manière que l'équation $mA + nA' = mB + nB'$ ne contienne plus y, si de cette équation on tire la valeur de x, et si on la substitue dans l'équation $A = B$ pour en tirer la valeur de y, il est évident qu'on aura ainsi des valeurs de x et de y qui conviendront aux éq. [b] ; donc elles conviendront aussi aux proposées [a].

Maintenant il faut encore justifier le procédé dans lequel on calcule la seconde inconnue de la même manière que la première. Supposons, à cet effet, qu'après avoir déduit des équations [a], l'équation $mA + nA' = mB + nB'$, on les multiplie de nouveau par d'autres nombres m' et n', et qu'on les ajoute encore, on aura une nouvelle équation $m'A + n'A' = m'B + n'B'$; et je dis qu'on peut aussi considérer les équations [a] comme des conséquences de celles-ci :

$$[c] \quad \begin{cases} mA + nA' = mB + nB', \\ m'A + n'A' = m'B + n'B'. \end{cases}$$

Pour le montrer, multiplions ces dernières respectivement par n' et n, puis retranchons-les l'une de l'autre : A' et B' disparaissent, et il vient

$$(mn' - nm')A = (mn' - nm')B, \quad \text{ou} \quad A = B.$$

Pareillement, en multipliant les équations [c] par m' et m, et en retranchant la première de la seconde, il vient

$$(mn' - nm')A' = (mn' - nm')B', \quad \text{ou} \quad A' = B'.$$

Ainsi, les deux systèmes [a] et [c] sont réciproquement une con-

séquence l'un de l'autre. Or, on peut choisir les multiplicateurs m, n, m', n', de telle sorte que la première éq. [c] ne renferme plus y, et que la deuxième ne renferme plus x. Il est donc évident que les valeurs qu'on en tire immédiatement, pour x et y, doivent convenir aux proposées. C'est ce qui restait à démontrer.

84. Remarques. J'ai supposé qu'on obtenait les équations [c] par voie d'addition. Cette manière d'opérer comprend celle où l'on emploierait la soustraction : car si, par exemple, après avoir multiplié les équations [a] par m et n, on voulait retrancher la 2e de la 1re, cela reviendrait évidemment à les ajouter après les avoir multipliées par m et $-n$.

J'ai aussi supposé tacitement que $mn'-nm'$ n'était pas zéro. Si cela était, les équations où $mn'-nm'$ était facteur des deux membres, se réduiraient identiquement à $0=0$, et l'on n'en pourrait plus conclure $A=B$, $A'=B'$. Il suit de là que, pour remplacer les éq. [a] par les éq. [c], il faut choisir m, n, m', n', de manière qu'on n'ait pas $mn'-nm'=0$, où, ce qui est la même chose, $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$: c'est-à-dire que les nombres m et n ne doivent pas être proportionnels à m' et n'. Or, quand on fait l'élimination par réduction (83), on prend pour m et n les coefficients de y dans les équations proposées, et pour m' et n' ceux de x : si donc les coefficients de x sont proportionnels à ceux de y, la méthode semblera en défaut. Cette difficulté sera éclaircie plus tard (**151**).

L'opération par laquelle on rend égaux les coefficients de l'inconnue qu'on fait disparaître est parfaitement analogue à la réduction des fractions au même dénominateur, et elle présente les mêmes simplifications. Par exemple, si les équations étaient

$$21y+20x=165,$$
$$77y-30x=295,$$

comme les coefficients de y se décomposent en 7×3 et 7×11, on les rendrait égaux en multipliant les équations respectivement par 11 et par 3. Semblablement, ceux de x deviendraient égaux en multipliant les équations par 3 et par 2.

Les deux premières méthodes amènent le plus souvent des dénominateurs qu'il faut faire disparaître. Cet inconvénient n'a pas lieu dans la troisième ; et même il est à observer qu'avec un peu d'habitude on pourra, quand les coefficients seront peu compliqués, effectuer d'un seul coup, comme si c'était une opération

unique, et les multiplications qui réduisent à l'égalité les coefficients d'une inconnue, et l'addition ou la soustraction qui fait disparaître cette inconnue.

Quelque méthode qu'on emploie, il est clair qu'après l'élimination d'une inconnue, l'équation résultante doit toujours donner la même valeur pour l'inconnue restante. Il suit de là que si, en faisant usage d'un procédé d'élimination, on ramène l'équation résultante à la forme $ax=b$, a et b étant des quantités connues, on sera sûr que tout autre procédé donnera ou la même équation, ou une équation qui ne différera de celle-là que par un facteur commun à ses deux membres : autrement, on n'aurait pas la même valeur pour x.

Résolution d'un nombre quelconque d'équations du 1er degré, contenant un pareil nombre d'inconnues.

85. Soient les équations

[1] $$4x-3y+2z=40,$$

[2] $$5x+9y-7z=47,$$

[3] $$9x+8y-3z=97.$$

Par l'une des trois méthodes connues, on pourra éliminer l'inconnue z entre la première équation et chacune des deux autres Si on emploie l'élimination par réduction, il vient sur-le-champ

[4] $$38x-3y=374,$$

[5] $$30x+7y=314.$$

Les valeurs de x et de y devront satisfaire à ces deux équations, et par conséquent on saura les déterminer.

Si entre ces deux équations on élimine y, toujours par réduction, on trouve $356x=3560$, d'où $x=10$.

En mettant cette valeur dans l'équation [4], on a $380-3y=374$, d'où $y=2$.

Enfin, en portant les valeurs de x et y dans l'équation [1], on trouve $40-6+2z=40$, d'où $z=3$.

Donc les valeurs des trois inconnues seront $x=10$, $y=2$, $z=3$.

Il est bien évident que ces valeurs sont les seules qui puissent satisfaire aux trois équations proposées; mais est-il certain qu'elles y satisfassent? Pour s'en assurer, il faut observer que, par la manière dont ces valeurs ont été trouvées, on est sûr qu'elles doivent satisfaire aux éq. [1], [4], [5]. Mais, d'après ce qui a été

exposé n° **85**, l'éq. [2] est une conséquence des éq. [1] et [4]; et l'éq. [3] est une conséquence de [1] et [5] : donc les valeurs de x, y, z, qui vérifient les éq. [1], [4], [5], ne peuvent pas manquer de vérifier aussi les éq. [1], [2], [3].

86. En généralisant le procédé qui vient d'être employé pour trois équations, on peut établir la règle suivante :

Pour résoudre plusieurs équations du 1er *degré en nombre égal aux inconnues, éliminez une inconnue entre l'une de ces équations et chacune des autres : vous aurez ainsi de nouvelles équations, qui renfermeront une inconnue de moins, qui seront en nombre égal à celui des inconnues restantes, et qui seront encore du* 1er *degré. Opérez sur ces équations comme sur les proposées, c'est-à-dire éliminez encore une inconnue entre l'une de ces nouvelles équations et chacune des autres. En continuant toujours de même, vous parviendrez à une équation du* 1er *degré qui ne renfermera plus qu'une seule inconnue. Alors, de cette dernière équation vous tirerez la valeur de cette inconnue; puis remontant aux équations précédentes, vous déterminerez successivement les valeurs des autres inconnues.*

87. Quand on apercevra des facteurs communs à tous les termes d'une équation, il ne faut pas oublier de les supprimer : par là on rendra les calculs plus simples. Soient, par exemple, les équations

$$10x-20y+30z=60,$$
$$8x+12y-16z=80,$$
$$27x-18y+45z=234.$$

On voit que la 1re peut se diviser par 10, la 2e par 4, et la 3e par 9. En conséquence, au lieu des équations ci-dessus, on aura à résoudre les suivantes :

$$x-2y+3z=6,$$
$$2x+3y-4z=20,$$
$$3x-2y+5z=26.$$

L'élimination de x, entre la 1re de ces équations et les deux autres, donne les deux suivantes :

$$7y-10z=8,$$
$$4y-\ 4z=8:$$

ou bien, si on simplifie la dernière en la divisant par 4,

$$7y-10z=8,$$
$$y-\ \ z=2.$$

L'élimination de y entre celles-ci donne $3z=6$, d'où $z=2$. On

substitue cette valeur dans l'éq. $y-z=2$, et il vient $y-2=2$, d'où $y=4$. Enfin, on met les valeurs de y et de z dans l'éq. $x-2y+3z=6$, et l'on a $x-8+6=6$, d'où $x=8$.

88. Un cas doit être prévu ici parce qu'il embarrasse quelquefois les commençants : c'est celui où toutes les inconnues n'entrent pas dans chacune des équations. La méthode ne change pas pour cela ; seulement il y aura quelques éliminations de moins à effectuer. Comme exemple, prenons les quatre équations

$$\begin{aligned} 7u-13z&=87,\\ 3u+14x&=57,\\ 10y-\ 3x&=11,\\ 2x-11z&=50. \end{aligned}$$

Il est visible qu'en éliminant l'inconnue u entre les deux premières, l'équation résultante ne contiendra que les deux inconnues x et z ; par conséquent, en la joignant à la dernière, on aura deux équations qui feront connaître ces deux inconnues. Ces deux équations sont

$$\begin{aligned} 98x+39z&=138,\\ 2x-11z&=50. \end{aligned}$$

Pour éliminer x, multiplions la dernière équation par 49, et retranchons-la de la précédente, il vient

$$578z=-2312,\quad \text{d'où}\quad z=-4.$$

Substituons cette valeur dans l'équation $2x-11z=50$, on trouve

$$2x+44=50,\quad \text{d'où}\quad x=3.$$

Enfin, remontons aux équations proposées, et mettons la valeur $x=3$ dans la deuxième et la troisième : elles deviennent

$$\left.\begin{aligned} 3u+42&=57,\\ 10y-\ 9&=11, \end{aligned}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{aligned} u&=5,\\ y&=2. \end{aligned}\right.$$

Ainsi les valeurs cherchées sont $u=5$, $y=2$, $x=3$, $z=-4$.

89. Le lecteur pourra s'exercer encore à résoudre les trois équations

$$\begin{aligned} ay+bx&=c,\\ cx+az&=b,\\ bz+cy&=a. \end{aligned}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{c}{ab},\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{b}{ac},\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{a}{bc}$$

Il devra trouver

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\quad z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

90. Quand on propose de résoudre des équations du 1er degré

en nombre égal aux inconnues, il suit de la règle établie n° 86 qu'il existe, pour les inconnues, un système de valeurs propres à vérifier les équations et qu'il n'en existe qu'un seul. Toutefois il ne faudrait pas trop généraliser cette conclusion : car elle est sujette à des exceptions dont je parlerai bientôt (n^{os} **109-112**).

Supposons que le nombre des équations surpasse celui des inconnues, et que, par exemple, on ait cinq équations entre trois inconnues x, y, z. On pourra considérer à part trois de ces équations, lesquelles détermineront, sauf exception, un système unique de valeurs pour x, y, z; et après avoir trouvé ces valeurs il faudra examiner si elles vérifient aussi les deux autres équations. Or, à moins que ces équations n'aient été choisies d'une manière particulière, cette vérification ne doit pas avoir lieu, et par conséquent il n'existera pas de valeurs, pour les inconnues, qui puissent convenir aux cinq équations à la fois.

Supposons au contraire qu'il y ait plus d'inconnues que d'équations : par exemple, trois équations et cinq inconnues x, y, z, u, v. On pourra donner des valeurs arbitraires à deux inconnues, u et v, puis déterminer, au moyen des trois équations, des valeurs correspondantes pour x, y, z. En changeant les valeurs de u et v, on aurait un autre système de valeurs; et on en trouverait ainsi une infinité. Mais il sera mieux de n'attribuer aucune valeur particulière à u ni à v, et de résoudre les trois équations comme si u et v étaient des quantités données. De cette manière on obtiendra, pour x, y, z, des formules dans lesquelles entreront u et v, et qui feront connaître les valeurs de x, y, z, correspondant à telles valeurs qu'on voudra de u et de v.

CHAPITRE IV.

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

Règle pour mettre les problèmes en équation.

91. L'énoncé d'un problème fait connaître les conditions que les inconnues doivent remplir, de telle sorte qu'en prenant à volonté des valeurs pour les inconnues, il est toujours facile de vérifier si elles remplissent ces conditions. Dans la plupart des

questions qui sont du ressort de l'algèbre, ces vérifications consistent en ce que, après avoir effectué certaines opérations sur les valeurs de ces inconnues et sur les quantités données, on doit arriver à des égalités. Cela étant bien compris, si on représente les inconnues par des lettres, on pourra former des expressions algébriques dans lesquelles soient indiqués, au moyen des signes, tous les calculs qu'il faut faire, tant sur les inconnues que sur les quantités données, pour trouver les quantités qui doivent être égales. Par conséquent, en joignant ces expressions par le signe d'égalité, on aura une ou plusieurs équations qui devront être satisfaites quand on y substituera les vraies valeurs des inconnues à la place des lettres. Réciproquement, lorsque toutes les conditions du problème auront été exprimées dans les équations, on sera certain que les valeurs des inconnues, qui satisferont à ces équations, devront aussi satisfaire à l'énoncé du problème.

On voit par là que les conventions de l'algèbre constituent une véritable langue, dans laquelle on peut traduire l'énoncé d'un problème et représenter avec la plus exacte fidélité les relations de grandeur qu'ont entre elles les quantités connues et inconnues. Établir ces relations par des équations, cela s'appelle *mettre le problème en équation*, ou *le traduire en langue algébrique*. Les réflexions précédentes serviront de guide pour y parvenir.

On peut aussi les réduire à cette règle générale : *Après avoir choisi la quantité ou les quantités qu'on prend pour inconnues*, *on les représente par des lettres*; *puis on indique, à l'aide des signes algébriques, les opérations qu'il faudrait effectuer pour vérifier les valeurs des inconnues, si elles étaient données.*

Mais, pour bien comprendre toute l'utilité de cette règle, les commençants doivent l'appliquer à un grand nombre d'exemples; et bientôt, par cet exercice, ils acquerront une sagacité qui leur tiendra lieu de préceptes.

Souvent une question, qui au premier aspect présente plusieurs inconnues, se résout cependant avec un nombre moindre d'inconnues, et quelquefois même avec une seule. Ce dernier cas, par exemple, arrive quand on reconnaît tout d'abord que l'une des inconnues étant trouvée, les autres pourraient s'en déduire immédiatement par des opérations très-simples, par une addition, par une soustraction, etc. C'est ce qu'on verra dans quelques-uns des problèmes dont je vais développer les solutions.

Exemples de problèmes à une seule inconnue.

92. Problème I. *Trouver deux nombres dont la somme soit égale à* 36, *et la différence égale à* 10.

Je prends pour inconnue le plus grand des deux nombres cherchés, et je le désigne par x. Puisque la différence des deux nombres doit être 10, le plus petit sera désigné par $x-10$; et comme la somme de ces deux nombres doit être 36, on posera

$$x+x-10=36.$$

Cette équation revient à

$$2x=46,$$

d'où

$$x=23.$$

Donc le plus grand des deux nombres est 23, et par suite le plus petit est $23-10$ ou 13. En effet, on a $23+13=36$.

Solution générale. Le problème peut s'énoncer généralement en ces termes : *Trouver deux quantités dont on connaît la somme et la différence.*

Ici il y a deux quantités connues qui doivent rester quelconques, et il faudra aussi les representer par des lettres. Je désignerai par a la somme donnée, par b la différence, et toujours par x la plus grande des quantités cherchées. La plus petite s'exprimera alors par $x-b$, et l'équation du problème sera

$$x+x-b=a,$$

ou bien

$$2x=a+b;$$

donc

$$x=\frac{a+b}{2}.$$

Voilà l'expression de la plus grande partie. Il faut en retrancher b pour avoir l'autre partie, et il vient

$$x-b=\frac{a+b}{2}-b=\frac{a+b-2b}{2}=\frac{a-b}{2}.$$

Ainsi, pour calculer les deux quantités inconnues, on a les formules

$$x=\frac{a+b}{2},\quad x-b=\frac{a-b}{2}.$$

Elles peuvent aussi s'écrire de cette manière

$$x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2},\quad x-b=\frac{a}{2}-\frac{b}{2},$$

et sous cette forme elles font voir que, *quand on connaît la somme et la différence de deux quantités, la plus grande est égale à la demi-somme plus la demi-différence, et la plus petite à la demi-somme moins la demi-différence.*

Supposons que la somme connue soit 36 et que la différence soit 10, on aura

$$\text{la plus grande quantité} = \frac{36}{2} + \frac{10}{2} = 18 + 5 = 23,$$

$$\text{et la plus petite} \ldots\ldots\ldots = \frac{36}{2} - \frac{10}{2} = 18 - 5 = 13.$$

Ces valeurs sont celles qui conviennent à l'énoncé particulier qui a été proposé d'abord.

93. Problème II. *Deux fontaines versent uniformément leur eau dans le même bassin, et l'on connaît le temps que chacune, coulant seule, met à remplir ce bassin. Combien de temps faudrait-il pour le remplir, si elles coulaient ensemble?*

Je représente par a le nombre d'heures qu'il faut à la première fontaine, coulant seule, pour emplir le bassin; par b, celui qu'il faut à la seconde; par x, celui qu'il faut aux deux fontaines coulant ensemble.

Pour vérifier le temps x, s'il était donné, je chercherais la partie du bassin que remplit la première fontaine pendant ce temps, celle que remplit la seconde pendant ce même temps; et les deux parties réunies devraient donner la capacité entière du bassin.

Or, en prenant cette capacité pour unité, les parties de cette capacité, que fournissent les deux fontaines dans le temps x, sont les quatrièmes termes des proportions

$$a : x :: 1 : \frac{x}{a}, \quad b : x :: 1 : \frac{x}{b};$$

donc, puisque ces parties réunies doivent donner le bassin entier, on aura l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1.$$

Si on chasse les dénominateurs, il vient

$$bx + ax = ab, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{ab}{a+b}.$$

Pour prendre un cas particulier, supposons que la première

fontaine mette $1^h \frac{1}{2}$ à remplir le bassin, et que la seconde mette $2^h \frac{1}{4}$. Il faudra, dans la valeur de x, faire $a = 1\frac{1}{2}$ et $b = 2\frac{1}{4}$. Alors cette valeur devient

$$x = \frac{1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}}{1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{9}{4}}{\frac{3}{2} + \frac{9}{4}} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}.$$

94. Problème III. *Un père ordonne par son testament que l'aîné de ses enfants prenne, sur le bien qu'il laisse, une somme* a, *plus la* n^{me} *partie du reste ; que le* 2e *prenne, après que l'aîné aura prélevé sa part, une somme* 2a *plus la* n^{me} *partie du reste; que le* 3e *prenne, après le prélèvement de ces deux parts, la somme* 3a *plus la* n^{me} *partie du reste; et ainsi de suite. Or, il arrive que tous les enfants se trouvent également partagés, et que le bien du père est tout à fait épuisé. Quel est le bien du père, la part de chaque enfant, et le nombre des enfants?*

Si le bien du père était connu, on pourrait aisément former la part du 1er enfant, et puisqu'ils sont également partagés, elle serait celle de tous les autres. Ensuite, en divisant le bien du père par cette part, on aurait le nombre des enfants. C'est pourquoi je prendrai pour inconnue le bien du père.

Si cette inconnue était donnée, pour la vérifier, on formerait la part de chaque enfant, d'après la loi qu'indique l'énoncé; et quand on arriverait à celle du dernier enfant, le bien du père devrait être entièrement épuisé, et toutes les autres parts devraient être égales. Mais il est évident que la seule condition d'égalité entre la 1re part et la 2e suffira pour déterminer la valeur de l'inconnue, il restera donc encore, après l'avoir trouvée, à examiner si les autres conditions sont remplies.

Comme la solution du problème, considéré dans toute sa généralité, pourraît paraître difficile, je l'expliquerai d'abord sur des nombres particuliers. Par exemple, je supposerai que *le* 1er *enfant prenne sur le bien du père une somme de* 1000 *fr., plus le* 5e *de ce qui reste, que le* 2e *enfant prenne, après que la* 1re *part aura été prélevée, une somme de* 2000 *fr., plus le* 5e *du reste, ainsi de suite.*

Soit x le bien du père. Après avoir prélevé 1000 fr., le reste est $x - 1000$; par conséquent la part du 1er enfant est

$$1000 + \frac{x - 1000}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{4000 + x}{5} \ldots\ldots \text{1}^{\text{re}} \text{ part.}$$

En ôtant cette part du bien total x, il reste à partager entre les autres enfants

$$x - \frac{4000 + x}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{4x - 4000}{5}.$$

Sur cela le 2e enfant doit prendre 2000 fr., plus le 5e du reste. Or, après avoir pris 2000 fr., le reste est

$$\frac{4x - 4000}{5} - 2000 \quad \text{ou} \quad \frac{4x - 14000}{5};$$

par conséquent, en ajoutant à 2000 le 5e de ce reste, on aura la part du 2e enfant, savoir :

$$2000 + \frac{4x - 14000}{25} \quad \text{ou} \quad \frac{36000 + 4x}{25} \ldots\ldots \text{2e part.}$$

Sans s'occuper des autres enfants, on peut dès à présent former l'équation du problème. En effet, l'énoncé indiquant qu'ils sont tous également partagés, il faut que les deux premières parts soient égales ; et de là résulte l'équation

$$[1] \qquad \frac{4000 + x}{5} = \frac{36000 + 4x}{25}.$$

En chassant les dénominateurs, il vient

$$20000 + 5x = 36000 + 4x,$$

d'où

$$x = 16000.$$

Si on remplace x par cette valeur dans l'expression de la 1re part, on aura la valeur de cette part

$$\frac{4000 + 16000}{5} = 4000;$$

et, puisque toutes les parts doivent être égales, en divisant le bien du père par cette part, le quotient 4 sera le nombre des enfants

Donc le bien du père $= 16000$ fr., la part de chaque enfant $= 4000$ fr., et le nombre des enfants $= 4$.

Il se présente ici une observation importante. La valeur de x a été déduite de l'équation [1], qui exprime seulement l'égalité de la 2e part à la 1re : il reste donc encore à examiner si les deux autres parts lui sont aussi égales. Or, en défalquant de l'héritage entier les deux premières parts, qui font ensemble 8000 fr., il reste 8000 fr. ; et, sur ces 8000 fr., le 3e enfant doit prendre 3000 fr., plus le 5e du reste : donc il aura

$$3000 + \frac{8000 - 3000}{5} = \frac{20000}{5} = 4000.$$

Ensuite, cette part étant ôtée de 8000 fr., il reste 4000 fr., sur quoi le 4[e] enfant doit prendre 4000 fr. et le 5[e] du reste. Il aura donc aussi 4000 fr., et l'héritage sera épuisé. Ainsi, toutes les vérifications sont satisfaisantes.

Exposons maintenant la solution générale. En nommant toujours x le bien du père, on aura

$$1^{re} \text{ part} = a + \frac{x-a}{n};$$

et, après le prélèvement de cette part, ce qui reste du bien est $x - a - \frac{x-a}{n}$ ou $\frac{(n-1)(x-a)}{n}$. Par suite, on aura

$$2^{e} \text{ part} = 2a + \frac{(n-1)(x-a) - 2an}{n^2}.$$

Donc, en égalant la 1[re] part à la 2[e], on aura l'équation

$$a + \frac{x-a}{n} = 2a + \frac{(n-1)(x-a) - 2an}{n^2}.$$

Après l'évanouissement des dénominateurs, elle devient celle-ci

$$an^2 + nx - an = 2an^2 + nx - x - an + a - 2an,$$

d'où le bien du père $\quad x = an^2 - 2an + a, \quad x = a(n-1)^2.$

Au moyen de cette valeur, on peut calculer la 1[re] part, qui sera aussi celle de chaque enfant. On a donc

$$\text{part d'un enfant} = a + \frac{x-a}{n} = a + \frac{an^2 - 2an + a - a}{n}.$$

$$= a + an - 2a = a(n-1).$$

Enfin, en divisant le bien total par cette part, on trouve

le nombre des enfants $= n - 1$.

Mais l'observation faite plus haut se reproduit ici. Par la manière dont on a établi l'équation du problème, on est bien sûr que la 2[e] part sera égale à la 1[re]; mais il reste à vérifier s'il en est de même de toutes les autres.

Du bien entier $a(n-1)^2$ ôtez la part du 1[er] enfant, il reste

$$a(n-1)^2 - a(n-1) = a(n-1)(n-1-1) = a(n-1)(n-2).$$

La part du 2[e] enfant sera donc

$$2a + \frac{a(n-1)(n-2) - 2a}{n} = \frac{a(n-1)(n-2) + 2a(n-1)}{n}$$

$$= \frac{a(n-1)(n-2+2)}{n} = a(n-1)$$

Elle est égale à la première, ainsi qu'on devait s'y attendre.

Si du bien entier on ôte les deux premières parts, il restera

$$a(n-1)^2 - 2a(n-1) = a(n-1)(n-1-2) = a(n-1)(n-3).$$

Par suite, la part du 3[e] enfant sera

$$3a + \frac{a(n-1)(n-3)-3a}{n} = \frac{a(n-1)(n-3)+3a(n-1)}{n}$$

$$= \frac{a(n-1)(n-3+3)}{n} = a(n-1).$$

Elle est égale aux précédentes, et par conséquent le reste du bien, en défalquant les trois premières parts, sera

$$a(n-1)^2 - 3a(n-1) = a(n-1)(n-1-3) = a(n-1)(n-4).$$

En continuant ainsi, on voit clairement que les calculs s'effectueront toujours de telle sorte que toutes les parts seront égales à $a(n-1)$. Par conséquent, il est clair aussi qu'après avoir formé $n-1$ parts, le bien sera totalement épuisé : car la somme de toutes ces parts sera $a(n-1)\times(n-1)$, ou $a(n-1)^2$, ce qui est la valeur du bien à partager.

Il peut se faire qu'on éprouve de la difficulté à comprendre que les calculs doivent toujours amener des parts égales; mais en calculant encore quelques parts, les lois selon lesquelles s'effectuent les réductions ne pourront point échapper.

Au reste, voici un raisonnement qui ne peut laisser aucun doute. Admettons qu'après avoir calculé un certain nombre de parts on les ait toujours trouvées égales entre elles, et examinons si la part suivante leur sera encore égale. Soit k le nombre des parts déjà calculées, lesquelles sont toutes égales à $a(n-1)$. Ce qui reste du bien total, en défalquant toutes ces parts, est

$$a(n-1)^2 - ka(n-1) = a(n-1)(n-1-k).$$

La part suivante sera

$$(k+1)a + \frac{a(n-1)(n-1-k)-(k+1)a}{n}$$

$$= \frac{a(n-1)(n-1-k)+a(k+1)(n-1)}{n}$$

$$= \frac{a(n-1)(n-1-k+k+1)}{n} = a(n-1);$$

et l'on voit que cette part est égale aux précédentes.

Remarquez maintenant que k est un nombre entier quelconque;

donc si on fait $k=1$, on conclura que la 2e part est égale à la 1re; si on fait $k=2$, on conclura que la 3e part est égale aux deux premières, et ainsi de suite. Donc toutes les parts seront égales.

Exemples de problèmes à plusieurs inconnues.

95. PROBLÈME IV. *Un entrepreneur a payé 105 fr. pour 17 journées de maçon et 10 journées de manœuvre; et plus tard, sans que le travail ait changé de prix, il a payé 84 fr. pour 10 journées de maçon et 17 journées de manœuvre. Combien gagnait par jour le maçon, et combien le manœuvre?*

Appelons x le gain du maçon, et y celui du manœuvre. Pour 17 journées de maçon et 10 journées de manœuvre, l'entrepreneur doit $17x+10y$; donc, d'après l'énoncé, on a $17x+10y=105$.

Pour 10 journées de maçon et 17 journées de manœuvre, il doit $10x+17y$; donc, d'après l'énoncé, on a $10x+17y=84$.

Ainsi, les deux équations à résoudre sont

$$17x+10y=105,$$
$$10x+17y=84;$$

et pour cela on emploiera celle des trois méthodes qu'on voudra.

1° Si on emploie *l'élimination par comparaison*, on aura

$$y=\frac{105-17x}{10},\ y=\frac{84-10x}{17};$$
$$\frac{105-17x}{10}=\frac{84-10x}{17},$$
$$1785-289x=840-100x,$$
$$100x-289x=840-1785,$$
$$-189x=-945,$$
$$x=\frac{945}{189}=5,$$

En portant cette valeur dans la 1re valeur de y, il vient

$$y=\frac{105-85}{10}=2.$$

Donc, le maçon gagnait 5 fr., et le manœuvre 2 fr.

2° Si on fait l'*élimination par substitution*, on a, en tirant de la 1re équation la valeur de y,

$$y=\frac{105-17x}{10},$$

$$10x+\frac{17(105-17x)}{10}=84,$$

$$100x+1785-289x=840,$$

$$-189x=-945,$$

$$x=\frac{945}{189}=5;$$

par suite on a encore, comme tout à l'heure,

$$y=\frac{105-85}{10}=2.$$

3° Enfin servons-nous de l'*élimination par réduction*. Pour éliminer y, on multipliera les équations respectivement par 17 et par 10, puis on retranchera la 2e de la 1re, ce qui donne

$$289x-100x=1785-840,$$

$$189x=945,$$

$$x=\frac{945}{189}=5.$$

Pour éliminer x, on multipliera la 1re équation par 10, la 2e par 17; et par la soustraction, on aura

$$289y-100y=1428-1050,$$

$$189y=378,$$

$$y=\frac{378}{189}=2.$$

On aurait pu encore trouver y en substituant la valeur $x=5$ dans l'une des équations du problème, dans la 1re, par exemple. On a ainsi $85+10y=105$, d'où $y=2$, comme ci-dessus.

96. PROBLÈME V. *Une personne possède un capital qu'elle fait valoir à un certain intérêt. Une autre personne, qui possède* 10000 *fr. de plus que la première, et qui fait valoir son capital à* 1 *de plus pour* 100, *a un revenu plus grand de* 800 *fr. Une troisième, qui possède* 15000 *fr. de plus que la première, et qui fait valoir son bien à* 2 *de plus pour* 100, *a un revenu plus grand de* 1500 *fr. On demande les biens des trois personnes, et à quel intérêt chacune fait valoir son bien?*

Nommons x le capital de la première personne, et y l'intérêt

pour 100 qu'elle en retire. D'après l'énoncé même, la seconde personne aurait un capital égal à $x+10000$, qu'elle ferait valoir à l'intérêt de $y+1$ pour 100; et la troisième, un capital égal à $x+15000$, qu'elle ferait valoir à l'intérêt de $y+2$ pour 100.

Les revenus que ces trois personnes tirent de leurs capitaux se trouveraient par les proportions

$$100 : x :: y : \frac{xy}{100},$$
$$100 : x+10000 :: y+1 : \frac{(x+10000)(y+1)}{100},$$
$$100 : x+15000 :: y+2 : \frac{(x+15000)(y+2)}{100}.$$

Mais, d'après l'énoncé, la seconde personne reçoit 800 fr. de revenu de plus que la première, et la troisième 1500 fr. de plus; donc on a les deux équations

$$\frac{(x+10000)(y+1)}{100}=\frac{xy}{100}+800,$$
$$\frac{(x+15000)(y+2)}{100}=\frac{xy}{100}+15000.$$

Je chasse les dénominateurs, j'effectue les multiplications, je supprime le terme xy qui y est commun aux deux membres de chaque équation, et je fais passer tous les termes connus dans les seconds membres. Alors ces équations deviennent

$$x+10000y=70000,$$
$$2x+15000y=120000.$$

Pour éliminer x, du double de la 1re équation je retranche la 2e : il vient

$$5000y=20000, \quad \text{d'où} \quad y=4.$$

Puis, pour avoir x, je substitue cette valeur dans la 1re équation, ce qui donne

$$x+40000=70000, \quad \text{d'où} \quad x=30000.$$

Donc, la première personne possède un capital de 30000 fr., qu'elle fait valoir à 4 pour 100; la deuxième, un capital de 40000 fr., qu'elle fait valoir à 5 pour 100; et la troisième, un capital de 45000 fr., qu'elle fait valoir à 6 pour 100.

97. PROBLÈME VI. *On a acheté séparément les charges de trois voitures. La première, qui contenait* 30 *mesures de seigle,* 20 *d'orge et* 10 *de froment, a coûté* 230 *fr. La seconde, qui contenait* 15 *me-*

sures de seigle, 6 *d'orge et* 12 *de froment, a coûté* 138 *fr. La troisième, qui contenait* 10 *mesures de seigle,* 5 *d'orge et* 4 *de froment, a coûté* 75 *fr. On demande combien coûte la mesure de seigle, celle d'orge et celle de froment ?*

En nommant x, y, z, les trois inconnues, il est clair que les équations du problème seront

$$30x+20y+10z=230,$$
$$15x+6y+12z=138,$$
$$10x+5y+4z=75.$$

On peut simplifier la 1re équation en divisant tous ses termes par 10, et la seconde en divisant tous ses termes par 3. En conséquence, au lieu des trois équations ci-dessus, on aura celles-ci

$$3x+2y+z=23,$$
$$5x+2y+4z=46,$$
$$10x+5y+4z=75.$$

En éliminant, par réduction, z entre la 1re équation et les deux autres, il vient

$$7x+6y=46,$$
$$2x+3y=17.$$

En éliminant de la même manière y entre ces dernières, on a

$$3x=12, \quad \text{d'où} \quad x=4.$$

Si on met cette valeur dans l'équation $2x+3y=17$, elle devient

$$8+3y=17, \quad \text{d'où} \quad y=3.$$

Enfin, en substituant les valeurs connues de x et de y dans l'équation $3x+2y+z=23$, on trouve

$$12+6+z=23, \quad \text{d'où} \quad z=5.$$

Donc, la mesure de seigle vaut 4 fr., celle d'orge 3 fr., et celle de froment 5 fr.

98. PROBLÈME VII. *Un officier qui commande à trois compagnies de soldats, l'une de Suisses, l'autre de Souabes, et la troisième de Saxons, veut donner un assaut avec une partie de ses troupes. Il est chargé de partager* 901 *écus entre les soldats des trois compagnies ; mais ceux-ci consentent qu'il soit donné un écu à chaque soldat qui montera à l'assaut, et que le reste soit distribué également entre tous les autres. Or il se trouve que si les Suisses donnent l'assaut, chaque soldat des autres compagnies reçoit un demi-écu ; que si les Souabes vont à l'assaut, chacun des autres reçoit un tiers d'écu ; et que si les Saxons donnent l'assaut, chacun des autres reçoit un quart*

d'écu. On demande de combien d'hommes était chaque compagnie?

Soit x le nombre des Suisses, y celui des Souabes, z celui des Saxons.

Si les Suisses vont à l'assaut, chacun d'eux recevant un écu, le nombre d'écus qui resterait à distribuer entre les autres serait $901-x$, et par conséquent ce que chacun de ceux-ci recevrait serait $\frac{901-x}{y+z}$. Si les Souabes montent à l'assaut, ce qui reviendrait à chacun des hommes restants, serait $\frac{901-y}{x+z}$. Enfin, si les Saxons vont à l'assaut, chaque homme restant recevrait $\frac{901-z}{x+y}$.

Or, d'après l'énoncé, ces trois quotients devraient être respectivement égaux aux fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; donc les équations du problème sont

$$\frac{901-x}{y+z}=\frac{1}{2},\quad \frac{901-y}{x+z}=\frac{1}{3},\quad \frac{901-z}{x+y}=\frac{1}{4}.$$

En chassant les dénominateurs et transposant, elles deviennent

$$\begin{aligned} 2x+\ y+\ z&=1802,\\ x+3y+\ z&=2703,\\ x+\ y+4z&=3604. \end{aligned}$$

Par l'élimination de z on trouve

$$\begin{aligned} x-2y&=-\ 901,\\ 7x+3y&=+3604. \end{aligned}$$

L'élimination de y entre ces deux équations donne

$$17x=4505,\quad \text{d'où}\quad x=\frac{4505}{17}=265.$$

Cette valeur étant mise dans l'équation $x-2y=-901$, on a

$$265-2y=-901,\quad \text{d'où}\quad y=\frac{1166}{2}=583.$$

Enfin, en remplaçant, dans l'équation $2x+y+z=1802$, x et y par leurs valeurs, on a

$$530+583+z=1802,\quad \text{d'où}\quad z=689.$$

Donc il y avait 265 hommes dans la compagnie suisse, 583 dans la compagnie souabe, et 689 dans la saxonne.

Énoncés de problèmes.

99. Comme exercice, je place ici quelques problèmes à résoudre. Jusqu'au XIXe, ils n'exigent qu'une seule inconnue.

PROBLÈME VIII. *Un maître promet à son domestique, en le prenant à son service,* 200 *fr. par an et un habit. Il le renvoie au bout de* 10 *mois, lui donne* 160 *fr. et lui laisse l'habit. On demande le prix de l'habit?* Réponse : 40 fr.

PROBLÈME IX. *Diophante, l'auteur du plus ancien livre d'algèbre qui nous reste, passa dans sa jeunesse le sixième du temps qu'il vécut, un douzième dans l'adolescence, ensuite il se maria, et passa dans cette union le septième de sa vie augmenté de* 5 *ans, avant d'avoir un fils auquel il survécut de* 4 *ans, et qui n'atteignit que la moitié de l'âge où son père est parvenu. Quel âge avait Diophante lorsqu'il mourut?* Réponse : 84 ans.

PROBLÈME X. *Un père a* 49 *ans et son fils en a* 11. *Quand l'âge du père ne sera-t-il plus que le triple de celui de son fils?* Réponse : Dans 8 ans.

PROBLÈME XI. *Un père laisse quatre fils et* 8600 *fr. Dans son testament il ordonne que la part de l'aîné soit double de celle du second moins* 100 *fr., que le second ait trois fois autant que le troisième moins* 200 *fr., et que le troisième ait quatre fois autant que le quatrième moins* 300 *fr. Quelles sont les parts des quatre fils?* Réponse : Le 1er fils, 4900 fr.; le 2e, 2500 fr.; le 3e, 900 fr.; le 4e, 300 fr.

PROBLÈME XII. *Un père veut, par son testament, que ses trois fils partagent son bien de la manière suivante : L'aîné,* 3000 *fr. de moins que la moitié de tout l'héritage; le second,* 2400 *fr. de moins que le tiers de tout le bien; le troisième,* 1800 *fr. de moins que le quart du bien. Quel était le bien du père et quelle est la part de chaque héritier?* Réponse : Le père laisse 86400 fr.; le 1er fils reçoit 40200 fr.; le 2e, 26400 fr.; le 3e, 19800.

PROBLÈME XIII. *Un courrier faisant* 5 *lieues en* 2 *heures était parti de Paris depuis* 9 *heures lorsqu'on a envoyé après lui un autre courrier, qui faisait* 11 *lieues en* 3 *heures. On demande à quelle distance celui-ci a joint le premier?* Réponse : 70 lieues $\frac{5}{7}$.

PROBLÈME XIV. *Une montre marquant midi, l'aiguille des minutes se trouve sur celle des heures; à quelle heure se fera la prochaine rencontre?* Réponse : A $1^h\,5'\frac{5}{11}$.

PROBLÈME XV. *Un nombre est composé de trois chiffres; la somme des chiffres est* 13; *le chiffre des unités est triple de celui des centaines; et quand on ajoute* 396 *à ce nombre, on obtient une somme qui est ce nombre renversé. Quel est ce nombre?* Réponse : 256.

PROBLÈME XVI. *Une personne ayant des jetons dans les deux*

mains, en prend un de la droite pour l'ajouter à ceux de la gauche, et par là il s'en trouve autant dans l'une que dans l'autre. Si elle en eût fait passer deux de la gauche dans la droite, cette dernière main en aurait contenu le double de ce qui serait resté dans l'autre. Combien y avait-il d'abord de jetons dans chaque main? Réponse : 8 jetons dans la gauche et 10 dans la droite.

PROBLÈME XVII. *Un renard poursuivi par un lévrier a* 60 *sauts d'avance. Il en fait* 9 *pendant que le lévrier n'en fait que* 6; *mais* 3 *sauts du lévrier en valent* 7 *du renard. On demande combien le lévrier doit faire de sauts pour atteindre le renard?* Réponse : 72 sauts.

PROBLÈME XVIII. *On a* 32 *kilog. d'eau de mer, qui contiennent* 16 *hectog. de sel; combien faut-il ajouter d'eau douce pour que* 32 *kilog. du nouveau mélange ne contiennent plus que* 2 *hectog. de sel?* Réponse : 224 kilog.

PROBLÈME XIX. *Un réservoir, qui est plein d'eau, peut se vider par deux robinets de grandeurs inégales. On ouvre l'un d'eux et on fait couler le quart de l'eau; puis alors on ouvre l'autre et on les laisse couler tous les deux. Le réservoir achève de se vider, et emploie pour cela* $\frac{5}{4}$ *d'heure de plus qu'il n'a fallu au premier robinet pour vider le quart de l'eau. Si on eût ouvert les deux robinets dès le commencement, le réservoir se serait vidé un quart d'heure plus tôt. Combien faudrait-il au premier robinet, s'il coulait constamment seul, pour vider le réservoir?* Réponse : 4 heures.

PROBLÈME XX. *Un mulet et un âne portent des charges de quelques quintaux. L'âne se plaint de la sienne, et dit au mulet : Il ne me manque que de porter encore un quintal de ta charge pour que la mienne soit double de la tienne. Le mulet répond : Et moi, si je prends un quintal de ta charge, la mienne sera triple de la tienne. On demande combien de quintaux ils portent chacun?* Réponse : Le mulet porte 2 quintaux $\frac{4}{5}$, et l'âne 2 quintaux $\frac{1}{5}$.

PROBLÈME XXI. *Deux personnes doivent ensemble* 870 *fr. Elles ont de l'argent toutes deux, mais pas assez chacune pour acquitter seule cette dette commune. Le premier débiteur dit donc au second : Si vous me donnez les* $\frac{2}{3}$ *de votre argent, je payerai seul la dette sur-le-champ. Le second lui répond : Je pourrais aussi acquitter seul la dette, si vous me donniez les* $\frac{3}{4}$ *du vôtre. On demande combien ils ont l'un et l'autre?* Réponse : Le 1er débiteur a 580 fr., et le 2e a 435 fr.

PROBLÈME XXII. *Une personne charitable rencontre des pauvres, et veut donner 25 centimes à chacun; mais il lui manque pour cela 10 centimes. Alors elle ne donne que 20 centimes à chaque pauvre, et il lui reste 25 centimes. Combien avait-elle de monnaie, et quel était le nombre des pauvres?* Réponse : Elle avait 1 fr. 65 c., et il y avait 7 pauvres.

PROBLÈME XXIII. *Le testament d'un oncle porte que chacun de ses neveux aura 12000 fr., et chacune de ses nièces 9000 fr., sur la somme de 120000 fr. qu'il leur laisse après sa mort. Par cette disposition il ne reste rien de cette somme. Si au contraire chaque nièce eût eu 12000 fr. et chaque neveu 9000 fr., il serait resté 9000 fr. Trouver le nombre des neveux et des nièces?* Réponse : 7 neveux et 4 nièces.

PROBLÈME XXIV. *Trois frères ont acheté une vigne pour 2000 fr. Le troisième dit qu'il pourrait la payer seul, si le second lui donnait la moitié de son argent; le second dit que si l'aîné lui donnait seulement le tiers du sien, il payerait seul la vigne; enfin, l'aîné ne demande que le quart de l'argent du troisième pour payer seul la vigne. Combien chacun avait-il d'argent?* Réponse : L'aîné avait 1680 fr.; le 2e, 1440 fr.; le 3e, 1280 fr.

PROBLÈME XXV. *Un homme, qui s'est chargé de transporter des vases de porcelaine de différentes grandeurs, est convenu de payer pour chaque vase qu'il cassera autant qu'il recevra pour chaque vase qu'il rendra en bon état.*

On lui donne d'abord 2 petits vases, 4 moyens et 9 grands; il casse les moyens, rend les autres en bon état, et reçoit 28 fr.

On lui donne ensuite 7 petits vases, 3 moyens et 5 grands; cette fois il rend les petits et les moyens en bon état, mais il casse les grands, et il reçoit seulement 3 fr.

Enfin, on lui remet 9 petits vases, 10 moyens et 11 grands; il casse tous ces derniers, et ne reçoit en conséquence que 4 fr.

Quel est le prix du transport d'un vase de chaque grandeur?

Réponse : Le prix est de 2 fr. pour les petits, de 3 fr. pour les moyens, et de 4 fr. pour les grands.

CHAPITRE V.

INTERPRÉTATION ET USAGE DES QUANTITÉS NÉGATIVES DANS LES PROBLÈMES. — DE L'IMPOSSIBILITÉ ET DE L'INDÉTERMINATION DANS LE 1er DEGRÉ. — DISCUSSION DES PROBLÈMES. — DES SYMBOLES $\frac{m}{0}$ ET $\frac{0}{0}$. — REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS OU IL Y A DES DÉNOMINATEURS CONTENANT L'INCONNUE.

Interprétation et usage des quantités négatives dans les problèmes.

100. Pour ne point embarrasser les commençants, j'ai laissé de côté certaines particularités fort remarquables qui peuvent se rencontrer dans les équations et dans les problèmes du premier degré. Je me propose de les faire connaître dans ce chapitre; et d'abord je parlerai de l'interprétation et de l'usage des quantités négatives dans les problèmes en général. Pour être bien comprise, cette importante théorie doit être expliquée sur des exemples.

101. PROBLÈME. *Un particulier a employé dans l'été un ouvrier pendant* 13 *journées; et dans l'hiver pendant* 17 *journées, pour chacune desquelles il lui donnait* 2 *francs de moins que pour une journée d'été. La première fois l'ouvrier a subi une diminution de* 22 *fr. pour quelques dégâts qu'il avait causés; la seconde fois il a mérité par son zèle une gratification de* 28 *fr.; et cependant il a reçu chaque fois la même somme. Quel est le prix d'une journée d'été?*

Soit x le prix d'une journée d'été. La somme que l'ouvrier a dû recevoir la première fois sera exprimée par $13x-22$. Comme il a par journée d'hiver 2 fr. de moins que par journée d'été, la somme qu'il a dû recevoir la seconde fois sera exprimée par $17(x-2)+28$. Or, d'après l'énoncé, il reçoit chaque fois la même somme; donc on doit avoir

$$[1] \qquad 17(x-2)+28=13x-22.$$

De là on déduit successivement

$$17x-34+28=13x-22,$$
$$17x-13x=34-28-22,$$
$$4x=-16,$$
$$x=-4.$$

Ainsi, pour répondre à la question, il faudrait dire que le gain de l'ouvrier, pendant un jour d'été, est —4 fr., ce qui n'offre absolument aucun sens. Il faut donc conclure que l'énoncé renferme des conditions impossibles.

Pour mettre cette conséquence dans tout son jour, remarquons d'abord que les changements opérés sur l'équation [1], pour arriver à l'équation $x = -4$, n'altèrent point l'inconnue. Or, la dernière est vérifiée en remplaçant x par -4, et ne peut pas l'être autrement; donc il doit en être de même de l'équation [1].

En second lieu, remarquons encore que, s'il existe une valeur de x qui convienne à la question, elle doit nécessairement vérifier l'équation [1]. Donc, puisque cette vérification ne peut s'opérer que par une valeur négative, on a raison de conclure que la question est impossible.

Mais une observation qui est bien importante, c'est que la valeur négative $x = -4$, devant vérifier l'équation [1], qui est l'expression immédiate des conditions du problème, indique par cela même comment on peut modifier l'énoncé en un autre qui ne renfermera plus aucune impossibilité, et qui, après cette rectification, admettra pour solution la valeur de x déjà trouvée, mais prise positivement. C'est ce qu'on va expliquer.

Dans l'équation [1] remplacez x par $-x$, elle devient

[2] $$17(-x-2)+28=-13x-22.$$

Or, soit qu'on mette -4 dans la première, ou 4 dans la seconde, il est évident que les deux substitutions doivent donner exactement le même résultat; donc, puisque la première équation doit être vérifiée par la valeur $x = -4$, la deuxième le sera par la valeur $x = 4$. Ainsi toute question dont l'énoncé sera exprimé par l'équation [2] aura pour solution $x = 4$. Mais comme il n'en existe aucune qui puisse conduire à ne mettre dans le second membre que des termes négatifs, je changerai tous les signes de cette équation, et je l'écrirai ainsi

[3] $$17(x+2)-28=13x+22.$$

Alors, pour que la question proposée admette la solution $x = 4$, on voit qu'il suffit de modifier son énoncé de telle manière que *le prix de la journée d'hiver surpasse de* 2 *fr. celui de la journée d'été; que la somme gagnée dans les* 13 *jours d'été soit augmentée*

de 22 *fr.*, au lieu d'être diminuée; et qu'au contraire *la somme gagnée pendant les* 17 *jours d'hiver subisse une retenue de* 28 *fr.* au lieu d'un accroissement. De cette manière, le nouvel énoncé sera celui-ci :

Un particulier a employé dans l'été un ouvrier pendant 13 *journées; et dans l'hiver pendant* 17 *journées, pour chacune desquelles il recevait* 2 *fr. de plus que pour une journée d'été. La première fois, l'ouvrier a mérité en outre par son zèle une gratification de* 22 *fr.; mais, la seconde fois, il a subi une retenue de* 28 *fr. à raison de quelques dégâts qu'il avait causés. Il a reçu chaque fois la même somme, et l'on veut connaître le prix de la journée d'été.*

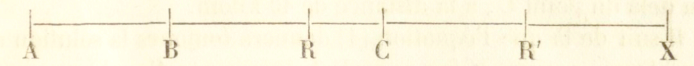
Ainsi rectifiée, il est de toute évidence que la question conduit à l'éq. [3], qui admet la même valeur $x = 4$ que l'éq. [2]. Par conséquent cette valeur résout la question dans le sens précis du nouvel énoncé. On doit remarquer surtout que les quantités données dans l'énoncé primitif, sont restées sans altération dans le nouveau. Seulement quelques-unes d'entre elles, qui étaient désignées d'abord comme soustractives, sont devenues additives ou *vice versâ*.

102. En général, si l'énoncé d'un problème exige que l'inconnue x soit positive, et si l'équation donne une valeur négative $x = -a$, on doit conclure que le problème est impossible. Pour rectifier l'énoncé, on remplace dans l'équation x par $-x$, ce qui change les signes de certains termes; puis, sans altérer les quantités données, on modifie l'acception sous lesquelles elles sont considérées, de telle sorte que les changements de signes de l'équation correspondent exactement à ce changement d'acception. Alors, on sera sûr, sans résoudre aucune nouvelle équation, que la valeur positive $x = a$ conviendra au dernier énoncé; à moins toutefois qu'il ne renferme encore quelques conditions qu'on n'aurait pas pu exprimer dans l'équation : comme si, par exemple, il exigeait que l'inconnue fût un nombre entier.

Au reste, on conçoit que cette rectification peut se faire d'une infinité de manières différentes; mais il faut toujours, dans le nouvel énoncé, avoir soin de se tenir le plus près qu'on pourra de l'énoncé primitif.

103. Problème. *Deux courriers partent de deux points* A *et* B, *situés sur la même route* ABX, *et vont dans la même direction vers un point* C, *placé au delà de* B *par rapport à* A. *On connaît les dis-*

tances des points A *et* B *au point* C, *savoir :* AC = 110 *kilomètres et* BC = 50 *kilomètres. De plus, on sait que la vitesse du courrier parti du point* A *est de* 10 *kilomètres par heure, et que celle du courrier parti du point* B *est de* 6 *kilomètres. On demande à quel point de la route les courriers se joindront.*



Supposons que la jonction se fasse au point R, et soit la distance CR $= x$. Les chemins parcourus par les deux courriers seront AR $= 110 - x$ et BR $= 50 - x$. Puisque le premier fait 10 kil. par heure, et le second 6, les nombres d'heures employées par eux pour parcourir AR et BR seront exprimés par $\frac{110-x}{10}$ et $\frac{50-x}{6}$. Comme ils sont partis en même temps, ces nombres doivent être égaux ; donc l'équation du problème est

$$[4] \qquad \frac{110-x}{10} = \frac{50-x}{6}.$$

En multipliant les deux membres par 30 pour chasser les diviseurs, puis continuant les calculs, il vient

$$330 - 3x = 250 - 5x,$$
$$5x - 3x = 250 - 330,$$
$$2x = -80,$$
$$x = -40.$$

Voilà encore une valeur négative, et cependant on aurait tort d'affirmer que la question est impossible. Il est évident, en effet, que le courrier qui, au départ, est derrière, allant plus vite que celui qui est devant, doit finir par l'atteindre. Mais nous avons supposé en formant l'équation [4] que la rencontre se faisait en R avant le point C, et rien n'autorisait une pareille supposition. Ainsi c'est dans cette supposition, et non dans l'énoncé, que se trouve l'absurdité accusée par la valeur négative.

Il faut donc faire une supposition contraire, c'est-à-dire placer la rencontre en quelque point tel que R', au delà de C. Alors, en posant CR' $= x$, l'équation à résoudre sera

$$\frac{110+x}{10} = \frac{50+x}{6}.$$

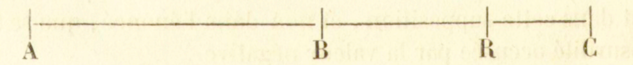
Mais aucun calcul nouveau n'est nécessaire. En effet, cette équation n'est autre que l'équation [4], où l'on aurait mis $-x$ au lieu de x; donc, puisque celle-ci est satisfaite par la valeur $x=-40$, l'équation ci-dessus doit l'être par la valeur positive $x=40$. De cette manière on apprend que la rencontre a véritablement lieu au delà du point C, à la distance de 40 kilom.

Il suit de là que l'équation [4] donnera toujours la solution du problème, pourvu qu'on regarde la valeur négative de x comme devant être portée à droite du point C, c'est-à-dire du côté opposé à celui où on l'avait supposée située.

104. L'exemple que je viens de traiter, montre clairement qu'une valeur négative de l'inconnue peut aussi, dans certains cas, provenir d'une fausse supposition qui a été faite pour arriver à l'équation du problème. Et en même temps on doit soigneusement remarquer que non-seulement le signe $-$, qui se trouve devant la valeur de l'inconnue, indique de quelle manière l'erreur doit être rectifiée, mais encore que la valeur de cette inconnue, en faisant abstraction du signe, donne la vraie solution du problème.

Remarque. On aurait pu résoudre le dernier problème en prenant la distance BR pour inconnue; et ensuite, pour connaître la distance du point C au point de rencontre, on aurait retranché BR de BC. Alors on voit bien que si le reste est négatif, c'est que la rencontre a eu lieu en un point R′ situé au delà de C, et à une distance CR′ précisément égale à ce reste pris positivement.

105. PROBLÈME. *Deux courriers sont partis en même temps de deux villes différentes et parcourent la même ligne. On connaît la distance des deux villes, ainsi que la vitesse de chaque courrier, c'est-à-dire le nombre de kilomètres que chacun d'eux fait en une heure. On demande en quel point de la route ils se joindront.*



Ainsi conçue en termes généraux, la question présente deux cas distincts : celui où les courriers vont dans le même sens, et celui où ils vont à la rencontre l'un de l'autre.

Premier cas. Je suppose que les deux courriers tendent vers le point C, situé au delà du point B par rapport au point A, et que R

soit le point où ils se joignent. Je nommerai

d la distance des points de départ A et B,
m la vitesse du courrier parti du point A,
n la vitesse du courrier parti du point B,
x la distance inconnue AR, parcourue par le premier courrier au moment où il atteint l'autre.

Cela posé, le chemin BR fait par le second courrier sera AR — AB ou $x-d$. En divisant x par m on aura le temps que le premier courrier emploie à faire le chemin AR; et en divisant $x-d$ par n, on aura le temps employé par le second courrier à faire le chemin BR. Ces chemins doivent être parcourus dans le même temps; donc on a

$$[5] \qquad \frac{x}{m}=\frac{x-d}{n}.$$

De là on tire

$$nx=mx-md,$$
$$mx-nx=md,$$
$$x=\frac{md}{m-n}.$$

Deuxième cas. Je suppose que les deux courriers aillent à la rencontre l'un de l'autre, et que leur jonction ait lieu au point R situé entre A et B, A————————R——————B; en conservant les mêmes dénominations que tout à l'heure, l'égalité entre les temps employés par les courriers pour faire, l'un le chemin AR, et l'autre le chemin BR, sera

$$[6] \qquad \frac{x}{m}=\frac{d-x}{n}.$$

Cette équation n'est autre que l'équation [5] dans laquelle on aurait remplacé n par $-n$; car alors le second membre devient $\frac{x-d}{-n}$ ce qui est la même chose que $\frac{d-x}{n}$. De là on conclut que l'équation [5] suffira pour résoudre les deux cas du problème, pourvu que l'on convienne de regarder la vitesse du courrier parti du point B comme changeant de signe quand la direction de ce courrier vient à changer.

106. Par la question qui vient d'être traitée, on voit que les quantités négatives peuvent servir à renfermer dans une seule équation, et par conséquent aussi dans une seule formule, plu-

sieurs cas d'une même question, dont chacun semblerait, au premier aperçu, exiger une solution distincte.

C'est là aussi ce qui fait que ces quantités sont d'un usage presque continuel dans toutes les branches des mathématiques. Il n'est pas possible de caractériser avec précision les questions dans lesquelles la solution d'un seul cas peut s'étendre ainsi à plusieurs autres, par de simples changements de signes; cependant on doit comprendre dès à présent que cette extension a lieu surtout dans les questions générales, où il faut considérer plusieurs cas qui ne diffèrent entre eux que par l'acception de certaines quantités, lesquelles sont additives pour quelques cas, et soustractives pour les autres. Ainsi, la même lettre sera regardée comme représentant une quantité positive ou négative, selon qu'elle désignera un gain ou une perte, une vitesse dans un sens ou une vitesse de sens contraire, une distance située à droite d'un point, ou une distance située à gauche, etc.

107. Les remarques auxquelles ont donné lieu les trois problèmes qu'on vient de traiter, s'appliquent à toute espèce de question, quels que soient le nombre des inconnues et le degré des équations. Elles se résument comme il suit :

1° La valeur négative d'une inconnue peut indiquer quelquefois une condition impossible dans l'énoncé d'un problème. Alors il suffit de donner, dans cet énoncé, à quelques quantités des acceptions contraires, pour faire cesser toute impossibilité; et la valeur négative qui a été trouvée d'abord, étant prise positivement, donnera la solution de la question ainsi rectifiée (**102**).

2° La valeur négative de l'inconnue peut aussi indiquer, non une absurdité, mais une supposition erronée; et, dans ce cas, elle donne toujours la solution du problème, pourvu qu'on prenne la quantité qu'elle représente dans un sens contraire à celui qu'on lui a d'abord attribué (**104**).

3° Enfin, en considérant certaines quantités comme positives ou négatives, selon qu'on les envisage sous certaines acceptions, ou sous des acceptions contraires, on peut réunir en une seule équation ou en une seule formule les différents cas d'une même question (**106**).

108. Après ces remarques, le lecteur traitera lui-même sans difficulté la question suivante :

PROBLÈME. *Un aubergiste fait avec un chasseur ce marché : Tous*

les jours où le chasseur apportera une pièce de gibier, il recevra de l'aubergiste une somme a; *mais il lui rendra une somme* b *tous les jours où il n'en apportera point. Après un nombre* n *de jours, il peut arriver que l'aubergiste et le chasseur ne se doivent rien, ou que le premier doive au second, ou le second au premier, une somme* c. *Trouver une formule qui fasse connaître dans les trois cas le nombre de jours où le chasseur a apporté du gibier.* Réponse : $x = \frac{bn + c}{a + b}$.

Cas d'impossibilité et d'indétermination dans les équations et dans les problèmes du 1er degré.

109. Problème. *Trouver un nombre dont le tiers augmenté de* 75, *et les cinq douzièmes diminués de* 35, *fassent autant que ses trois quarts ajoutés à* 49.

On voit immédiatement que l'équation du problème est

$$[1] \qquad \frac{x}{3} + 75 + \frac{5x}{12} - 35 = \frac{3x}{4} + 49.$$

En transposant les termes convenablement et en chassant les dénominateurs, il vient

$$\frac{x}{3} + \frac{5x}{12} - \frac{3x}{4} = 9,$$

$$4x + 5x - 9x = 108,$$

$$0 = 108.$$

Ici l'on parvient à une absurdité évidente, $0 = 108$. Il n'y a donc aucune valeur de x qui puisse vérifier l'équation [1], et par suite il n'en existe pas non plus qui satisfasse à la question. C'est pourquoi l'on applique alors la dénomination d'*absurde* ou d'*impossible* à l'équation et à la question.

L'impossibilité peut se rendre sensible sur l'équation [1], en faisant, dans son 1er membre, la réduction des termes semblables. Par là elle devient

$$\frac{3x}{4} + 40 = \frac{3x}{4} + 49;$$

et dès lors il est évident que les deux membres auront toujours entre eux une différence de 9 unités, quelque valeur qu'on mette à la place de x.

Cette impossibilité est bien différente de celle qui avait lieu

dans le n° **101**. Si alors le problème était impossible, ce n'était point parce qu'il n'existait aucune quantité qui pût se prêter aux vérifications de calcul exigées par l'énoncé, mais bien parce que la valeur de x était négative, et que l'énoncé repoussait toute valeur de cette espèce. Dans le problème qui vient de nous occuper, l'impossibilité est *absolue,* c'est-à-dire qu'aucune quantité, de quelque nature qu'elle soit, ne peut donner l'égalité établie dans son énoncé.

110. PROBLÈME. *Trouver un nombre tel qu'en ajoutant la moitié de ce nombre augmenté de* 10, *les* $\frac{2}{3}$ *de ce même nombre augmenté de* 20, *et encore les* $\frac{5}{6}$ *de ce nombre diminué de* 34, *on ait une somme égale à deux fois l'excès de ce nombre sur* 5.

Ici l'équation du problème est

$$[2] \qquad \frac{x+10}{2}+\frac{2(x+20)}{3}+\frac{5(x-34)}{6}=2(x-5).$$

En chassant les dénominateurs, réduisant et transposant, il vient

$$3x+30+4x+80+5x-170=12x-60,$$
$$3x+4x+5x-12x=170-30-80-60,$$
$$0=0.$$

Comme on arrive à deux membres qui sont identiques, on en conclut que l'inconnue x doit rester tout à fait indéterminée : c'est-à-dire qu'on peut prendre x égal à 2, ou à 3, ou à tel autre nombre qu'on voudra.

Et en effet, si on remonte à l'équation [2], et si l'on effectue les calculs indiqués dans son 1er membre, on trouve qu'il équivaut à $\frac{3x+30+4x+80+5x-170}{6}$, ou, en réduisant à $\frac{12x-60}{6}$, ou bien encore, en simplifiant, à $2x-10$. Ce résultat étant précisément égal au 2e membre $2(x-5)$, il s'ensuit que l'équation [2] n'est autre chose qu'une véritable égalité, qui a lieu quel que soit x. Dans tous les cas analogues, l'équation et la question sont dites *indéterminées.*

111. PROBLÈME. *Avez-vous abattu beaucoup de pièces de gibier? demande-t-on à un chasseur. Celui-ci répond : Il faudrait en ajouter* 5 *au tiers de celles que j'ai tuées l'an passé, pour avoir la moitié de ce que j'ai tué cette année ; mais si, du triple de cette dernière moitié, vous ôtez* 5, *vous aurez juste ce que j'ai tué l'an passé. Combien le chasseur a-t-il abattu de gibier chaque année?*

En nommant x le nombre de pièces tuées cette année, et y celui des pièces tuées l'année précédente, on a les équations

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}+5,\quad y=\frac{3x}{2}-5.$$

En mettant dans la 1re la valeur de y donnée par la 2e, il vient

$$\frac{x}{2}=\frac{x}{2}-\frac{5}{3}+5,$$
$$3x-3x=30-10,$$
$$0=20:$$

égalité absurde, de laquelle on conclut qu'il n'existe pas de valeurs de x et y qui satisfassent aux deux équations. Par conséquent le problème renferme des conditions impossibles à remplir.

On peut d'ailleurs rendre l'impossibilité sensible sur les équations mêmes : car, en chassant les dénominateurs et transposant, elles deviennent

$$3x-2y=30,\quad 3x-2y=10;$$

et alors on voit que les deux premiers membres sont les mêmes, tandis que les seconds sont des nombres différents.

Remarquez bien que chacune des deux équations, si on la prend isolément, est possible, et que même elle admet une infinité de solutions. L'impossibilité consiste donc en ce que les deux équations ne peuvent avoir aucune solution commune, ou, ce qui est la même chose, en ce que les deux conditions du problème ne peuvent jamais avoir lieu ensemble. C'est pourquoi l'on dit de ces conditions, et aussi des équations qui les expriment, qu'elles sont *contradictoires* ou *incompatibles*.

112. Supposons que la première condition du problème restant la même, on change seulement la seconde, et qu'on y remplace le nombre 5 par 15. Alors les équations du problème seraient

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}+5,\qquad y=\frac{3x}{2}-15;$$

et, en mettant dans la 1re la valeur de y donnée par la 2e, il vient

$$\frac{x}{2}=\frac{x}{2}-5+5,\qquad \text{d'où}\quad 0=0.$$

De là on conclut qu'on peut attribuer à x telle valeur qu'on voudra, et qu'en lui adjoignant la valeur correspondante de y, déduite de l'une des deux équations, on satisfera toujours à l'autre.

On rendra ceci évident sur les équations mêmes en chassant les dénominateurs et en transposant les termes : car on les ramène ainsi toutes deux à l'équation unique $3x-2y=30$, ce qui prouve que les deux conditions indiquées dans l'énoncé ne sont différentes qu'en apparence. Alors les deux équations, aussi bien que la question dont elles sont la traduction, sont *indéterminées*, attendu qu'on peut y satisfaire d'une infinité de manières.

113. J'ai énoncé comme règle générale, n° **90**, que des équations du 1er degré, en nombre égal aux inconnues, déterminent un système de valeurs pour ces inconnues, et n'en déterminent qu'un seul. Mais en même temps j'ai prévenu que cette règle était sujette à quelques exceptions. Les exemples précédents ont montré en effet qu'il pouvait y avoir dans les équations *impossibilité* ou *indétermination*. De plus, je vais montrer que dans tous les cas où il y aura exception, ce sera toujours l'*impossibilité* ou l'*indétermination* qu'on devra rencontrer.

Par les procédés de calcul, qui servent à effectuer les éliminations, il est clair qu'il ne peut arriver que trois cas :

1° On peut parvenir à une équation unique du 1er degré à une seule inconnue. Dans ce cas, qui est le plus ordinaire, on détermine pour l'inconnue restante une valeur unique, puis en remontant aux équations précédentes, on détermine aussi une valeur unique pour chacune des autres inconnues.

2° On peut trouver, dans le cours des opérations, une équation dans laquelle les termes inconnus se détruisent entre eux, et où les deux membres soient des quantités données différentes l'une de l'autre. Il y a alors absurdité évidente, et l'on doit conclure que quelques valeurs qu'on attribue aux inconnues (je suppose qu'il y en ait plusieurs), on ne pourra point satisfaire aux équations primitives, ni par conséquent à la question dont elles dérivent.

3° Si aucun de ces deux cas n'a lieu, on doit trouver une ou plusieurs équations dans lesquelles les inconnues disparaissent, et dont les deux membres soient égaux à la même quantité. On reconnaît alors qu'on peut donner à ces inconnues telles valeurs qu'on voudra, et qu'ensuite, au moyen de ces valeurs, on pourra calculer les autres inconnues. Il y a donc ici une véritable *indétermination* dans les équations primitives, et par conséquent aussi dans le problème dont elles expriment les conditions.

114. Quand on ne considère que deux équations à deux incon-

nues, si on arrive à une égalité absurde, comme il est évident que chaque équation prise séparément est possible, on doit conclure, comme au n° **111**, que les deux équations sont contradictoires ou incompatibles; et, si on arrive à une égalité évidente, on conclut que l'une des équations est toujours vérifiée quand l'autre l'est, ce qui revient à dire qu'elle en est une conséquence.

Mais quand on a plus de deux équations (cependant toujours en nombre égal aux inconnues), l'impossibilité et l'indétermination peuvent tenir à des causes plus variées. Par exemple, lorsqu'on a trois équations à trois inconnues, il y aura impossibilité si une équation est incompatible avec chacune des deux autres, ou bien seulement avec leur ensemble sans l'être avec aucune d'elles séparément. Et pareillement il y aura indétermination, si une équation est une conséquence de l'une des deux autres, ou si deux équations sont des conséquences de la troisième, ou encore si l'une des équations est une conséquence de l'ensemble des deux autres, sans l'être d'aucune d'elles prise séparément.

En général, quand on voudra savoir *si une équation est incompatible* avec l'ensemble de plusieurs équations, ou bien *si elle en est une conséquence,* on considérera dans ces équations des inconnues en nombre égal à ces équations, on en tirera les valeurs de ces inconnues en fonction des autres inconnues, puis on substituera ces valeurs dans la première équation. Si alors on tombe sur une égalité absurde, la première équation sera incompatible avec le système des autres équations; et au contraire elle en sera une conséquence, si on tombe sur une égalité identique.

115. Voici deux exemples sur lesquels le lecteur peut s'exercer:

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y-6z-6u=7,\\ 2x+y-4z-2u=15,\\ 4x-y-5z+5u=30,\\ 5x+10y-22z-20u=39. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+3y-6z-6u=8,\\ 2x+5y-10z-9u=12,\\ 2x+4y-8z-9u=14,\\ 5x+12y-24z-24u=34. \end{array}\right.$$

Le premier exemple conduit à une absurdité, et l'on reconnaîtra qu'en effet la 4e équation est incompatible avec l'ensemble des deux premières.

Le second exemple conduit à une identité, et il sera facile de reconnaître que la 4e équation est une conséquence des trois autres prises ensemble, tandis qu'elle ne l'est d'aucune d'elles prise isolément, ni même de la réunion de deux quelconques d'entre

elles. Pour satisfaire à ces équations, on trouve $u = -2, x = 2$, $y = 2z - 2$; l'inconnue z reste arbitraire.

116. Je terminerai cet article en remarquant que les cas d'impossibilité dont j'ai parlé sont bien les seuls qui puissent se présenter dans les équations, mais que dans les problèmes il peut y en avoir beaucoup d'autres. Par exemple, il se pourra que d'après l'énoncé du problème une inconnue doive être un nombre entier, et qu'on trouve une fraction; ou bien qu'elle doive être moindre qu'un certain nombre, et qu'on trouve une valeur plus grande, etc.

En général, l'énoncé d'un problème peut imposer à une inconnue, ou à plusieurs, des restrictions qu'il est impossible d'exprimer par des équations; et, dans ces cas, après qu'on a trouvé les valeurs des inconnues, il reste encore à vérifier si elles satisfont à toutes ces restrictions. C'est ainsi que, dans le problème III, p. 68, quelques conditions n'ont pas été introduites dans l'équation, et que nous avons dû reconnaître à la fin si elles étaient remplies par la solution déduite de cette équation.

Discussion des problèmes.

117. Lorsqu'on a résolu un problème dans lequel les quantités données sont représentées par des lettres, la valeur de l'inconnue (je suppose, pour fixer les idées, qu'il n'y en a qu'une) est exprimée par une formule qui indique les opérations à exécuter sur les données. Or, on peut concevoir que ces données reçoivent toutes les valeurs possibles, et examiner s'il en résulte quelques cas qui offrent des particularités remarquables : c'est là ce qui s'appelle *discuter* le problème. L'exemple suivant montrera comment on doit se diriger dans ces discussions.

118. PROBLÈME. *Deux mobiles* M *et* M′ *se meuvent uniformément sur la droite indéfinie* XY, *avec des vitesses données* a *et* b, *tous deux dans la direction* XY. *On sait que le mobile* M *est arrivé au point* A *un certain nombre d'heures* h *avant que le mobile* M′ *soit parvenu en* B, *et l'on connaît la distance* d *des points* A *et* B. *On demande en quel point de la droite* XY *se fait la rencontre des deux mobiles.*

M M′
X R′ A R″ B R Y

Supposons que la rencontre soit en R du côté BY ; je nommerai x la distance inconnue BR. La distance AR sera $d+x$, et les temps employés par les mobiles M et M′, pour parcourir respectivement les distances AR et BR, seront $\frac{d+x}{a}$ et $\frac{x}{b}$. Or, d'après l'énoncé, le mobile M est arrivé en A, un nombre h d'heures avant que M′ fût parvenu en B ; donc le premier temps doit surpasser le second de la quantité h, et par conséquent on a l'équation

[1] $$\frac{d+x}{a}-\frac{x}{b}=h.$$

De là on tire facilement

$$bd+bx-ax=abh,$$

$$ax-bx=b(d-ah),$$

[2] $$x=\frac{b(d-ah)}{a-b}.$$

Discussion. Il peut se faire que la rencontre des mobiles ait lieu après ou avant le point B, et la solution ci-dessus a été établie comme si c'était le premier cas qui dût avoir lieu. Mais en interprétant les résultats conformément aux remarques résumées dans le nº **107**, on va voir qu'elle a toute la généralité désirable.

1° Le numérateur et le dénominateur de x seront tous deux positifs lorsqu'on aura à la fois

$$a>b \quad \text{et} \quad d>ah.$$

Alors la valeur de x est positive, par conséquent il y a véritablement rencontre des mobiles du côté BY, ainsi qu'on l'a supposé. Cette conclusion est conforme à celle qui se tire immédiatement de la question elle-même. En effet, observons que ah est le chemin parcouru par le mobile M pendant le temps h, qui s'écoule entre l'arrivée de ce mobile au point A et celle de M′ au point B. Ainsi, supposer $a>b$ et $d>ah$, c'est admettre que le mobile M va plus vite que M′, et qu'il n'est pas encore en B quand M′ y arrive ; donc il devra atteindre M′ du coté BY. Quand on a à la fois

$$a<b \quad \text{et} \quad d<ah,$$

la valeur de x est encore positive, par conséquent les mobiles se rencontrent encore du côté BY. Et en effet, il est clair qu'alors le mobile M a un mouvement moins rapide que M′, et qu'il a dépassé le point B quand M′ y arrive. Il ne peut donc pas manquer d'être atteint par lui du côté BY.

2° Quand on a à la fois

$$a < b \quad \text{et} \quad d > ah, \quad \text{ou} \quad a > b \quad \text{et} \quad d < ah,$$

la valeur de x est négative. Cette circonstance indique que la rencontre des mobiles a eu lieu du côté opposé à celui où on l'avait placée, c'est-à-dire qu'elle se fait du côté BX, et à la distance marquée par la valeur de x, abstraction faite du signe (**107**, 2°).

En remontant à la question, comme on l'a fait tout à l'heure, on aperçoit facilement ici qu'au moment où M' arrive en B, celui des deux mobiles qui a la plus grande vitesse se trouve alors devant l'autre. Aucune rencontre ne peut donc avoir lieu du côté BY, et il est évident au contraire que les deux mobiles ont dû se rencontrer du côté BX.

Que si on veut démontrer la justesse de l'interprétation donnée à la valeur négative, on le fera comme il suit. D'abord, comme on a supposé que les mobiles devaient se rencontrer du côté BY, la valeur négative prouve seulement que cette supposition est inadmissible. Mais il est possible que la rencontre ait lieu du côté BX, soit avant le point A, soit dans l'intervalle AB.

Si la rencontre a eu lieu en R' avant le point A, en faisant l'inconnue $BR' = x$, les temps employés par le mobile M pour venir de R' en A, et par le mobile M' pour venir de R' en B, seront $\frac{x-d}{a}$ et $\frac{x}{b}$. Le temps écoulé entre l'arrivée de M au point A et celle de M' au point B sera donc la différence $\frac{x}{b} - \frac{x-d}{a}$; et comme l'énoncé exige que ce temps soit égal à h, on aura l'équation

$$[3] \qquad \frac{x}{b} - \frac{x-d}{a} = h.$$

Si la rencontre a eu lieu en R'', dans l'intervalle AB, et qu'on fasse toujours l'inconnue $BR'' = x$, le temps employé par le mobile M pour aller de A en R'' sera $\frac{d-x}{a}$, et celui qu'emploie le mobile M' pour aller de R'' en B sera $\frac{x}{b}$; donc le temps écoulé entre l'arrivée du mobile M au point A et celle de M' au point B sera $\frac{d-x}{a} + \frac{x}{b}$, et l'on aura l'équation

$$[4] \qquad \frac{d-x}{a} + \frac{x}{b} = h.$$

Maintenant remarquons que les éq. [3] et [4] étant exactement les mêmes, la dernière devra déterminer le point de rencontre, quelle que soit sa position dans la région BX. Remarquons encore que l'éq. [1] devient l'éq. [4] en y changeant x en $-x$; et de là on conclura que toute valeur positive qui satisfait à la dernière sera donnée, mais avec le signe —, par la première.

Ainsi l'équation [1] suffit à elle seule pour déterminer dans tous les cas les points de rencontre des mobiles, en ayant soin de porter les valeurs négatives de x à gauche du point B.

3° Supposons qu'on ait $b=a$ sans avoir $d=ah$. La valeur de x devient

$$x=\frac{a(d-ah)}{0},$$

ou, plus simplement, en posant $a(d-ah)=m$,

$$x=\frac{m}{0}.$$

Que signifie une pareille expression? Pour l'interpréter, imaginons qu'au lieu de 0 on donne à m des diviseurs de plus en plus petits, par exemple, $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$ les quotients seraient m, $10m$, $100m, \ldots$ et iraient en croissant de telle sorte qu'on ne conçoit aucune quantité, quelque grande qu'elle soit, qu'on ne puisse surpasser en prenant un diviseur assez petit. C'est là ce qu'on exprime en disant que le quotient d'une quantité divisée par zéro est *infini*. On indique l'infini par le signe ∞.

L'expression $\frac{m}{0}$, considérée en elle-même, montre donc qu'il n'existe aucune distance assez considérable pour représenter celle à laquelle les mobiles doivent se rencontrer, ce qui équivaut évidemment à dire qu'ils ne se rencontrent pas.

Et, en effet, de ce que d est différent de ah, il s'ensuit que le mobile M ne se trouve pas au point B en même temps que le mobile M'; et de ce que $b=a$, il s'ensuit que les deux mobiles ont la même vitesse : donc ils doivent toujours être à la même distance l'un de l'autre; donc aucune rencontre n'est possible.

4° Supposons en même temps $b=a$ et $d=ah$. Il viendra

$$x=\frac{0}{0},$$

et l'interprétation immédiate de cette expression sera facile. Comme dans toute division le produit du quotient multiplié par

le diviseur doit reproduire le dividende, il faut ici que le quotient soit tel qu'en le multipliant par zéro on trouve zéro; donc on peut prendre ce quotient égal à tel nombre qu'on voudra : c'est ce qu'on exprime en d'autres termes, en disant que $\frac{0}{0}$ représente une grandeur *indéterminée*.

De cette explication on doit conclure que les mobiles ne sont jamais séparés. Et, en effet, puisqu'on suppose $b = a$ et $d = ah$, les mobiles ont la même vitesse, et se trouvent ensemble au point B; donc ils ont toujours dû être ensemble et doivent toujours rester ensemble.

Les autres particularités qu'on pourrait remarquer sont trop minutieuses pour s'y arrêter. Je terminerai donc cette discussion en observant que les principes établis n° **106** permettent d'étendre la formule [2] aux problèmes dont les énoncés ne diffèrent de celui qui a donné cette formule que par l'acception de quelques quantités. Ainsi, on pourra supposer que le mobile M' aille dans le sens YX, et alors il faudra changer b en $-b$ dans la formule. Si c'est le mobile M qui change de direction, on changera a en $-a$; et si M et M' changent tous deux de direction, on changera à la fois a en $-a$ et b en $-b$. Enfin, si l'arrivée du mobile M au point A, au lieu de précéder celle de M' au point B, n'avait lieu qu'après, on changerait h en $-h$.

Ces conséquences sont bien propres à faire ressortir toute l'importance des quantités négatives; et, pour cette raison, je conseille au lecteur de chercher par lui-même à les mettre en évidence, en suivant la marche tracée dans le n° **105**.

Sur les symboles $\frac{m}{0}$ et $\frac{0}{0}$. — Remarques sur les équations dans lesquelles il y a des dénominateurs qui contiennent l'inconnue.

119. Les symboles $\frac{m}{0}$ et $\frac{0}{0}$, qui se sont présentés dans la discussion précédente (3° et 4°), méritent de fixer l'attention.

Lorsque dans les équations il y a des quantités données représentées par des lettres, et qu'on a tiré de ces équations les formules qui expriment les inconnues, si l'on fait des hypothèses sur ces lettres et qu'on les introduise dans les formules, on doit obtenir pour les inconnues des valeurs particulières correspondantes à ces hypothèses. Or, il peut arriver que ces hypothèses fassent tomber les équations dans un cas d'*impossibilité* ou d'*in-*

détermination, et alors il est facile de s'assurer qu'une des formules au moins deviendra $\frac{m}{0}$ ou $\frac{0}{0}$.

Concevons que les hypothèses soient introduites dans les équations elles-mêmes, et qu'alors on répète les calculs faits pour parvenir aux formules générales. Si les équations tombent dans un cas d'impossibilité, il faudra qu'en cherchant une inconnue, l'élimination conduise à une équation absurde, dans laquelle cette inconnue ne se trouvera plus, et dont les deux membres seront des quantités différentes. Supposons que cette équation, avant les hypothèses, soit

$$Px = Q,$$

P et Q représentant des expressions littérales composées de quantités données : la valeur générale de x sera

$$x = \frac{Q}{P}.$$

Or, dans les hypothèses qui amènent l'impossibilité, il faut que x disparaisse de l'équation $Px = Q$, et que les deux membres renferment des quantités inégales; donc P doit être zéro sans que Q le soit; donc en désignant par m ce que devient Q, la valeur générale de x doit donner $x = \frac{m}{0}$.

Maintenant supposons que les hypothèses doivent amener un cas d'indétermination. Les calculs d'élimination, au lieu de conduire à une équation d'où l'on puisse tirer la valeur d'une inconnue, doivent donner une équation dont les deux membres soient identiques. Donc, si avant les hypothèses cette équation est $Px = Q$, il faudra, après les hypothèses, que P et Q soient tous deux zéro; donc la valeur générale de x se réduira à $x = \frac{0}{0}$.

Il peut se faire qu'il y ait plusieurs inconnues dont les expressions deviennent $\frac{m}{0}$ ou $\frac{0}{0}$. Ce qui précède montre seulement qu'il doit y en avoir au moins une qui devienne $\frac{m}{0}$ dans les cas d'impossibilité, et $\frac{0}{0}$ dans les cas d'indétermination.

120. On a vu, n° **118** (3°), que l'expression $\frac{m}{0}$ doit être considérée comme représentant une valeur infinie. Ici j'ajouterai que cette valeur infinie peut être quelquefois positive, quelquefois négative, et quelquefois indifféremment positive ou négative.

1° Soit la formule $x = \frac{m}{(n-z)^2}$, dans laquelle m et n sont deux nombres invariables qu'on suppose positifs et différents de zéro,

tandis que z peut avoir toutes les valeurs possibles. En faisant $z=n$ il vient $x=\frac{m}{0}$. Mais comme le dénominateur $(n-z)^2$ est toujours positif quel que soit z, attendu que le carré de $n-z$ est toujours positif, on doit regarder ici l'expression $\frac{m}{0}$ comme désignant l'infini positif, et l'on écrira $x=+\infty$.

2° Avec des raisonnements analogues, on voit que si on a la formule $x=\frac{-m}{(n-z)^2}$, et qu'on y fasse encore $z=n$, on devra avoir l'infini négatif $x=-\infty$.

3° Soit la formule $x=\frac{m}{n-z}$. L'hypothèse $z=n$ donne encore $x=\frac{m}{0}$, mais ici l'infini aura un signe ambigu. Supposons d'abord $z<n$ et faisons croître z, la formule donnera des valeurs croissantes qui seront toutes positives. Au contraire, en prenant $z>n$, puis diminuant z jusqu'à le rendre égal à n, la formule donne des valeurs croissantes qui sont toutes négatives. Il suit de là que la valeur infinie, correspondante à $z=n$, appartient également à une suite de quantités positives croissantes, et à une suite de quantités négatives croissantes. Pour cette raison l'hypothèse $z=n$ doit être considérée comme faisant prendre à la formule deux valeurs infinies, l'une positive et l'autre négative. C'est ce qu'on indique d'une manière abrégée en écrivant $x=\pm\infty$.

121. Lorsqu'une formule fractionnaire renferme un dénominateur qui peut devenir infini sans que le numérateur le soit, il est clair qu'à cette limite la valeur numérique de la fraction doit être moindre que toute quantité, quelque petite qu'elle soit, ce qui revient à dire qu'elle est égale à zéro. Ainsi, le numérateur étant désigné par m, on aura $\frac{m}{\infty}=0$.

122. Lorsqu'une quantité va en décroissant jusqu'à zéro, sans changer de signe, on pourrait conserver la trace du signe, en le laissant subsister devant la limite *zéro*. Alors on aurait

$$\frac{m}{+0}=+\infty,\qquad \frac{m}{-0}=-\infty,$$
$$\frac{m}{+\infty}=+0,\qquad \frac{m}{-\infty}=-0.$$

123. Il y a aussi plusieurs observations à faire sur le symbole $\frac{0}{0}$. Le raisonnement du n° **118** (4°) prouve qu'en le considérant en lui-même il représente une quantité tout à fait *indéterminée*. Mais

l'indétermination peut encore se montrer sous d'autres formes. En effet, par les règles du calcul, on a

$$P \times \frac{1}{Q} = \frac{P}{Q}, \qquad \text{et} \qquad \frac{\frac{1}{Q}}{\frac{1}{P}} = \frac{P}{Q}.$$

Or, quand P et Q deviennent zéro, les quantités $\frac{1}{P}$ et $\frac{1}{Q}$ deviennent infinies; donc les expressions

$$0 \times \infty \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

doivent recevoir la même interprétation que $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire qu'elles sont aussi des symboles d'indétermination.

124. Il y a cependant des cas où l'expression $\frac{0}{0}$ est considérée sous un autre point de vue. Soit la formule

[1] $$x = \frac{3(z^2 - 4)}{z(z-2)}.$$

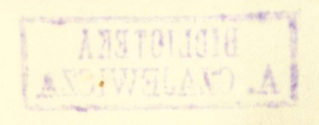
Si on suppose $z = 2$, il vient $x = \frac{0}{0}$; et, d'après ce qui précède, cette valeur devrait être indéterminée. Mais si, avant de faire $z = 2$, on simplifie la fraction, en ôtant le facteur $z - 2$, commun à ses deux termes, on a

[2] $$x = \frac{3(z+2)}{z};$$

et alors en faisant $z = 2$ on trouve $x = 6$, qui est la vraie valeur correspondante à cette hypothèse.

Pour bien comprendre ceci, au lieu de supposer tout d'abord $z = 2$, imaginons que $z - 2$ diminue graduellement. La formule [1] donnera pour x différentes valeurs, toutes déterminées et égales à celles que donnerait la formule [2]. Ces valeurs peuvent donc être regardées comme tendant graduellement vers la valeur 6; et, par cette raison, on regarde la valeur $x = 6$ comme étant celle qui répond à l'hypothèse $z = 2$. Mais comme l'indétermination qui résulte de la première formule empêche de reconnaître cette valeur, c'est à la seconde qu'il faut recourir. De là cette règle:

Si, pour une certaine hypothèse, une expression fractionnaire devient $\frac{0}{0}$, on ne dira point qu'elle est indéterminée, mais on recherchera avec soin quel est le facteur commun à son numérateur et à son dénominateur qui, en devenant zéro, fait prendre à la fraction



la forme $\frac{0}{0}$, et dont la suppression laisse apercevoir la vraie valeur de cette fraction.

Appliquons cette règle aux trois fractions

$$\frac{3z^2-3}{2z-2},\quad \frac{z^2-2z+1}{3z^2-3},\quad \frac{3z^2-3}{z^2-2z+1},$$

qui deviennent $\frac{0}{0}$ par l'hypothèse $z=1$. On les écrira ainsi

$$\frac{3(z+1)(z-1)}{2(z-1)},\quad \frac{(z-1)^2}{3(z+1)(z-1)},\quad \frac{3(z+1)(z-1)}{(z-1)^2}.$$

On supprimera partout le facteur commun $z-1$; puis, en faisant $z=1$, on trouvera les valeurs 3, 0, $\pm\infty$.

125. Une fraction pouvant devenir zéro quand son numérateur est nul ou quand son dénominateur est infini, il s'ensuit que si une équation a des dénominateurs qui contiennent l'inconnue x, et qu'on la ramène à la forme fractionnaire

$$\frac{M}{N}=0,$$

il faudra, pour la résoudre complétement, chercher non-seulement les valeurs de x pour lesquelles on a $M=0$, mais encore celles qui donnent $N=\infty$.

Toutefois on devra considérer si, par ces valeurs, la fraction ne devient pas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$: car, si cela arrive, il se pourra que sa vraie valeur ne soit pas zéro, et alors l'équation ne sera pas satisfaite.

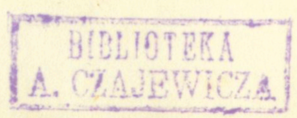
Dans l'exemple du n° **78**, l'équation a été ramenée à celle-ci

$$\frac{x+3}{1-x^2}=0;$$

et comme la valeur $x=-3$ rend le numérateur nul sans rendre nul le dénominateur, on a pu conclure que cette valeur satisfait véritablement à l'équation.

Mais quoique le dénominateur $1-x^2$ devienne infini en faisant $x=+\infty$ et $x=-\infty$, comme ces valeurs rendent aussi le numérateur infini, on tombe dans une indétermination apparente. Pour la faire disparaître, on met la fraction sous une forme où le numérateur ne devienne plus infini, ce qui se fera en divisant par x les deux termes de la fraction. De cette manière elle devient

$$\frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-x};$$



puis, en remarquant que les valeurs $x = +\infty$ et $x = -\infty$ rendent nulles $\frac{3}{x}$ et $\frac{1}{x}$, on voit qu'elle se réduit à $\frac{1}{-\infty}$ ou à $\frac{1}{+\infty}$; c'est-à-dire à zéro : donc les valeurs $x = +\infty$ et $x = -\infty$ conviennent à l'équation proposée.

Le plus ordinairement, quand on fait évanouir des dénominateurs qui contiennent l'inconnue, on ne tient aucun compte des valeurs infinies, parce qu'en effet elles ne conviennent presque jamais aux problèmes que les équations servent à résoudre : mais cette omission est toujours volontaire, et les explications que je viens de donner montrent assez comment elle doit être réparée.

CHAPITRE VI.

RÉSOLUTION DE PLUSIEURS ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU 1er DEGRÉ, EN NOMBRE ÉGAL AUX INCONNUES.

Formules générales. — Règles d'après lesquelles elles se composent.

126. Quelque diverses que puissent être des équations du 1er degré, on peut toujours les ramener à des formes générales qui permettent d'obtenir pour les inconnues des *formules* dans lesquelles sont compris tous les cas particuliers qui peuvent se présenter. Ce sont ces formules que je me propose de chercher maintenant. On pourrait y parvenir par les méthodes expliquées chapitre III; mais je me servirai préférablement de celle qui est connue sous le nom de *Méthode des indéterminées*, et qui a été employée par BEZOUT. Les considérations sur lesquelles elle repose méritent une grande attention, à cause des applications qu'elles reçoivent dans les recherches élevées de l'analyse.

Prenons d'abord deux équations entre deux inconnues x et y. Par des préparations convenables, on saura toujours les ramener à la forme

[1] $$ax + by = k,$$
$$a'x + b'y = k'.$$

Ici a, b, k, a', b', k', représentent des quantités connues qui peu-

vent être positives ou négatives. En mettant a', b', k', dans la seconde équation, pour désigner les quantités analogues aux quantités a, b, k, de la première, on se rappelle plus facilement la signification de toutes ces lettres.

Désignons par m une quantité tout à fait indéterminée, dont on pourra disposer comme on voudra, multiplions la 1re équation par m, et ensuite retranchons-en la seconde : il viendra

$$(am - a')x + (bm - b')y = km - k';$$

et comme la quantité m est arbitraire, on la choisira de manière qu'elle réduise à zéro le multiplicateur de l'inconnue qu'on veut éliminer.

Si c'est y qu'on fait disparaître, on posera $bm = b'$, d'où $m = \frac{b'}{b}$; l'équation ne contiendra plus y, et en y remplaçant m par cette valeur, on aura

$$x = \frac{\frac{kb'}{b} - k'}{\frac{ab'}{b} - a'} = \frac{kb' - bk'}{ab' - ba'}.$$

Mais si c'est x qu'on veut faire disparaître, il faudra poser $am = a'$, d'où $m = \frac{a'}{a}$; et l'équation donnera

$$y = \frac{\frac{ka'}{a} - k'}{\frac{ba'}{a} - b'} = \frac{ka' - ak'}{ba' - ab'}.$$

Les dénominateurs de x et de y sont égaux, mais de signes contraires. Pour les rendre tout à fait semblables, je changerai les signes du numérateur et du dénominateur de y, et alors les valeurs générales de x et de y seront

$$x = \frac{kb' - bk'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ak' - ka'}{ab' - ba'}.$$

Chacune d'elles peut immédiatement se déduire de l'autre. En effet, il est évident que les mêmes calculs qui font trouver x, doivent donner y en changeant partout a en b et b en a, sans d'ailleurs toucher aux accents. Donc, en effectuant ces changements dans la valeur de x, on doit trouver celle de y. Une remarque analogue s'applique aux cas que je traiterai tout à l'heure.

Si l'on veut vérifier ces valeurs, il suffit de les substituer dans les deux équations. Par exemple, en effectuant cette substitution dans la première, il vient

$$\frac{a(kb' - bk') + b(ak' - ka')}{ab' - ba'} = k,$$

$$\frac{(ab' - ba')k + (ab - ba)k'}{ab' - ba'} = k,$$

$$k = k.$$

127. Considérons maintenant trois équations générales entre trois inconnues. On peut les représenter ainsi

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k, \\ a'x + b'y + c'z &= k', \\ a''x + b''y + c''z &= k''. \end{aligned}$$

Après avoir multiplié la 1re par une indéterminée m, et la 2e par une indéterminée n, ajoutons-les; puis, de la somme, retranchons la 3e. Dans l'équation résultante, on pourra faire disparaître deux inconnues, en disposant des deux indéterminées de manière que les multiplicateurs de ces inconnues deviennent zéro; et ensuite on en tirera la valeur de l'inconnue restante. L'équation résultante dont il s'agit est

$$(am + a'n - a'')x + (bm + b'n - b'')y + (cm + c'n - c'')z$$
$$= km + k'n - k''.$$

Si on veut faire disparaître y et z, il faudra déterminer m et n par les deux équations

$$bm + b'n = b'', \quad cm + c'n = c'';$$

et l'on aura

$$x = \frac{km + k'n - k''}{am + a'n - a''}.$$

Les deux équations qui déterminent m et n se déduisent évidemment des deux équations générales traitées dans le numéro précédent, en y remplaçant

les lettres $x, y, a, b, k, a', b', k'$,
par $m, n, b, b', b'', c, c', c''$;

donc, pour avoir m et n, il suffit d'opérer les mêmes changements dans les formules qui terminent le numéro cité. De cette manière on a

$$m = \frac{c'b'' - b'c''}{bc' - cb'}, \quad n = \frac{bc'' - cb''}{bc' - cb'};$$

et en mettant ces valeurs de m et de n dans celle de x, il vient

$$x = \frac{k(c'b'' - b'c'') + k'(bc'' - cb'') - k''(bc' - cb')}{a(c'b'' - b'c'') + a'(bc'' - cb'') - a''(bc' - cb')}.$$

Pour trouver y on fera disparaître x et z en posant

$$am + a'n = a'', \qquad cm + c'n = c''.$$

La comparaison de ces deux équations avec celles du numéro précédent donne

$$m = \frac{c'a'' - a'c''}{ac' - ca'}, \quad n = \frac{ac'' - ca''}{ac' - ca'};$$

et par suite on trouve

$$y = \frac{k(c'a'' - a'c'') + k'(ac'' - ca'') - k''(ac' - ca')}{b(c'a'' - a'c'') + b'(ac'' - ca'') - b''(ac' - ca')}.$$

Enfin pour connaître z, on posera

$$am + a'n = a'', \qquad bm + b'n = b'';$$

de là on tirera

$$m = \frac{b'a'' - a'b''}{ab' - ba'}, \quad n = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'};$$

et par suite il viendra

$$z = \frac{k(b'a'' - a'b'') + k'(ab'' - ba'') - k''(ab' - ba')}{c(b'a'' - a'b'') + c'(ab'' - ba'') - c''(ab' - ba')}.$$

En effectuant les multiplications indiquées dans les valeurs de x, y, z, et en changeant les signes du numérateur et du dénominateur dans la première et dans la dernière, on pourra écrire ces trois valeurs comme il suit :

$$x = \frac{kb'c'' - kc'b'' + ck'b'' - bk'c'' + bc'k'' - cb'k''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$y = \frac{ak'c'' - ac'k'' + ca'k'' - ka'c'' + kc'a'' - ck'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$z = \frac{ab'k'' - ak'b'' + ka'b'' - ba'k'' + bk'a'' - kb'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Pour vérifier ces valeurs, il sera plus commode de les prendre telles qu'elles étaient d'abord, avant d'effectuer les multiplications. Si, par exemple, on fait les substitutions dans la première équation, et qu'on ait soin de changer les signes de la valeur de y,

afin d'avoir un même dénominateur pour les trois inconnues, il vient

$$\frac{\begin{array}{l}[a(c'b''-b'c'')-b(c'a''-a'c'')+c(b'a''-a'b'')]k\\+[a(bc''-cb'')-b(ac''-ca'')+c(ab''-ba'')]k'\\-[a(bc'-cb')-b(ac'-ca')+c(ab'-ba')]k''\end{array}}{a(c'b''-b'c'')+a'(bc''-cb'')-a''(bc'-cb')}=k.$$

Dans cette égalité on reconnaît, à la simple inspection, que les multiplicateurs de k' et de k'' se réduisent à zéro, et que celui de k n'est autre que le dénominateur même; donc l'égalité se réduit à $k=k$, et la vérification est opérée. Celle des deux autres équations se ferait d'une manière toute semblable.

Ces vérifications ne sont pas ici sans importance : car, pour arriver aux valeurs générales de x, y, z, on a employé des valeurs de m et n qui renferment des dénominateurs; et par conséquent on pourrait craindre que, dans les cas où ces dénominateurs deviendraient nuls, les valeurs de x, y, z, ne fussent en défaut. Mais la vérification écarte tous les doutes.

128. Considérons encore les quatre équations générales

$$\begin{array}{l}ax+by+cz+du=k,\\a'x+b'y+c'z+d'u=k',\\a''x+b''y+c''z+d''u=k'',\\a'''x+b'''y+c'''z+d'''u=k'''.\end{array}$$

En multipliant les trois premières par trois indéterminées m, n, p, puis les ajoutant, et retranchant la quatrième, on a une équation de laquelle on fera disparaître trois inconnues en égalant à zéro les multiplicateurs de ces inconnues. Il vient ainsi trois équations pour déterminer les valeurs de m, n, p; et alors au moyen de ces valeurs on aura celle de l'inconnue restante.

129. Ces calculs ne sauraient offrir aucune difficulté et peuvent s'étendre à tant d'équations qu'on voudra. Mais en observant avec attention la composition des formules trouvées précédemment pour deux ou pour trois équations, on a découvert des règles générales au moyen desquelles on peut obtenir sans calcul les formules qui conviennent à un nombre quelconque d'équations.

Première règle. Avec les deux lettres a et b formez les arrangements ab et ba, puis interposez le signe — entre eux, on aura

$$ab-ba.$$

S'il n'y avait que deux équations à résoudre, on mettrait un accent à la deuxième lettre de chaque terme, et le résultat $ab' - ba'$ serait le dénominateur commun des valeurs de x et de y.

S'il y a trois équations, on fera passer la troisième lettre c à toutes les places dans chaque terme de l'expression $ab - ba$. En ayant soin d'alterner les signes, ab donnera $abc - acb + cab$; de même $-ba$ donnera $-bac + bca - cba$: par conséquent il viendra

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba.$$

Alors on mettra un accent à la 2e lettre de chaque terme, et deux à la 3e : on aura ainsi le dénominateur commun de x, y, z.

S'il y a quatre équations, on prendra la lettre d, qui sert de coefficient à la quatrième inconnue u, et on la fera passer à toutes les places dans chaque terme du sextinome ci-dessus; on aura soin d'alterner les signes dans les termes fournis par chacun d'eux, en commençant par $+$ pour ceux qui viennent d'un terme précédé du signe $+$, et par $-$ pour ceux qui viennent d'un terme précédé du signe $-$; enfin on mettra un accent à la 2e lettre, deux à la 3e, et trois à la 4e. On aura ainsi le dénominateur commun des quatre inconnues x, y, z, u.

S'il y a un plus grand nombre d'équations, on continuera de la même manière.

Deuxième règle. Quel que soit le nombre des équations, les numérateurs des inconnues pourront se déduire de leur dénominateur commun; et, à cet effet, il suffira d'y remplacer, sans toucher aux accents, la lettre qui, dans les équations, sert de coefficient à l'inconnue qu'on veut trouver, par la lettre k qui représente le terme connu placé dans le second membre. Ainsi, on changera a en k pour avoir le numérateur de x; b en k pour avoir celui de y, etc.

Les deux règles que je viens d'exposer se vérifient sur les formules trouvées pour deux et pour trois équations; mais une démonstration est nécessaire pour prouver qu'elles s'étendent à tous les autres cas. Je vais rapporter, à quelques changements près, celle qu'a donnée LAPLACE, *Mémoires de l'Académie des Sciences, année* 1771.

Démonstration des règles précédentes.

130. Je supposerai qu'on ait n équations du 1er degré à n incon-

nues; et, suivant la notation employée jusqu'ici, je représenterai ces équations ainsi :

$$[1]\quad \begin{cases} ax + by + cz + du + \ldots = k, \\ a'x + b'y + c'z + d'u + \ldots = k', \\ a''x + b''y + c''z + d''u + \ldots = k'', \\ a'''x + b'''y + c'''z + d'''u + \ldots = k''', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les points placés après un terme tiennent lieu des termes qui doivent venir après lui; et pareillement les points écrits au-dessous de la 4e équation remplacent celles dont elle doit être suivie.

Je nommerai R la quantité qu'on forme d'après la première règle, dans le cas de ces équations; et je vais présenter à l'égard de cette fonction plusieurs remarques sur lesquelles repose la démonstration.

1° Par la manière même dont la fonction R est composée, il est évident que l'ensemble de ses termes, abstraction faite des signes et des accents, renferme les différents arrangements qu'on peut former avec les n lettres a, b, c, d,... qui servent de coefficients aux inconnues x, y, z, u..., en écrivant ces n lettres les unes à la suite des autres, et en les changeant d'ordre de toutes les manières possibles.

2° Il est évident aussi que dans chaque terme de R il y a une lettre sans accent, une lettre avec un accent, une lettre avec deux accents, et ainsi de suite.

3° Les termes affectés du signe $+$ sont ceux où, en comparant chaque lettre avec chacune de celles dont elle est suivie, on trouvera que les *inversions alphabétiques* sont en nombre pair; et les termes affectés du signe $-$ sont ceux où le nombre de ces inversions est impair. Par exemple, si un terme contenait quatre lettres rangées dans l'ordre *dacb*, comme il renferme trois inversions par rapport à d, et une par rapport à c, ce qui fait quatre inversions en tout, il devrait avoir le signe $+$.

Lorsqu'il n'y a que deux inconnues, la vérité de cette remarque est évidente : car alors, en faisant abstraction des accents, R est $ab - ba$. Si on fait passer la lettre c à toutes les places dans ab, le 1er terme abc n'aura point d'inversion, le 2e acb en aura une, et le 3e cab en aura deux : aussi le 1er est-il précédé de $+$, le 2e de $-$, et le 3e de $+$. Quant à $-ba$, le 1er terme qu'il fournira

n'aura pas plus d'inversions que ba, le 2e en aura une de plus, et le 3e en aura deux : aussi le 1er est-il précédé de $-$, le 2e de $+$, et le 3e de $-$. Si on fait encore passer la lettre d à toutes les places dans chacun des six termes qu'on vient de former, comme chacun de ceux-ci est composé des lettres a, b, c, qui précèdent d dans l'alphabet, on ne changera pas le nombre des inversions en mettant d à la fin d'un terme : aussi alors le signe reste-t-il le même. En avançant d d'un rang vers la gauche, il y aura une inversion de plus : aussi le signe change-t-il. En l'avançant encore d'une place, il s'introduit une nouvelle inversion, et il vient un nouveau changement de signe. Ainsi de suite.

4° Dans la fonction R, deux termes qui, abstraction faite des accents, ne diffèrent l'un de l'autre que par un simple échange entre deux lettres, doivent avoir des signes contraires. En effet, supposons que ces deux termes ne soient différents que par l'échange de a et c, tels que sont les termes $ad'b''c'''$ et $cd'b''a'''$: pour déduire le second du premier, on peut imaginer que la lettre a passe successivement après chacune des lettres qui la suivent pour venir se placer après c, et qu'alors la lettre c à son tour remonte successivement jusqu'à la place qu'occupait a. Par là l'échange des deux lettres a et c se trouvera effectué. Or, chaque déplacement successif amène évidemment une inversion de plus ou de moins, et par conséquent aussi un changement de signe ; d'un autre côté, la lettre qui descend doit parcourir une place de plus que celle qui remonte : donc, définitivement, les deux termes doivent être de signes contraires.

5° Si, dans la fonction R, l'on ajoute ou l'on supprime un égal nombre d'accents à toutes les lettres semblablement accentuées, la fonction R deviendra nulle d'elle-même. Pour fixer les idées, supposons qu'on remplace partout a', b', c',... par a''', b''', c''',... et que l'on considère en particulier le terme qui contient a' et c'''. Puisque tous les arrangements qu'on peut faire entre les n lettres a, b, c,... se trouvent dans R, il doit y en avoir un qui ne diffère de celui que nous considérons que par le changement de a' en c' et de c''' en a'''; donc, lorsque dans R on remplace a', b', c',... par a''', b''', c''',... ces deux termes deviennent égaux. Mais, en vertu de la remarque précédente, ils doivent avoir des signes contraires; donc ils se détruisent. Le même raisonnement s'applique à chaque terme de R; donc R doit devenir zéro.

Maintenant revenons aux équations [1]. Comme toutes les lettres a, b, c,... se trouvent dans chaque terme de R, et chacune avec un nombre différent d'accents, on pourra mettre R sous ces différentes formes

$$R = Aa + A'a' + A''a'' + \dots,$$
$$R = Bb + B'b' + B''b'' + \dots,$$
$$R = Cc + C'c' + C''c'' + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

A, A', A'',... désignant des quantités qui ne contiennent plus la lettre a; B, B', B'',... désignant des quantités qui ne contiennent plus la lettre b; C, C', C'',... désignant des quantités qui ne contiennent plus c; et ainsi de suite. Il résulte de là qu'en formant, d'après les règles énoncées, les valeurs de x, y, z, on devra avoir

$$x = \frac{Ak + A'k' + A''k'' + \dots}{R}, \quad y = \frac{Bk + B'k' + B''k'' + \dots}{R},$$
$$z = \frac{Ck + C'k' + C''k'' + \dots}{R}, \dots\dots$$

Toute la question se réduit donc à démontrer que ces valeurs satisfont aux éq. [1].

Substituons-les d'abord dans la première : elle devient

$$[2] \qquad \frac{Aa + Bb + Cc + \dots}{R}k + \frac{A'a + B'b + C'c + \dots}{R}k'$$
$$+ \frac{A''a + B''b + C''c + \dots}{R}k'' + \text{etc.} = k.$$

Observons que Aa contient tous les termes de R où se trouve le facteur a, que Bb contient tous ceux où se trouve b, que Cc contient tous ceux où se trouve c, etc., donc $R = Aa + Bb + Cc + \dots$ En répétant un semblable raisonnement, on reconnaît que la fonction R peut encore s'écrire sous ces différentes formes,

$$R = Aa \;\; + Bb \;\; + Cc \;\; + \dots,$$
$$R = A'a' + B'b' + C'c' + \dots,$$
$$R = A''a'' + B''b'' + C''c'' + \dots,$$
etc.

Cela posé, il est évident que, dans l'éq. [2], le premier numérateur est égal à R, et que les suivants ne sont autre chose que la quantité R où l'on aurait mis a, b, c,... à la place de a', b', c', ou de a'', b'', c''..., etc. Donc, en vertu de la 5ᵉ remarque, ces derniers

numérateurs sont nuls d'eux-mêmes; et par suite l'éq. [2] se réduit à $k=k$. Donc les valeurs de x, y, z,... satisfont à la 1re des éq. [1]. Il est clair que la même vérification a lieu sur les autres équations; et l'exactitude de ces valeurs est ainsi démontrée.

Discussion des formules fournies par les équations générales du 1er degré.

131. Dans les cas où le dénominateur commun des valeurs générales des inconnues se réduit à zéro, on ne voit plus comment les équations données peuvent être vérifiées : je me propose d'examiner ici ces cas particuliers.

Reprenons les deux équations

$$[1] \qquad ax + by = k,$$

$$[2] \qquad a'x + b'y = k',$$

d'où l'on tire les formules

$$x = \frac{kb' - bk'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ak' - ka'}{ab' - ba'}.$$

Premier cas particulier. Supposons que le dénominateur soit zéro, sans qu'aucun des numérateurs le soit. Alors on a

$$ab' - ba' = 0, \quad x = \frac{kb' - bk'}{0}, \quad y = \frac{ak' - ka'}{0}.$$

Les valeurs de x et de y sont donc infinies : c'est-à-dire que, pour satisfaire aux deux équations données, elles doivent surpasser toute grandeur assignable.

De l'égalité $ab' - ba' = 0$, on tire $a' = \frac{ab'}{b}$; et par suite l'équation [2], en y mettant cette valeur, devient

$$\frac{ab'}{b}x + b'y = k', \quad \text{d'où} \quad b'(ax + by) = bk'.$$

Le premier membre n'est autre que celui de l'éq. [1] multiplié par b'; donc il faudrait que la même relation eût lieu entre les seconds membres, pour que des valeurs de x et de y pussent vérifier à la fois les éq. [1] et [2]. Donc on devrait avoir $bk' = kb'$ ou $kb' - bk' = 0$; donc le numérateur de x serait égal à zéro, ce qui est contraire aux hypothèses.

De cette manière, l'impossibilité de trouver des valeurs de x et de y qui satisfassent aux deux équations à la fois est bien en évidence; mais elle est encore mieux caractérisée par les valeurs in-

finies, lesquelles, tout en montrant cette impossibilité, font voir de plus qu'elle vient de ce que les valeurs des inconnues sont trop grandes pour être assignées. Et, en effet, on peut imaginer que $ab' - ba'$ soit d'abord une très-petite quantité. Alors les valeurs de x et de y seraient très-grandes, mais elles satisferaient toujours aux équations, donc, au moment où $ab' - ba'$ devient zéro, si on ne peut plus opérer directement de vérification sur les équations, c'est uniquement parce qu'alors x et y surpassent toutes les grandeurs assignables (*).

Deuxième cas particulier. Supposons que le dénominateur soit nul en même temps que l'un des numérateurs : par exemple, qu'on ait

$$ab' - ba' = 0,\ kb' - bk' = 0.$$

Je dis d'abord que l'autre numérateur $ak' - ka'$ est aussi égal à zéro. En effet, les deux égalités ci-dessus donnent

$$a' = \frac{ab'}{b},\qquad k' = \frac{kb'}{b};$$

et par suite il vient, pour l'autre numérateur,

$$ak' - ka' = \frac{akb'}{b} - \frac{akb'}{b} = 0.$$

Si d'abord on avait supposé ce numérateur égal à zéro, on aurait prouvé semblablement que celui de x doit aussi être zéro.

De là il suit que, dans les hypothèses où nous sommes, on doit avoir

$$x = \frac{0}{0},\qquad y = \frac{0}{0}.$$

Par eux-mêmes, ces symboles indiquent des quantités indéterminées; je vais prouver, en remontant aux équations, qu'il doit en effet y avoir indétermination.

Substituons dans l'équation [2] les valeurs de a' et k' trouvées plus haut, elle devient

$$\frac{ab'}{b}x + b'y = \frac{kb'}{b},\qquad \text{d'où}\quad \frac{b'}{b}(ax + by) = \frac{b'}{b}k.$$

Alors on voit qu'elle peut se former en multipliant les deux mem-

(*) Considérées par rapport à la question dont les équations expriment les conditions, les valeurs infinies sont quelquefois une véritable solution de cette question. L'application de l'algèbre à la géométrie en fournit des preuves nombreuses : entre autres exemples, je citerai celui où un angle est inconnu, et où l'on trouve pour sa tangente une valeur infinie ; il est clair qu'alors l'angle sera droit.

bres de l'éq. [1] par $\frac{b'}{b}$; donc toutes les valeurs de x et y qui satisfont à l'une des deux équations doivent aussi convenir à l'autre. Or, si on donne à x successivement telles valeurs qu'on voudra et qu'on les substitue dans l'éq. [1], on pourra, de cette équation, tirer les valeurs correspondantes de y; et de cette manière on aura toujours des solutions qui conviendront à cette équation. Donc, puisqu'elles doivent aussi convenir à la seconde, on est en droit de conclure que les équations proposées admettent une infinité de solutions. Ainsi, c'est avec raison que les formules de l'algèbre donnent alors des valeurs indéterminées.

Toutefois il faut bien remarquer que l'indétermination ne va pas jusqu'à permettre de prendre telle valeur de x et telle valeur de y qu'on veut : car l'explication précédente montre que l'une des inconnues doit toujours se calculer au moyen de l'autre.

Le cas actuel comprend celui où l'on aurait $k=0$, $k'=0$, $ab'-ba'=0$: car alors x et y deviennent $\frac{0}{0}$. Si l'on remonte aux équations proposées, elles se réduisent à celles-ci,

$$ax+by=0, \quad a'x+b'y=0.$$

Elles donnent respectivement

$$y=-\frac{a}{b}x, \quad y=-\frac{a'}{b'}x.$$

Or, de l'hypothèse $ab'-ba'=0$, on tire $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$; donc les deux valeurs de y sont égales quel que soit x, et par conséquent il y a véritablement indétermination.

Cependant il est à remarquer que si on prend le rapport de y à x il sera déterminé : car on a

$$\frac{y}{x}=-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}.$$

Sans la condition $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, les valeurs de y n'eussent été égales qu'en faisant $x=0$; par suite on aurait eu $y=0$, et le rapport de y à x n'aurait plus été déterminé.

Dans ce qui précède, on s'est servi des valeurs $a'=\frac{ab'}{b}$, $k'=\frac{kb'}{b}$; et par conséquent on a admis tacitement que le coefficient b était différent de zéro. On pourrait aussi considérer les cas où il est nul; mais je laisserai ces détails de côté.

132. Dans la discussion précédente j'ai considéré certaines formes singulières que prennent les valeurs générales de x et y, et je me suis attaché à rendre évidents, sur les équations proposées elles-mêmes, les résultats indiqués par une exacte interprétation de ces formes. Une discussion analogue peut s'établir pour les formules relatives à plus de deux équations; mais, quand on cherche à mettre en évidence, dans les équations proposées, les cas d'impossibilité ou d'indétermination indiqués par les formules, on rencontre des calculs plus difficiles, auxquels je crois peu utile de m'arrêter. Je me bornerai à placer ici des observations dont l'objet est de prémunir contre quelques fausses conclusions dans lesquelles un jugement précipité pourrait peut-être entraîner.

Dans le numéro précédent, on a pu remarquer que les inconnues x et y devenaient à la fois toutes deux infinies, ou toutes deux indéterminées. Or, une première erreur que l'on pourrait commettre serait de juger par analogie que, si au lieu de deux équations on en avait plusieurs, les valeurs des inconnues devraient aussi devenir à la fois toutes infinies, ou toutes indéterminées. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse des trois équations

$$ax + by + cz = k,$$
$$a'x + b'y + c'z = k',$$
$$a''x + b''y + c''z = k''.$$

Le dénominateur commun de x, y, z, est $R = ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''$; et il peut s'écrire de ces trois manières,

$$R = a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb'),$$
$$R = b(c'a'' - a'c'') + b'(ac'' - ca'') + b''(ca' - ac'),$$
$$R = c(a'b'' - b'a'') + c'(ba'' - ab'') + c''(ab' - ba').$$

Posons

$$b'c'' = c'b'', \quad cb'' = bc''.$$

De ces égalités on déduit $bc' = cb'$, et par conséquent R devient zéro. Alors le numérateur de x, qui se forme de R en changeant a, a', a'', en k, k', k'', devient zéro aussi. Mais comme le numérateur de y se forme en mettant k, k', k'', dans R, à la place de b, b', b'', il n'y a aucune raison pour que ce numérateur devienne zéro, à moins qu'on n'établisse quelque nouvelle hypothèse. La même chose peut se dire de celui de z. Ainsi la valeur de x peut prendre la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, tandis que les valeurs de y et z seront infinies.

Mais, relativement à cette forme indéterminée, une autre erreur est encore à éviter : car il peut se faire (124) que l'indétermination ne soit qu'apparente. Pour en mieux juger, on n'aura d'abord égard qu'à la seule relation

$$b'c'' = c'b'', \quad \text{d'où} \quad c'' = \frac{c'b''}{b'}.$$

A cet effet, on substituera cette valeur de c'' dans la valeur générale de x. Alors on reconnaîtra que le facteur $bc' - cb'$, est commun au numérateur et au dénominateur. Or, par les hypothèses, ce facteur est zéro ; c'est donc sa présence qui produit l'indétermination, et en le supprimant, on aura la vraie valeur de x, laquelle cessera d'être indéterminée, à moins qu'on ne joigne quelques nouvelles hypothèses aux hypothèses déjà faites.

CHAPITRE VII.

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU 1er DEGRÉ.

Résolution de l'équation $ax + by = c$ en nombres entiers.

133. Si on propose de résoudre une équation du 1er degré à deux inconnues x et y, on peut donner à l'une d'elles telle valeur qu'on veut, et l'équation fait connaître une valeur correspondante de l'autre inconnue. Par là on voit que l'équation admet un nombre infini de solutions ; et, pour cette raison, les deux inconnues prennent alors assez ordinairement le nom d'*indéterminées*. Le nombre des solutions ne sera plus autant illimité, si on exige que les valeurs de x et de y soient entières ; et il le sera moins encore si on veut qu'elles soient à la fois entières et positives. Des conditions de ce genre ne peuvent pas s'exprimer par des équations : je vais montrer comment on y a égard.

134. Je ramènerai d'abord l'équation à la forme

$$ax + by = c,$$

a, b, c étant des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs ; et comme les facteurs communs à la fois à ces trois nombres pourraient être supprimés, je supposerai qu'ils l'ont déjà été.

Cela posé, je ferai remarquer dès à présent un cas où il est im-

possible de satisfaire à l'équation avec des valeurs entières de x et de y : c'est celui où, après la suppression dont on vient de parler, a et b auraient encore un facteur commun. En effet, quelques valeurs entières de x et de y qu'on substitue alors, le premier membre sera divisible par le facteur commun à a et à b, tandis que le second ne le sera point; par conséquent l'égalité est impossible. C'est pourquoi je regarderai toujours dans la suite a et b comme premiers entre eux. On n'exigera pas d'abord que x et y soient entiers positifs, mais entiers seulement.

135. Pour le moment, la question est donc celle-ci : Étant donnée l'équation

[1] $$ax + by = c,$$

dans laquelle a, b, c sont des nombres entiers quelconques dont les deux premiers n'ont aucun facteur commun, on demande, pour x et y, tous les systèmes de valeurs entières qui satisfont à l'équation. Je ferai le raisonnement comme si a et b étaient positifs, mais on apercevra sans peine qu'il s'applique aux autres cas.

La question serait sans difficulté si le coefficient d'une inconnue, de y, par exemple, était égal à l'unité. L'équation donnerait sur-le-champ $y = c - ax$, et il est évident qu'en prenant pour x un nombre entier quelconque, la valeur correspondante de y serait aussi entière.

Supposons que ni a ni b ne soit égal à 1, et que b soit $< a$. De l'équation on tire d'abord

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Divisons a par b, nommons q le quotient, et r le reste; on aura $a = bq + r$, et par suite

$$y = \frac{c - (bq + r)x}{b} = -qx + \frac{c - rx}{b}.$$

On veut que x et y soient des nombres entiers; or, en donnant à x une valeur entière quelconque, la partie $-qx$ sera entière; donc, pour que y ait aussi une valeur entière, il faut chercher les valeurs entières de x propres à rendre $\frac{c - rx}{b}$ égal à un nombre entier. A cet effet, posons l'équation

[2] $$\frac{c - rx}{b} = t \quad \text{ou} \quad rx + bt = c,$$

t désignant une nouvelle indéterminée ; la question sera réduite à

résoudre cette équation par des valeurs entières de x et de t. Si le reste r était égal à l'unité, la recherche serait donc terminée.

Supposons $r > 1$: on résoudra l'équation ci-dessus par rapport à x, dont le coefficient est moindre que celui de t, et on aura

$$x = \frac{c - bt}{r}.$$

En nommant q' le quotient de b par r, et r' le reste, il viendra

$$x = \frac{c - (rq' + r')t}{r} = -q't + \frac{c - r't}{r};$$

et comme t doit être un nombre entier, on voit qu'il faut choisir ce nombre de manière que $\frac{c - r't}{r}$ soit un nombre entier. C'est pourquoi l'on pose

$$[3] \qquad \frac{c - r't}{r} = t' \quad \text{ou} \quad r't + rt' = c,$$

t' étant une nouvelle indéterminée; et la question est réduite à résoudre cette équation par des valeurs entières de t et t'. Toute recherche serait donc terminée si l'on avait $r' = 1$.

Mais soit $r' > 1$: la dernière équation donnera

$$t = \frac{c - rt'}{r'},$$

d'où, en nommant q'' le quotient de r par r', et r'' le reste, on aura

$$t = \frac{c - (r'q'' + r'')t'}{r'} = -q''t' + \frac{c - r''t'}{r'}.$$

On posera de nouveau

$$[4] \qquad \frac{c - r''t'}{r'} = t'' \quad \text{ou} \quad r''t' + r't'' = c,$$

t'' étant encore une nouvelle indéterminée; et l'on aura à chercher les solutions entières de cette dernière équation.

La marche du calcul est maintenant assez claire; on voit que la question devra être regardée comme résolue dès qu'on parviendra à une équation dans laquelle une indéterminée aura pour coefficient l'unité. Or, c'est ce qui ne peut manquer d'arriver : car les coefficients r, r', r'',... qui entrent dans les équations auxiliaires [2], [3], [4],... sont les restes successifs qu'on obtient en opérant comme si on cherchait le plus grand commun diviseur de a et b.

Pour fixer les idées, supposons $r'' = 1$: l'éq. [4] donne

$$[5] \qquad t' = -r't'' + c.$$

Les raisonnements par lesquels on est passé ont montré que t, t', t'', devaient être des nombres entiers. Ici on voit qu'en donnant à t'' telles valeurs entières qu'on voudra, t' sera toujours entier; et dès lors il est clair que les indéterminées précédentes, en remontant jusqu'à x et y, seront aussi entières. Ainsi l'équation proposée admet une infinité de solutions en nombres entiers (*).

Mais on peut se dispenser de calculer les indéterminées intermédiaires t et t' : car il est facile d'avoir des formules générales qui expriment immédiatement en fonction de t'' les indéterminées primitives x et y. Pour y parvenir, remarquez que les valeurs de x, y, t et t', à cause des éq. [2], [3], [4], [5], peuvent s'écrire ainsi,

$$\begin{aligned} y &= -qx + t, \\ x &= -q't + t', \\ t &= -q''t' + t'', \\ t' &= -r't'' + c; \end{aligned}$$

et alors on voit qu'il faut substituer la valeur de t' dans celle de t; puis celles de t et t', exprimées en t'', dans celle de x; puis enfin celles de x et t, aussi exprimées en t'', dans celle de y.

Le succès de la méthode précédente est fondé sur la diminution progressive que la division opère dans les coefficients des indéterminées; mais rien n'empêche de diviser aussi le terme constant qui se trouve dans les équations successives. De cette manière, le calcul renfermera des nombres moins considérables, et cet avantage n'est pas à négliger.

156. Pour exemple, soit l'équation

$$3x - 8y = 43.$$

Comme le multiplicateur de x est ici moindre que celui de y, c'est par rapport à x que je résous l'équation : il vient

$$x = \frac{8y + 43}{3}.$$

(*) Si a et b n'étaient point premiers entre eux, l'impossibilité d'avoir des valeurs entières pour x et y serait mise en évidence par la méthode même. En effet, alors dans la suite des restes $r, r', r'', \ldots$ il y en a un qui divise exactement le précédent, et qui est le plus grand commun diviseur de a et b : supposons que ce soit r'', et qu'on ait $r' = kr''$. L'éq. [4] donnera

$$t' = \frac{c - r't''}{r''} = -kt'' + \frac{c}{r''};$$

et de là on conclut qu'il n'existe aucune valeur entière de t'' qui rende t' entier, à moins que r'' ne divise aussi c. C'est précisément le cas d'impossibilité qui a déjà été remarqué (154).

En divisant 8 par 3 on trouve le quotient 2 avec le reste 2, et en divisant 43 par 3, on trouve le quotient 14 avec le reste 1; donc on a

$$x = 2y + 14 + \frac{2y+1}{3} = 2y + 14 + t,$$

en posant $$2y + 1 = 3t.$$

De cette équation on tire

$$y = \frac{3t-1}{2} = t + \frac{t-1}{2} = t + t',$$

en remarquant que $3 = 2 \times 1 + 1$, et en posant

$$t - 1 = 2t'.$$

Comme dans cette équation le coefficient de t est l'unité, on aura

$$t = 2t' + 1,$$

et l'on pourra donner à t' toutes les valeurs entières possibles.

Au moyen de cette valeur on trouve

$$y = t + t' = 2t' + 1 + t' = 3t' + 1;$$

puis, en remontant à x, il vient

$$x = 2y + 14 + t = 2(3t' + 1) + 14 + 2t' + 1 = 8t' + 17.$$

Ainsi, les formules qui expriment y et x, en fonction de t', sont

$$y = 3t' + 1, \quad x = 8t' + 17.$$

En donnant à t' les valeurs $t' = 0, 1, 2, 3, \ldots$ on trouvera

$$y = 1, \ 4, \ 7, 10, \text{ etc.}$$
$$x = 17, 25, 33, 41, \text{ etc.}$$

On peut aussi donner à t' les valeurs négatives $-1, -2, -3$, etc.

157. Dans l'exemple ci-dessus, les valeurs de y et de x forment deux progressions arithmétiques, dont la première a pour raison le nombre 3, coefficient de x dans l'équation proposée; et dont la seconde a pour raison le nombre 8, qui est le coefficient de y pris avec un signe contraire. On pourrait reconnaître que cette proposition est générale, en effectuant les substitutions successives dont il a été parlé à la fin du n° **155**; mais la démonstration suivante est préférable.

Par l'analyse du numéro cité, on est certain que l'équation

$$[1] \qquad ax + by = c$$

doit admettre une infinité de solutions entières, quels que soient les signes et les grandeurs des nombres a et b, pourvu qu'ils

soient premiers entre eux. Supposons qu'une de ces solutions soit $x = A$, $y = B$.

Ces nombres devant satisfaire à l'équation [1], on aura

$$aA + bB = c.$$

En retranchant cette égalité de l'équation [1], il vient

$$a(x - A) + b(y - B) = 0;$$

et de là on tire $$y = B + \frac{a(A - x)}{b}.$$

Les valeurs de x doivent être entières, et telles que y soit aussi un nombre entier ; donc le produit $a(A - x)$ doit être divisible par b. Or a est premier avec b ; donc $A - x$ doit être un multiple de b (*). On posera donc

$$A - x = bt,$$

t désignant un nombre entier quelconque; et par suite on aura

$$x = A - bt, \quad y = B + at.$$

Ces formules mettent en évidence la loi des valeurs qu'on obtient pour x et y, quand on donne à t successivement toutes les valeurs entières. Si on prend $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ il vient

$$x = A, \quad A - b, \quad A - 2b, \quad A - 3b, \text{ etc.},$$
$$y = B, \quad B + a, \quad B + 2a, \quad B + 3a, \text{ etc.};$$

et si l'on prend $t = -1, -2, -3, \ldots$ il vient

$$x = A + b, \quad A + 2b, \quad A + 3b, \text{ etc.},$$
$$y = B - a, \quad B - 2a, \quad B - 3a, \text{ etc.}$$

En général quand t croît d'une unité, y augmente de a, et x augmente de $-b$. Donc *les solutions entières de l'équation* $ax + by = c$ *sont les termes correspondants de deux progressions arithmétiques. Dans la progression relative à chacune des indéterminées* x *et* y, *la raison est égale au coefficient de l'autre indeterminée. Mais il faut avoir soin de prendre l'un de ces coefficients avec le signe qu'il a dans l'équation, et l'autre avec un signe contraire.*

Il est d'ailleurs tout à fait indifférent que ce soit le coefficient

---

(*) *Si un nombre divise un produit de deux facteurs, et s'il est premier par rapport à l'un d'eux, il devra diviser l'autre.* On peut regarder cette proposition comme connue par l'arithmétique ; et d'ailleurs elle sera démontrée plus loin, chapitre XII.

de x ou celui de y qu'on prenne avec un signe contraire; car, dans les formules qui expriment x et y, on peut changer les signes des termes $+bt$ et $-at$, attendu que l'indéterminée t peut recevoir toutes les valeurs possibles, positives et négatives.

138. La proposition qu'on vient de démontrer donne le moyen d'obtenir sur-le-champ toutes les solutions entières d'une équation de la forme $ax+by=c$, dès qu'on en connaît une seule. Ainsi, l'équation

$$7x-5y=9$$

étant proposée, on reconnaît, après quelques tâtonnements, qu'elle est satisfaite par $x=2$, $y=1$; et dès lors en observant que $+7$ et -5 sont les coefficients de x et de y dans l'équation, on pourra poser les formules générales

$$x=2+5t,\quad y=1+7t.$$

En faisant $t=0, 1, 2, 3, \ldots$ et $t=-1, -2, -3, \ldots$ on aura les solutions de l'équation.

139. Dans l'équation générale supposons $c=0$, elle devient

$$ax+by=0;$$

et comme alors elle admet évidemment la solution $x=0$ et $y=0$, les formules générales seront

$$x=bt,\quad y=-at.$$

Si on veut trouver directement ces résultats, on tirera de l'équation la valeur $y=-\frac{ax}{b}$; puis on remarquera que a et b étant premiers entre eux, les valeurs entières de x qui rendent y entier doivent être multiples de b. Donc, t désignant un nombre entier quelconque, on doit avoir $x=bt$, et par suite $y=-at$.

Exemple : $31x-22y=0$;

on aura $x=22t,\quad y=31t.$

140. Supposons c multiple de a ou de b. Soit $c=bd$: l'équation à résoudre sera

$$ax+by=bd.$$

Elle a évidemment pour solution $x=0$, $y=d$; donc les valeurs générales seront

$$x=bt,\quad y=d-at.$$

De l'équation on peut tirer $x=\frac{b(d-y)}{a}$, et de là on conclut

que $d - y$ doit être un multiple de a. On posera donc $d - y = at$, et par suite on retrouve les formules $y = d - at$, $x = bt$.

Exemple, soit l'éq. $5x - 7y = 21$: ici la solution évidente de l'équation est $x = 0$, $y = -3$; et en conséquence les valeurs générales sont $x = 7t$, $y = -3 + 5t$.

141. J'indiquerai encore deux simplifications qui se rencontrent quelquefois dans les calculs. Un exemple les fera comprendre. Soit l'équation.

$$80x - 17y = 39.$$

On en tire d'abord

$$y = \frac{80x - 39}{17}.$$

Si on divise 80 par 17, on a $80 = 17 \times 4 + 12$; mais comme le reste 12 surpasse la moitié du diviseur 17, je ferai remarquer qu'on peut écrire $80 = 17 \times (4 + 1) + 12 - 17 = 17 \times 5 - 5$. C'est-à-dire qu'en augmentant le quotient d'une unité, on aura un reste négatif moindre que la moitié du diviseur, ce qui opère dans les nombres une réduction plus rapide. Quant à la division de 39 par 17, elle donne $39 = 17 \times 2 + 5$, et il n'y a point lieu à changer le reste 5. En conséquence on aura

$$y = \frac{(17 \times 5 - 5)x - 17 \times 2 - 5}{17} = 5x - 2 - \frac{5x + 5}{17}.$$

Mais il se présente encore une autre simplification, laquelle résulte de ce que 6 est facteur dans $5x + 5$. En effet, ce numérateur se décompose en $5(x + 1)$, et comme le dénominateur 17 n'a aucun facteur commun avec 5, il s'ensuit que pour rendre le produit $5(x + 1)$ divisible par 17, il faut prendre $x + 1$ égal à un multiple quelconque de 17. C'est pourquoi l'on posera l'équation auxiliaire

$$x + 1 = 17t;$$

et par suite on trouvera, $x = 17t - 1$, $y = 80t - 7$.

Résolution de l'équation $ax + by = c$ en nombres entiers positifs. — Application à des problèmes. — Remarques sur les inégalités.

142. Quand on veut résoudre l'équation $ax + by = c$ en nombres entiers positifs, on commence par faire les calculs comme si les nombres devaient être entiers seulement; et, d'après ce qui précède, on a pour x et y, des expressions de la forme

$$x = A - bt, \quad y = B + at.$$

Mais alors, au lieu d'attribuer à t toutes les valeurs entières

possibles, on ne doit plus choisir que celles qui rendent x et y positifs. De là résulte pour t certaines limitations qui sont toujours faciles à déterminer.

En premier lieu, considérons le cas où a et b sont de même signe dans l'équation

$$ax + by = c.$$

Je les supposerai positifs, parce que, s'ils étaient négatifs, on pourrait les rendre positifs en changeant tous les signes de l'équation. Je supposerai aussi c positif : autrement l'équation serait impossible en nombres positifs.

Écrivons les valeurs générales de x et y sous cette forme,

$$x = b\left(\frac{A}{b} - t\right), \qquad y = a\left(t - \frac{-B}{a}\right):$$

pour rendre x positif, il faut et il suffit qu'on prenne $t < \frac{A}{b}$; et pareillement, pour rendre y positif, il faut et il suffit qu'on prenne $t > \frac{-B}{a}$. Donc, pour n'avoir que des solutions positives et entières, on ne devra attribuer à t que les valeurs entières comprises entre les deux limites

$$t > \frac{-B}{a}, \qquad t < \frac{A}{b}.$$

Toutefois il faut remarquer que les signes $>$ et $<$ n'excluent pas l'égalité : c'est-à-dire que si la première limite, par exemple, était un nombre entier n, on pourrait faire $t = n$. La valeur correspondante de x serait $x = 0$.

De ce que t doit être entier et choisi entre deux limites, il s'ensuit que le nombre des solutions de l'équation doit être limité; et c'est ce qui est évident sur l'équation même. En effet, a et b étant positifs, si on substitue pour x et y des nombres positifs, les deux termes $ax + by$ seront toujours positifs, et comme leur somme doit rester constamment égale à c, il est impossible qu'aucun des deux termes augmente indéfiniment.

Il se peut qu'il n'y ait aucun nombre entier entre les limites trouvées pour t : alors on conclura que l'équation est impossible. C'est ce qui arriverait si ces limites étaient resserrées entre deux nombres entiers consécutifs, comme sont celles-ci, $t > 4\frac{1}{3}$ et $t < 4\frac{5}{7}$. D'ailleurs, elles ne pourront pas être contradictoires, comme, par exemple, $t > 4\frac{1}{3}$ et $t < 3\frac{1}{2}$: car il faudrait qu'on eût $\frac{A}{b} < \frac{-B}{a}$;

or, de là on tire $aA + bB < 0$, et d'un autre côté, A et B doivent satisfaire à la relation $aA + bB = c$, dans laquelle c est positif.

En second lieu, considérons le cas où a et b ont des signes contraires. Supposons qu'il s'agisse de l'équation

$$ax - by = c,$$

dans laquelle a et b représentent deux nombres positifs. Alors les valeurs générales de x et de y sont de la forme

$$x = A + bt, \quad y = B + at.$$

Or, on peut les écrire ainsi

$$x = b\left(t - \frac{-A}{b}\right), \qquad y = a\left(t - \frac{-B}{a}\right);$$

et sur-le-champ on reconnaît que, pour rendre x et y positifs, il faut avoir à la fois

$$t > \frac{-A}{b} \quad \text{et} \quad t > \frac{-B}{a},$$

c'est-à-dire qu'on peut attribuer à t toutes les valeurs entières au-dessus de la plus grande de ces limites (sans exclure l'égalité, si cette limite est un nombre entier).

Par là on voit que l'équation $ax - by = c$, admet toujours un nombre infini de solutions entières et positives, tandis que l'équation $ax + by = c$ n'en a jamais qu'un nombre limité, et même peut n'en pas avoir du tout.

Appliquons ce qui précède à quelques problèmes.

143. Problème I. *Une société d'hommes et de femmes a dépensé dans une fête* 1000 *fr. Les hommes ont payé* 19 *fr. et les femmes* 11 *fr. Combien y avait-il d'hommes et de femmes?*

Soit x le nombre des hommes et y celui des femmes : il faudra résoudre en nombres entiers positifs l'équation

$$[1] \qquad 19x + 11y = 1000.$$

En faisant les calculs comme dans le n° **136**, et en profitant aussi des simplifications indiquées par le n° **141**, j'ai successivement

$$y = \frac{1000 - 19x}{11} = 91 - 2x + \frac{3x - 1}{11} = 91 - 2x + t,$$

$$3x - 1 = 11t,$$

$$x = \frac{11t + 1}{3} = 4t + \frac{1 - t}{3} = 4t + t',$$

$$1 - t = 3t',$$

$$t = 1 - 3t',$$

Parvenu à ce point, je remonterai à x et y, et il viendra

$$x = 4t + t' = 4(1 - 3t') + t' = 4 - 11t',$$

$$y = 91 - 2x + t = 91 - 2(4 - 11t') + (1 - 3t') = 84 + 19t'.$$

Ainsi les formules générales, qui expriment x et y en t', sont

$$x = 4 - 11t', \quad y = 84 + 19t'.$$

Pour que x soit positif, il faut et il suffit qu'on ait $11t' < 4$ ou $t' < \frac{4}{11}$; et pour que y soit aussi positif, il faut et il suffit qu'on ait $19t' > -84$ ou $t' > -4\frac{8}{19}$. Donc on devra prendre pour t' l'une des valeurs suivantes :

$$t' = 0, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \quad -4.$$

A ces valeurs correspondent

$$x = 4, \quad 15, \quad 26, \quad 37, \quad 48;$$

$$y = 84, \quad 65, \quad 46, \quad 27, \quad 8.$$

Le nombre des solutions est limité, et l'on devait s'y attendre, puisque dans l'équation [1] les termes en x et y sont de même signe. Il y en a cinq en tout, savoir :

1re solution.. 4 hommes et 84 femmes,
2e .... 15 hommes et 65 femmes,
3e .... 26 hommes et 46 femmes,
4e .... 37 hommes et 27 femmes,
5e .... 48 hommes et 8 femmes.

Remarque. D'après ce qui a été dit n° **138**, il suffit de se procurer une seule solution de l'équation [1] pour former à l'instant les valeurs générales de x et y. Or si, après avoir trouvé plus haut $t = 1 - 3t'$, on fait $t' = 0$, et si on calcule les valeurs correspondantes $t = 1$, $x = 4$, $y = 84$, il est évident que les valeurs $x = 4$, $y = 84$ doivent former une solution de l'équation; donc alors on pourrait poser immédiatement $x = 4 - 11t'$, $y = 84 + 19t'$.

144. Problème II. *Avec des règles inégales, les unes de* 5 *décimètres et les autres de* 7, *on propose de faire, en les plaçant les unes à la suite des autres, une longueur de* 23 *décimètres.*

Ce problème revient à résoudre en nombres entiers positifs l'équation

$$5x + 7y = 23.$$

On en tire successivement

$$x = \frac{23 - 7y}{5} = 5 - y - \frac{2 + 2y}{5} = 5 - y - 2t.$$

$$1 + y = 5t, \quad y = 5t - 1, \quad x = 6 - 7t.$$

Pour que y soit positif on doit faire $t > \frac{1}{5}$, et pour que x soit aussi positif il faut faire $t < \frac{6}{7}$. Comme il ne tombe aucun nombre entier entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{6}{7}$, on doit en conclure que le problème est impossible.

Remarque. L'équation aurait une infinité de solutions si l'on admettait des valeurs négatives pour l'une des inconnues. Par exemple, si on fait $t = 0$, on aura $x = 6$, $y = -1$. Cette solution indique qu'en plaçant les unes à la suite des autres 6 règles de 5 décim., et en portant ensuite sur la ligne ainsi formée une règle de 7 décim., il restera la longueur demandée 23 décim. Cette interprétation rentre dans les règles générales déjà établies (**102**).

145. Problème III. *Quelqu'un achète des chèvres et des moutons. Chaque chèvre lui coûte* 8 *fr., et chaque mouton* 27 *fr. Il se trouve qu'il paye pour les chèvres* 97 *fr. de plus que pour les moutons. Combien y a-t-il de chèvres et combien de moutons?*

Soit x le nombre des chèvres et y celui des moutons. Il faudra résoudre en nombres entiers positifs l'équation

$$8x - 27y = 97.$$

On en tire

$$x = \frac{27y + 97}{8} = 3y + 12 + \frac{3y+1}{8} = 3y + 12 + t,$$

$$3y + 1 = 8t,$$

$$y = \frac{8t - 1}{3} = 3t - \frac{t+1}{3} = 3t - t',$$

$$t + 1 = 3t', \quad t = 3t' - 1.$$

En faisant $t' = 0$, il vient $t = -1$, $y = -3$, $x = 2$. Par suite, les valeurs générales de x et de y sont $x = 27t' + 2$, $y = 8t' - 3$.

Les valeurs de x et de y devant être positives, ces formules montrent que t' doit être lui-même positif, et assez grand pour qu'on ait $8t' > 3$ ou $t' > \frac{3}{8}$. On peut donc donner à t' toutes les valeurs $t' = 1, 2, 3$, etc., jusqu'à l'infini, et par conséquent on formera ce tableau

$$\begin{array}{llllll} t' = & 1, & 2, & 3, & 4, & \text{etc.} \\ x = & 29, & 56, & 83, & 110, & \text{etc.} \\ y = & 5, & 13, & 21, & 29, & \text{etc.} \end{array}$$

Le problème admet, comme on voit, une infinité de solutions; et l'on doit répondre qu'il y avait 29 chèvres et 5 moutons, ou 56 chèvres et 13 moutons, ou 83 chèvres et 21 moutons, etc.

146. Problème IV. *Trouver un nombre tel qu'en le divisant par* 11 *il reste* 3, *et qu'en le divisant par* 17 *il reste* 10.

En donnant à x des valeurs entières positives quelconques, tous les nombres dont la division par 11 laisse le reste 3 sont évidemment compris dans la formule $N = 11x + 3$.

Semblablement, en prenant y entier et positif, les nombres qui, divisés par 17, donnent le reste 10, sont compris dans la formule $N = 17y + 10$.

Par conséquent, la question consiste à résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$[2] \qquad 11x + 3 = 17y + 10.$$

En opérant comme dans le problème précédent, il vient

$$x = \frac{17y + 7}{11} = y + \frac{6y + 7}{11} = y + t,$$

$$6y + 7 = 11t,$$

$$y = \frac{11t - 7}{11} = 2t - 1 - \frac{t + 1}{6} = 2t - 1 - t',$$

$$t + 1 = 6t', \quad t = 6t' - 1.$$

L'hypothèse $t' = 0$ donne $t = -1$, $y = -3$, $x = -4$; et alors on conclut sur-le-champ,

$$x = 17t' - 4, \quad y = 11t' - 3.$$

On ne doit pas faire t' négatif, ni même $t' = 0$: car x et y deviendraient négatifs. Mais on pourra faire $t' = 1, 2, 3$, etc. jusqu'à l'infini.

Si l'on veut avoir des formules dans lesquelles on puisse donner à l'indéterminée toutes les valeurs entières positives à partir de zéro, il suffira évidemment de changer t' en $1 + \theta$, θ étant la nouvelle indéterminée. Alors on aura

$$x = 13 + 17\theta, \quad y = 8 + 11\theta.$$

Au moyen de ces valeurs on trouve

$$N = 11x + 3 = 11(13 + 17\theta) + 3 = 146 + 187\theta,$$

$$N = 17y + 10 = 17(8 + 11\theta) + 10 = 146 + 187\theta.$$

Ces deux expressions sont égales, et l'on devait s'y attendre, puisque l'éq. [2] a été formée en égalant les valeurs de N.

On voit qu'il y a une infinité de nombres qui remplissent les deux conditions de l'énoncé, et qu'ils sont tous représentés par la formule

$$N = 146 + 187\theta,$$

dans laquelle θ est une indéterminée qui peut recevoir toutes les valeurs entières positives, en commençant par zéro.

Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'elle satisfait à l'énoncé : c'est-à-dire que si on la divise par 11 le reste sera 3, et que si on la divise par 17 le reste sera 10. En effet, on a

$$\frac{N}{11} = 17\theta + 13 + \frac{3}{11} \quad \text{et} \quad \frac{N}{17} = 11\theta + 8 + \frac{10}{17}.$$

147. PROBLÈME V. *Trouver un nombre tel qu'en le divisant par* 11 *il reste* 3, *qu'en le divisant par* 17 *il reste* 10, *et qu'en le divisant par* 37 *il reste* 13.

Dans le problème précédent, on a trouvé la formule des nombres qui remplissent les deux premières conditions. En mettant x au lieu de θ, cette formule est.... [3] $N = 146 + 187x$.

Mais pour que le nombre N remplisse la troisième condition, il doit être de la forme $N = 37y + 13$; donc on a l'équation

$$37y + 13 = 146 + 187x.$$

Il est bien entendu que x et y doivent être entiers et positifs.

Il viendra d'abord

$$y = \frac{187x + 133}{37} = 5x + 3 + \frac{2x + 22}{37} = 5x + 3 + 2t,$$

$$x + 11 = 37t, \quad x = 37t - 11.$$

Pour que x soit positif, on ne doit donner à t que des valeurs positives au-dessus de zéro. Mais en faisant $t = 1 + \theta$, on pourra attribuer à θ toutes les valeurs entières positives, en commençant par zéro. Par ce changement, x devient

$$x = 26 + 37\theta;$$

et en substituant cette valeur dans la formule [3] on obtient

$$N = 5008 + 6919\theta.$$

Telle est la formule générale des nombres qui satisfont aux trois conditions de l'énoncé.

148. La détermination des limites a conduit (**142**) à rechercher quelles sont les valeurs de l'indéterminée finale t, qui rendent positives des expressions de la forme $A + bt$, ou, en d'autres termes, qui sont telles qu'on ait

$$A + bt > 0.$$

On peut d'abord transposer le terme A comme s'il s'agissait d'une équation, ce qui donne $bt > -A$.

Puis si b est positif, on pourra diviser de part et d'autre par b; et on aura $t > \frac{-A}{b}$.

Mais si b est négatif, la division par b changera les signes des deux membres de l'inégalité, et par conséquent, d'après le langage adopté (**20**), le membre qui était le plus petit devient le plus grand. Alors on doit conclure $t < \frac{-A}{b}$.

Supposons plus généralement qu'on ait l'inégalité

$$at + b > ct + d.$$

Par la transposition des termes on a

$$(a - c)\,t > d - b.$$

Puis de là, suivant que $a - c$ est une quantité positive ou négative, on tirera $t > \frac{d-b}{a-c}$, ou $t < \frac{d-b}{a-c}$. C'est là ce qu'on appelle *résoudre une inégalité.*

Je n'entrerai pas dans plus de détails sur les inégalités. Les transformations qu'on peut avoir à leur faire subir ont une telle analogie avec celles qu'on fait sur les équations, qu'il sera toujours facile de les apercevoir. La seule précaution à prendre, c'est d'éviter les erreurs de signes; et pour cela il suffit de se rappeler les conventions établies sur l'ordre des grandeurs (**20**).

Résolution, en nombres entiers, de plusieurs équations du 1er degré, dont le nombre est moindre que celui des inconnues.

149. Soit proposé de résoudre, en nombres entiers positifs, les deux équations

[1] $$2x + 14y - 7z = 341,$$

[2] $$10x + 4y + 9z = 473.$$

Si on multiplie la 1re équation par 5, et qu'ensuite on en retranche la 2e, x sera éliminé et l'on aura

$$66y - 44z = 1232,$$

ou, en divisant les deux membres par 22,

[3] $$3y - 2z = 56.$$

Or, les valeurs entières de y et z, qui conviennent aux équations proposées, doivent convenir aussi à celle-ci : en conséquence je lui applique la méthode connue, et j'en tire

$$y = 2t, \quad z = 3t - 28.$$

S'il ne s'agissait que de l'éq. [3], on aurait ses solutions entières, en attribuant à t toutes les valeurs entières possibles. Mais cette équation tient lieu seulement d'une des proposées (85), et il faut encore que les valeurs de y et z soient telles qu'en leur adjoignant certaines valeurs de x, qui doivent aussi être entières, l'une de ces équations soit vérifiée. C'est pourquoi je vais substituer les valeurs précédentes de y et z dans l'éq. [1], et chercher les valeurs entières de x et t qui conviennent à l'équation résultante.

La substitution donne $2x+7t=145$; et de là on tire, en désignant par t' un nombre entier quelconque,

$$x=69+7t',\quad t=1-2t'.$$

Alors je porte la valeur $t=1-2t'$ dans celles de y et z, et je trouve les inconnues x, y, z exprimées en t', savoir :

$$x=69+7t',\quad y=2-4t',\quad z=-25-6t'.$$

Ces formules font connaître toutes les valeurs entières qui conviennent aux proposées.

Si l'on veut en outre que ces valeurs soient positives, il faut choisir t', de manière qu'on ait

$$69+7t'>0 \quad \text{d'où} \quad t'>-9\tfrac{6}{7},$$
$$2-4t'>0 \quad \text{d'où} \quad t'<\tfrac{1}{2},$$
$$-25-6t'>0 \quad \text{d'où} \quad t'<-4\tfrac{1}{6}.$$

Par là on voit que les seules valeurs qu'on doive attribuer à t' sont $t'=-5,\ -6,\ -7,\ -8,\ -9$. En substituant ces nombres, on aura cinq solutions entières et positives :

$$x=34,\quad 27,\quad 20,\quad 13,\quad 6;$$
$$y=22,\quad 26,\quad 30,\quad 34,\quad 38;$$
$$z=\ 5,\quad 11,\quad 17,\quad 23,\quad 29.$$

130. L'exemple précédent montre assez la méthode qu'il faut suivre toutes les fois qu'on veut résoudre, en nombres entiers positifs, des équations du 1er degré, qui contiennent une inconnue de plus qu'il n'y a d'équations. Mais pour ne rien laisser à désirer, je l'appliquerai encore au cas de trois équations.

Soient donc, entre les inconnues x, y, z, u, trois équations du 1er degré, que je nommerai collectivement les équations [A].

Par l'élimination de x, on trouvera, entre y, z et u, deux équations du 1er : je les nommerai [B].

Par l'élimination de y, on déduira de ces dernières une équation du 1er degré entre z et u : je la nommerai [C].

De l'équation [C] on tire z et u, exprimées en fonction d'une indéterminée auxiliaire t.

Ces valeurs étant substituées dans l'une des équations [B], on en aura une entre y et t, d'où l'on tirera les valeurs de y et t en fonction d'une nouvelle indéterminée t'; et par suite on pourra aussi exprimer z et u en t'.

Enfin, ces valeurs de y, z, u, étant portées dans l'une des équations [A], il en résulte une équation entre x et t', laquelle fera trouver x et t', et par suite aussi y, z et u, en fonction d'une nouvelle indéterminée t''.

Quand les équations doivent être résolues en nombres entiers de signes quelconques, on pourra attribuer à l'indéterminée finale t'' toutes les valeurs entières possibles. Mais lorsqu'on restreint les solutions à celles qui sont à la fois entières et positives, il existera pour t'' des limitations qu'il sera toujours facile d'assigner.

151. Lorsqu'on a deux inconnues de plus que d'équations, ou davantage, l'indétermination est encore plus grande; mais la condition d'avoir des valeurs qui soient à la fois entières et positives peut limiter considérablement le nombre des solutions. Je me bornerai à deux exemples : ils suffiront pour montrer comment la méthode exposée plus haut doit alors se modifier.

On veut résoudre en nombres entiers positifs l'équation

[4] $$10x + 9y + 7z = 58.$$

Comme l'inconnue z a le plus petit coefficient, j'en tirerai

$$z = \frac{58 - 9y - 10x}{7};$$

et, en effectuant la division autant que possible, il vient

$$z = 8 - y - x + \frac{2 - 2y - 3x}{7}.$$

Le numérateur $2 - 2y - 3x$ doit être un nombre entier divisible par 7 : en conséquence, je pose

$$2 - 2y - 3x = 7t,$$

d'où

$$y = \frac{2 - 3x - 7t}{2} = 1 - x - 3t - \frac{x + t}{2}.$$

Et $x + t$ devant aussi être un nombre entier divisible par 2, je pose encore

$$x + t = 2t', \quad \text{d'où} \quad x = -t + 2t'.$$

En remontant à y et à z, on exprimera ces inconnues en fonction de t et t'. On aura ainsi les trois formules

$$[5]\quad x = -t + 2t',\quad y = 1 - 2t - 3t',\quad z = 7 + 4t + t'.$$

Pour avoir toutes les solutions entières et positives de l'équation proposée [4], on doit donner à t et t' toutes les valeurs entières qui satisferont à la fois aux trois conditions

$$[6]\quad -t + 2t' > 0,\quad 1 - 2t - 3t' > 0,\quad 7 + 4t + t' > 0.$$

De là résultent pour t et t' des limitations qu'on apercevra en pratiquant pour ces inégalités des opérations tout à fait analogues à celles de l'élimination. Pour plus de netteté, je supposerai que les signes $>$ excluent l'égalité, ce qui revient à dire qu'aucune des trois inconnues x, y, z, ne doit être zéro.

D'abord, si on multiplie la 1re par 3, et la 2e par 2, il vient

$$-3t + 6t' > 0,\quad 2 - 4t - 6t' > 0.$$

Les deux premiers membres étant > 0, à plus forte raison leur somme doit-elle être > 0. Par cette addition t' disparaît, et l'on a

$$2 - 7t > 0,\quad \text{d'où}\quad t < \tfrac{2}{7}.$$

Une semblable élimination, entre la 2e inégalité et la 3e, donne

$$22 + 10t > 0,\quad \text{d'où}\quad t > -2\tfrac{1}{5}.$$

On voit que l'indéterminée t est resserrée entre les limites $-2\frac{1}{5}$ et $+\frac{2}{7}$; donc on doit prendre seulement $t = -2, -1, 0$.

Considérons successivement chacune de ces valeurs.

1° Si l'on fait $t = -2$ dans les trois inégalités [6], elles deviendront

$$2 + 2t' > 0,\quad 5 - 3t' > 0,\quad -1 + t' > 0,$$

d'où

$$t' > -1,\quad t' < 1\tfrac{2}{3},\quad t' > 1.$$

Comme il n'y a aucun nombre entier entre 1 et $1\frac{2}{3}$, il s'ensuit que la valeur $t = -2$ doit être rejetée.

2° Si on fait $t = -1$, les trois inégalités [6] deviennent

$$1 + 2t' > 0,\quad 3 - 3t' > 0,\quad 3 + t' > 0,$$

d'où

$$t' > -\tfrac{1}{2}\quad t' < +1,\quad t' > -3.$$

Entre $-\frac{1}{2}$ et $+1$ il n'y a pas d'autre nombre entier que 0; donc on pourra prendre $t = -1$ et $t' = 0$.

3° Si on fait $t=0$, les trois inégalités deviennent

$$2t'>0,\quad 1-3t'>0,\quad 7+t'>0,$$

d'où

$$t'>0,\quad t'<\tfrac{1}{3},\quad t'>-7.$$

Entre 0 et $\frac{1}{3}$ il n'y a aucun nombre entier; par conséquent la valeur $t=0$ doit aussi être rejetée

Les seules valeurs de t et t', auxquelles correspondent des valeurs entières et positives de x, y, z sont donc $t=-1$ et $t'=0$. En les substituant dans les formules [5] on obtient $x=1$, $y=3$, $z=3$; et cette solution est la seule qu'on doive admettre.

152. Pour second exemple, je proposerai les deux équations

$$6x+7y+3z+2u=100,$$
$$24x+12y+7z+3u=200.$$

En éliminant u, on a

$$30x+3y+5z=100.$$

Comme dans cette équation les termes $30x$ et 100 sont divisibles par 5, le mieux sera de prendre la valeur de z : elle sera

$$z=20-6x-\frac{3y}{5}.$$

Alors on voit que y doit être un multiple de 5. Par conséquent, on aura

$$y=5t,$$
$$z=20-6x-3t;$$

puis, en substituant ces valeurs dans la 1re des deux équations proposées, il vient

$$6x+35t+60-18x-9t+2u=100,$$

ou bien

$$-12x+26t+2u=40,$$

d'où

$$u=20+6x-13t.$$

Les trois inconnues y, z, u, se trouvent ainsi exprimées en fonction de x et de l'indéterminée auxiliaire t.

Pour résoudre les deux équations proposées en nombres positifs, il faut évidemment prendre x et t positifs, puisque x est une des inconnues primitives, et que $y=5t$. Mais il faut satisfaire aussi aux inégalités

$$20-6x-3t>0,\quad 20+6x-13t>0.$$

En les ajoutant x disparaît, et il reste $40-16t>0$, d'où $t<2\frac{1}{2}$; donc les seules valeurs qu'on doive donner à t sont $t=0,\ 1,\ 2$.

Avec la valeur $t=0$, on aurait

$$y=0,\quad z=20-6x,\quad u=20+6x;$$

et l'on voit qu'on peut faire $x=0$, 1, 2, 3. De là résultent, pour les équations proposées, les quatre solutions suivantes :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=20 \\ u=20, \end{cases}\quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=14 \\ u=26, \end{cases}\quad \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=8 \\ u=32, \end{cases}\quad \begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=2 \\ u=38. \end{cases}$$

Avec la valeur $t=1$, on aurait

$$y=5,\quad z=17-6x,\quad u=7+6x;$$

et les seules valeurs admissibles de x sont $x=0$, 1, 2. De là résultent les trois solutions

$$\begin{cases} x=0 \\ y=5 \\ z=17 \\ u=7, \end{cases}\quad \begin{cases} x=1 \\ y=5 \\ z=11 \\ u=13, \end{cases}\quad \begin{cases} x=2 \\ y=5 \\ z=5 \\ u=19. \end{cases}$$

Enfin, avec la valeur $t=2$ on aurait

$$y=10,\quad z=14-6x,\quad u=-6+6x.$$

Les seules valeurs admissibles de x sont $x=1$, 2 ; et de là résultent encore les deux solutions

$$\begin{cases} x=1 \\ y=10 \\ z=8 \\ u=0, \end{cases}\quad \begin{cases} x=2 \\ y=10 \\ z=2 \\ u=6. \end{cases}$$

En tout, neuf solutions. Il n'y en aurait plus que trois si l'on excluait celles dans lesquelles une inconnue est zéro.

153. Comme exercice, je placerai ici les énoncés suivants :

Problème. *Deux paysannes ont ensemble* 100 *œufs. L'une dit à l'autre : Quand je compte mes œufs par huitaines, il y a un surplus de* 7. *La seconde lui répond : Si je compte les miens par dizaines, je trouve aussi le même surplus de* 7. *Combien chaque paysanne avait-elle d'œufs ?*

Réponse : Nombre des œufs de la 1re = 63, 23 ;
Nombre des œufs de la 2e = 37, 77.

Problème. *Trouver trois nombres entiers tels que si on multiplie le* 1er *par* 3, *le* 2e *par* 5, *et le* 3e *par* 7, *la somme des produits*

soit 560 ; *et tels encore que si on multiplie le* 1er *par* 9, *le* 2e *par* 25, *et le* 3e *par* 49, *la somme des produits soit* 2920.

RÉPONSE : 1er nombre = 15, 50;
2e nombre = 82, 40;
3e nombre = 15, 30.

PROBLÈME. *Quelqu'un achète* 100 *pièces de bétail pour* 100 *louis, savoir : des porcs à* 3 *louis* $\frac{1}{2}$ *la pièce, des chèvres à* 1 *louis* $\frac{1}{3}$, *et des moutons à* $\frac{1}{2}$ *louis. Combien y avait-il d'animaux de chaque espèce ?*

RÉPONSE : Nombre des porcs = 5, 10, 15;
Nombre des chèvres = 42, 24, 6;
Nombre des moutons = 53, 66, 79.

PROBLÈME. *Un orfèvre a trois sortes d'argent ; le marc de la première contient* 7 *onces d'argent fin, le marc de la seconde* $5\frac{1}{2}$; *le marc de la troisième* $4\frac{1}{2}$. *Il veut composer un alliage dont le marc contienne* 6 *onces d'argent fin. Combien doit-il prendre, en nombres entiers, de marcs de chaque sorte pour que le nouvel alliage fasse un poids de* 30 *marcs?*

RÉPONSE : Nomb. des marcs de la 1re sorte = 10, 12, 14, 16, 18;
Nomb. des marcs de la 2e = 20, 15, 10, 5, 0;
Nomb. des marcs de la 3e = 0, 3, 6, 9, 12.

PROBLÈME. *Un fermier a acheté* 100 *pièces de bétail pour* 4000 *fr., savoir : des bœufs à* 400 *fr. la pièce, des vaches à* 200 *fr., des veaux à* 80 *fr., et des moutons à* 20 *fr. Combien y avait-il d'animaux de chaque espèce?*

RÉPONSE. En excluant les solutions qui renferment un zéro, le problème admet les dix suivantes :

Bœufs.....	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	4,	4;
Vaches....	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	1,	2;
Veaux.....	24,	21,	18,	15,	12,	9,	6,	3,	5,	2;
Moutons...	74,	76,	78,	80,	82,	84,	86,	88,	90,	92.

CHAPITRE VIII.

DU CARRÉ ET DE LA RACINE CARRÉE DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES. — CALCUL DES RADICAUX DU SECOND DEGRÉ.

Valeur ambiguë de la racine carrée. — Quantités imaginaires.

154. La quantité qui, élevée au carré, reproduit une quantité donnée, se nomme la *racine carrée* de cette quantité. En arithmétique, où il n'y a point de quantités négatives et où l'on ne considère que les valeurs absolues des nombres, une racine carrée ne peut avoir qu'une seule valeur. Il est évident, par exemple, que la racine carrée de 4 ne peut pas être autre que 2. Il en est encore de même en géométrie lorsqu'on demande quel est le côté du carré dont la surface est donnée.

Mais il en est autrement par rapport à l'algèbre, qui admet également, dans ses calculs, et les quantités positives, et les quantités négatives, et d'autres encore que nous ferons bientôt connaître. Il est clair en effet que 4 est aussi bien le carré de -2 que celui de $+2$; et en général, si l'on convient de désigner par $\sqrt{A}$ une quantité dont le carré soit A, la racine carrée de A sera aussi bien $-\sqrt{A}$ que $+\sqrt{A}$. On représente ces deux valeurs d'une manière abrégée en écrivant $\pm\sqrt{A}$.

Une proposition importante doit être démontrée ici : c'est que la quantité A n'a pas d'autre racine carrée que ces deux-là. En effet, les différentes racines carrées de A ne sont autres que les valeurs de x qui satisfont à l'équation $x^2 = A$, ou, ce qui est la même chose, à celle-ci

$$x^2 - A = 0.$$

Au lieu de $x^2 - A$, on peut écrire $x^2 - (\sqrt{A})^2$; puis, en décomposant cette différence de carrés en deux facteurs (**41**), on a

$$x^2 - A = (x - \sqrt{A})(x + \sqrt{A}).$$

Sous cette forme, on voit que toute valeur de x qui ne serait ni $+\sqrt{A}$, ni $-\sqrt{A}$, ne rendrait nul aucun des deux facteurs; donc elle ne saurait rendre nul le produit $x^2 - A$; donc la quantité A n'a point d'autre racine carrée que $\pm\sqrt{A}$.

Ainsi *la racine carrée d'une quantité a deux valeurs qui sont égales et de signes contraires, et elle n'en a pas davantage.*

155. A parler rigoureusement, l'expression $\sqrt{A}$ sufit sans le signe $\pm$, pour représenter les deux racines carrées de A : car elle désigne indifféremment toute quantité dont le carré est A. Lors donc que, pour indiquer ces deux racines, on écrit $\pm\sqrt{A}$, le radical est pris dans un sens restreint, lequel consiste à supposer que $\sqrt{A}$ ne désigne plus que l'une des deux valeurs.

156. Il peut arriver que la quantité placée sous le radical carré soit négative, comme dans l'expression $\sqrt{-4}$. Or, il n'existe aucune grandeur positive ou négative dont le carré soit négatif; c'est pourquoi l'on dit alors que les valeurs du radical sont *imaginaires*. A proprement parler, ce ne sont plus des quantités : cependant, comme on les soumet aux règles du calcul algébrique, on leur conserve cette dénomination; mais la qualification d'*imaginaires* suffit pour ôter toute équivoque. Par opposition, on appelle *réelles* les quantités positives ou négatives.

157. Tout radical carré imaginaire peut se transformer en un produit de deux facteurs, l'un réel, et l'autre égal à $\sqrt{-1}$. Soit le radical imaginaire $\sqrt{-A}$. La quantité A étant positive par elle-même, elle doit avoir deux racines carrées qui soient réelles. Nommons a l'une d'elles, celle qui est positive par exemple, on pourra toujours représenter $\sqrt{-A}$ par ay, pourvu qu'on détermine y de manière qu'on ait $(ay)^2 = -A$. Cette condition revient à $a^2y^2 = -A$; ou bien, puisque A est le carré de a, à $Ay^2 = -A$; ou bien encore, en divisant par A, à

$$y^2 = -1, \quad \text{d'où} \quad y = \pm\sqrt{-1}.$$

Or, pour avoir les valeurs de $\sqrt{-A}$, il faut multiplier a par celles de y; donc les valeurs de $\sqrt{-A}$ peuvent s'exprimer par $\pm a\sqrt{-1}$.

158. Par ce qui précède, on est conduit naturellement à distinguer, parmi les résultats qui se déduisent du calcul, deux espèces de *valeurs* ou *déterminations* : les unes, qu'on nomme *arithmétiques,* parce qu'elles sont tout à fait de la nature de celles qu'on trouve par les opérations de l'arithmétique, c'est-à-dire essentiellement réelles et positives; les autres, qu'on nomme *algébriques,* parce qu'elles comprennent les valeurs négatives et les imaginaires, qui ne doivent leur existence qu'aux combinaisons des signes de l'algèbre. Ces dénominations ont le mérite d'avoir une conformité parfaite avec les idées qu'elles sont destinées à rappeler.

Carré et racine carrée des monomes.

159. Soit un produit quelconque $pqr...$, on a

$$(pqr...)^2 = pqr... \times pqr... = p^2q^2r^2...;$$

donc *on fait le carré d'un produit en élevant les facteurs au carré.*

Si on fait le carré d'un facteur a^n, qui a déjà un exposant, on a $(a^n)^2 = a^n \times a^n = a^{2n}$: c'est-à-dire qu'il suffit de doubler l'exposant. Donc *on fait le carré d'un monome quelconque en élevant son coefficient au carré et en doublant les exposants.*

Suivant cette règle on aurait immédiatement

$$\left(\frac{3}{5}a^2b^3c\right)^2 = \frac{9}{25}a^4b^6c^2.$$

160. Par une réciprocité évidente, on conclut des règles ci-dessus que *la racine carrée d'un produit s'obtient en extrayant celle de tous les facteurs*; et que *la racine carrée d'un monome s'obtient en extrayant celle du coefficient et divisant les exposants par* 2.

Ces nouvelles règles donnent

$$\sqrt{pqr} = \sqrt{p}\,\sqrt{q}\,\sqrt{r}, \quad \sqrt{64a^4b^2} = 8a^2b.$$

161. Quand tous les facteurs d'un monome ou d'un produit ne sont point des carrés, on indique d'abord la racine carrée, et ensuite on simplifie le radical en mettant en dehors de la racine tous les facteurs carrés. Par exemple, s'il s'agit de $\sqrt{50a^5b^2c}$, on décompose la quantité placée sous le radical en $25a^4b^2 \times 2ac$; et alors on aura

$$\sqrt{50a^5b^2c} = \sqrt{25a^4b^2} \times \sqrt{2ac} = 5a^2b\sqrt{2ac}.$$

En général, *pour simplifier un radical carré, on décompose la quantité placée sous le radical en deux produits, dont l'un ne contienne que des facteurs carrés, et dont l'autre n'en contienne aucun; puis on extrait la racine du premier produit, et on indique celle du second.*

D'après cette règle, si on nomme a la racine carrée de A, on pourra, comme au nº **157**, écrire $\sqrt{-A} = \sqrt{a^2 \times -1} = a\sqrt{-1}$.

162. Quels que soient a et b, on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2};$$

donc *le carré d'une fraction algébrique s'obtient en élevant au carré son numérateur et son dénominateur.*

Donc aussi, *la racine carrée d'une fraction s'obtient en extrayant celle du numérateur et celle du dénominateur.*

Par cette règle on a

$$\sqrt{\frac{49a^4b^6}{16c^2d^4}} = \frac{7a^2b^3}{4cd^2}.$$

163. Quand le numérateur et le dénominateur ne sont point des carrés, on pourra indiquer la racine de chacun d'eux, et la simplifier ensuite s'il y a lieu ; mais plus ordinairement on fait en sorte qu'il n'y ait point de radical au dénominateur. A cet effet, on introduit dans les deux termes de la fraction les facteurs qui manquent au dénominateur pour être un carré, alors on peut en extraire la racine, et il ne reste de radical qu'au numérateur.

Ainsi, soit $\sqrt{\frac{3a^4b}{50c^3}}$: on remarquera que le nombre 50 devient un carré en le multipliant par 2, et que le facteur c^3 en sera un aussi en le multipliant par c. On multipliera donc les deux termes de la fraction par $2c$, et on aura

$$\sqrt{\frac{3a^4b}{50c^3}} = \sqrt{\frac{6a^4bc}{100c^4}} = \frac{\sqrt{6a^4bc}}{10c^2} = \frac{a^2\sqrt{6bc}}{10c^2}.$$

164. Je ne dis rien des signes ; mais il est toujours sous-entendu qu'une racine carrée doit être prise avec le signe ambigu $\pm$.

Quand on simplifie une racine qui ne peut pas s'extraire, le radical qui reste alors, étant pris dans le sens le plus général, suffit pour donner à l'expression ses deux valeurs. Il est clair en effet qu'en le prenant en $+$ et en $-$, on aura les deux valeurs de la racine indiquée. Ainsi, par exemple, je puis, sans aucune restriction, poser

$$\sqrt{3a^4b} = a^2\sqrt{3b}, \qquad \sqrt{-4a^2} = 2a\sqrt{-1} :$$

ces égalités auront tout à fait le même sens que si, distinguant les deux valeurs de chaque radical, j'eusse écrit

$$\pm\sqrt{3a^4b} = \pm a^2\sqrt{3b}, \qquad \pm\sqrt{-4a^2} = \pm 2a\sqrt{-1} :$$

Carré et racine carrée des polynomes.

165. Soit un polynome

$$a + b + c + d,$$

dans lequel a, b, c, d représentent des quantités quelconques.

Considérons tous les termes, excepté le dernier, comme n'en formant qu'un seul, et alors formons le carré de ce polynome comme celui d'un binome $m + d$: on aura

$$(a + b + c + d)^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2.$$

En formant de la même manière le carré de $a+b+c$, il vient

$$(a+b+c+d)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$+2(a+b+c)d+d^2.$$

Puis, en faisant le carré de $a+b$,

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$+2(a+b)c+c^2$$
$$+2(a+b+c)d+d^2.$$

De là on conclut que *le carré d'un polynome, quel que soit le nombre de ses termes, contient le carré du* 1[er] *terme, plus le double produit du* 1[er] *par le* 2[e], *plus le carré du* 2[e]; *et encore le double produit des deux premiers par le* 3[e], *plus le carré du* 3[e]; *et encore le double produit des trois premiers par le* 4[e], *plus le carré du* 4[e]; *et ainsi de suite.*

Remarquons en passant que si on effectue tous les doubles produits énoncés dans cette règle, le produit du polynome renfermera les carrés de tous les termes, plus tous les doubles produits de ces termes multipliés deux à deux.

166. Cette règle étant établie, proposons-nous d'extraire la racine carrée d'un polynome quelconque, que je nommerai P. Supposons que le polynome P contienne la lettre x, qu'il ait été ordonné de manière que les exposants de la lettre x aillent en décroissant, et qu'alors ce polynome soit

$$P=A+B+C+\dots$$

Désignons par $a+b+c+\dots$ la racine ordonnée de la même manière. Son carré devra reproduire le polynome P : or, d'après la règle ci-dessus, parmi les termes qui composent le carré de cette racine, celui dans lequel x a le plus haut exposant est évidemment a^2; donc A est le carré de a, donc *le* 1[er] *terme de la racine s'obtient en extrayant la racine carrée du* 1[er] *terme du polynome proposé.*

Retranchons de P le carré de ce terme : le reste que je nommerai R, sera

$$R=B+C+\dots;$$

et il devra contenir le double produit du 1[er] terme de la racine par le 2[e], plus le carré du 2[e], etc. Or, il est facile de voir que le double produit du 1[er] terme par le 2[e] doit contenir x à un plus haut exposant que les autres parties de R; donc B est ce double produit; donc *le* 2[e] *terme de la racine se trouve en divisant le* 1[er] *terme du reste* R *par le double du* 1[er] *terme de la racine.*

Maintenant que les deux premiers termes $a+b$ de la racine sont connus, ajoutons b à $2a$ et multiplions $2a+b$ par b : le produit sera égal au double du 1er terme multiplié par le 2e, plus le carré du 2e. Si on retranche ce produit du reste R, on aura donc un nouveau reste R′, lequel ne contiendra plus que le double produit des deux premiers termes de la racine par le 3e, plus le carré du 3e, etc. En raisonnant ici comme tout à l'heure, on reconnaît d'abord que, dans ce reste, le terme où x a le plus haut exposant est le double produit du 1er terme de la racine par le 3e; et par suite on conclut que *le* 3e *terme de la racine se trouve en divisant le* 1er *terme du reste* R′ *par le double du* 1er *terme de la racine.*

Les trois premiers termes $a+b+c$ de la racine feront trouver le 4e, comme les deux premiers ont fait trouver le 3e. Ainsi, on ajoutera le terme c, qu'on vient de déterminer, au double $2a+2b$ des deux premiers, on multipliera la somme $2a+2b+c$ par c, puis on soustraira le produit du reste R′. Par là on aura un nouveau reste R″; et *c'est encore en divisant le* 1er *terme de ce reste par le double du* 1er *terme de la racine qu'on obtiendra le* 4e *terme de cette racine.*

En continuant ainsi, on est sûr, quand le polynome P est un carré, de découvrir successivement tous les termes de la racine; car chaque division en fait trouver un.

On doit déjà reconnaître que la plus grande analogie existe entre la règle qui sert à extraire la racine carrée d'un polynome et celle qu'on emploie pour les nombres. Mais l'analogie s'apercevra mieux encore sur un exemple.

	Polynome donné.	Racine.
	$4x^4+12x^3+5x^2-6x+1$	$2x^2+3x-1$
	$-4x^4$	$4x^2+3x$
1er reste...	$+12x^3+5x^2-6x+1$	$4x^2+6x-1$
	$-12x^3-9x^2$	
2e reste...	$-4x^2-6x+1$	
	$+4x^2+6x-1$	
3e reste...	0 0 0	

On extrait la racine carrée du 1er terme $4x^4$, et on obtient ainsi le 1er terme $2x^2$ de la racine.

Du polynome donné on retranche le carré de ce terme, ce qui donne le 1er reste; puis on fait le double $4x^2$ de ce terme, et l'on

divise le 1er terme du reste par ce double, c'est-à-dire, $+12x^3$ par $4x^2$. Le quotient $+3x$ est le 2e terme de la racine.

A côté de $4x^2$, double du 1er terme de la racine, on ajoute le 2e terme $+3x$, on multiplie la somme $4x^2+3x$ par le 2e terme $3x$, puis on retranche le produit du 1er reste, ce qui donne un 2e reste. On divise encore le 1er terme $-4x^2$ de ce reste par le double $4x^2$ du 1er terme de la racine; et le quotient -1 sera le 3e terme de la racine.

Au double des deux premiers termes de la racine on ajoute le 3e, ce qui fait $4x^2+6x-1$; on multiplie cette somme par le 3e terme -1, et on retranche le produit du 2e reste. On a zéro pour 3e reste ; et de là on conclut que les termes trouvés $2x^2+3x-1$ composent la racine carrée du polynome donné.

167. En général, ce qui avertira tout à la fois que le polynome est un carré et que la racine est complète, c'est qu'alors on arrivera à un reste nul. En effet, par la manière même dont les calculs sont faits, chaque reste qu'on obtient n'est autre chose que le polynome proposé, diminué de toutes les parties qui composent le carré de la quantité trouvée à la racine par les opérations qui ont précédé. Lors donc que la racine sera complète, on ne peut pas manquer d'avoir un reste nul; et, réciproquement, dès qu'on parvient à un tel reste, il est évident que les termes écrits à la racine composent la racine exacte du polynome proposé.

D'un autre côté, quand le polynome donné ne sera point un carré, il est très-important de remarquer que les calculs en avertiront encore. Supposons toujours, comme on l'a fait jusqu'ici, qu'on ordonne de manière que les exposants de x soient décroissants, et observons qu'à chaque soustraction le 1er terme de la quantité sur laquelle se fait la soustraction est détruit : de là il suit que l'exposant de x doit aller en diminuant dans le premier terme des restes successifs, et par conséquent aussi dans les termes de la racine.

Cela posé, nommons K le dernier terme du polynome proposé P, c'est-à-dire le terme où x a le plus petit exposant; et soit k la racine carrée de K. Il est aisé de reconnaître que si P est un carré, k devra être le dernier terme de la racine; par conséquent la marche progressive du calcul devra le faire trouver. Or, si cela n'arrive pas, on est sûr que les calculs amèneront à la racine un terme de degré moindre que k; donc alors il sera évident que P

n'est point un carré. La conclusion serait la même si le calcul amenait le terme k et que le reste suivant ne fût pas nul.

168. Toutes les explications précédentes (**166** et **167**) semblent accommodées au cas où l'on ordonne les polynomes de manière que les exposants d'une lettre soient décroissants. Mais quand on adopte l'ordre contraire, elles subsistent encore, sauf une légère modification dans le caractère auquel on reconnaît que le polynome n'est pas un carré.

D'abord on aperçoit sans peine que la même marche de calcul fera encore connaître successivement tous les termes de la racine; et lorsqu'on parviendra à un reste nul, on pourra encore conclure que le polynome est un carré, et que les termes trouvés sont ceux de sa racine.

Ensuite, pour modifier le caractère auquel on juge que le polynome n'est point un carré, il suffit de remarquer que l'exposant de la lettre, d'après laquelle on ordonne, va en croissant dans les termes qu'on trouve successivement à la racine, et que dans le cas où le polynome est un carré, le calcul doit amener un dernier terme égal à la racine carrée du dernier terme de ce polynome; donc, si en effet on arrive à un pareil terme, sans trouver ensuite un reste nul, ou si on arrive à un terme de degré plus élevé, alors on pourra affirmer que le polynome n'est pas un carré.

169. Quelquefois cette conclusion s'aperçoit à la simple inspection du polynome : car nous avons dit que, dans le cas où il serait un carré, la partie de ce polynome qui renferme une lettre quelconque au plus fort ou au plus faible exposant doit être un carré; par conséquent, dès que cette condition vient à manquer à l'égard de l'une des lettres, le polynome ne saurait être un carré. Si cette impossibilité ne se montre pas tout d'abord, elle peut encore se manifester dans le cours des opérations, quand il se trouve un reste dont le 1er terme n'est pas divisible par le double du 1er terme de la racine.

170. Je terminerai par une observation que le lecteur a sans doute déjà faite. Quand on ordonne les polynomes par rapport à une lettre x, on peut rencontrer plusieurs termes où x ait le même exposant. Dans ce cas, on adoptera une des dispositions prescrites pour la division (**46**), et il est clair que nos raisonnements subsisteront en entier, aussi bien que les règles qui en ont été déduites. On peut aussi considérer tous les termes qui contiennent

une même puissance de x comme s'ils n'en formaient qu'un seul, mais alors les opérations partielles, devant s'effectuer sur des polynomes, ne pourront plus se faire à simple vue, et il faudra les développer à part, comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{l|l}
 & \text{Racine.} \\
\text{Polyn. donné} \left\{ \begin{array}{l} (a^2-4ab+4b^2)x^4-(2a^2-4ab)x^3 \\ +(a^2+4ab-6a-8b^2+12b)x^2 \\ -(4ab-6a)x+4b^2-12b+9 \end{array} \right. & \begin{array}{l} (a-2b)x^2-ax+2b-3 \\ \hline (2a-4b)x^2 \\ (2a-4b)x^2-ax \end{array} \\
-(a^2-4ab+4b^2)x^4 & (2a-4b)x^2-2ax+2b-3 \\ \hline
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste} \left\{ \begin{array}{l} -(2a^2-4ab)x^3 \\ +(a^2+4ab-6a-8b^2+12b)x^2 \\ -(4ab-6a)x+4b^2-12b+9 \end{array} \right. & \\
+(2a^2-4ab)x^3-a^2x^2 & \\ \hline
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste} \left\{ \begin{array}{l} (4ab-6a-8b^2+12b)x^2 \\ -(4ab-6a)x+4b^2-12b+9 \end{array} \right. & \\
-(4ab-6a-8b^2+12b)x^2 & \\
+(4ab-6a)x-4b^2+12b-9 & \\ \hline
\quad 0 \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

1re opération partielle.

$$\begin{array}{l|l}
a^2-4ab+4b^2 & a-2b \\ \cline{2-2}
-a^2 & 2a-2b \\ \hline
-4ab+4b^2 & \\
+4ab-4b^2 & \\ \hline
0 \qquad 0 &
\end{array}$$

2e opération partielle.

$$\begin{array}{l|l}
-2a^2+4ab & 2a-4b \\ \cline{2-2}
+2a^2-4ab & -a \\ \hline
0 \qquad 0 &
\end{array}$$

3e opération partielle.

$$\begin{array}{l|l}
4ab-6a-8b^2+12b & 2a-4b \\ \cline{2-2}
-4ab+8b^2 & 2b-3 \\ \hline
-6a+12b & \\
+6a-12b & \\ \hline
0 \qquad 0 &
\end{array}$$

Calcul des radicaux du second degré.

171. Le plus souvent les racines, de quelque ordre qu'elles soient, ne peuvent pas s'exprimer exactement sans le secours des radicaux; par conséquent les calculs dans lesquels ces racines doivent entrer se trouvent aussi compliqués de radicaux. Notre objet est ici d'exposer les différentes transformations ou réductions

qu'on opère sur les radicaux carrés. Elles sont, pour la plupart, déjà connues, et il suffira de les indiquer brièvement.

172. On a vu que la racine carrée d'un produit s'obtient en extrayant celle de chaque facteur (**160**); donc on a

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b},$$

Et réciproquement on a aussi

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}.$$

Par là on voit comment on passe un facteur hors d'un radical carré, et comment on le fait entrer sous ce radical lorsqu'il est en dehors.

173. Les règles ordinaires du calcul donnent

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b},$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c},$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}.$$

Ces exemples apprennent comment on peut, dans certains cas, faire disparaître les radicaux carrés qui embarrassent le dénominateur d'une fraction.

174. Soit l'expression $3a^2 + 5\sqrt{a^2b^3} - 2\sqrt{\frac{a^2}{b}}$. Simplifions d'abord les radicaux : on aura

$$\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2 \times b} = ab\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a^2}{b}} = \sqrt{\frac{a^2 \times b}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{b}.$$

Par suite, l'expression proposée pourra d'abord s'écrire ainsi, $3a^2 + 5ab\sqrt{b} - \frac{2a}{b}\sqrt{b}$; puis sous une forme équivalente,

$$3a^2 + \left(5ab - \frac{2a}{b}\right)\sqrt{b}.$$

Dans cet exemple on a réduit à un seul plusieurs radicaux joints entre eux par $+$ et par $-$, lesquels sont différents en apparence et se ramènent cependant à être *semblables*. On nomme ainsi ceux qui ne diffèrent que par les facteurs extérieurs.

175. Puisqu'on extrait la racine carrée d'un produit en extrayant celle de chaque factenr (**160**), on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, ou, ce qui est la même chose,

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab};$$

et puisqu'on extrait la racine carrée d'une fraction en extrayant celle du numérateur et celle du dénominateur (**162**), on a aussi

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ainsi s'effectuent la multiplication et la division des radicaux carrés : c'est-à-dire qu'on multiplie ou qu'on divise l'une par l'autre les quantités qui sont sous les radicaux, et qu'ensuite on met le résultat sous un radical de même degré.

Je ne m'étendrai pas davantage sur les radicaux du second degré, attendu qu'ils sont compris parmi les radicaux à indice quelconque, dont je m'occuperai dans le chapitre XI.

CHAPITRE IX.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ ET QUESTIONS QUI EN DÉPENDENT.

Résolution des équations du second degré à une seule inconnue.

176. Lorsque, par l'évanouissement des dénominateurs, ou par toute autre préparation, une équation ne renferme plus que des termes connus et des termes affectés du carré de l'inconnue, on peut toujours la ramener à la forme

[1] $$x^2 = \mathrm{A},$$

et alors sa résolution est facile. En effet, puisque le carré de x doit reproduire A, il s'ensuit que x est une racine carrée de A : or, cette quantité a deux racines carrées représentées par $\pm\sqrt{\mathrm{A}}$, et n'en a pas davantage (**154**) ; donc on aura toutes les solutions de l'éq. [1] dans les deux valeurs

$$x = \pm\sqrt{\mathrm{A}}$$

Exemple I. Soit l'équation

$$\frac{2x^2}{a} - 5b = a + \frac{3x^2}{b}.$$

On chasse d'abord les dénominateurs, et successivement il vient

$$2bx^2 - 5ab^2 = a^2b + 3ax^2,$$

$$(2b - 3a)x^2 = 5ab^2 + a^2b,$$

$$x^2 = \frac{5ab^2 + a^2b}{2b - 3a}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{5ab^2 + a^2b}{2b - 3a}}.$$

EXEMPLE II. $$\frac{9x-18}{5x}=\frac{x}{x+2},$$

$$9x^2-36=5x^2,\quad 4x^2=36,$$
$$x^2=9,\quad x=\pm 3.$$

EXEMPLE III. $$3x^2+17=5x^2+89,$$
$$2x^2=-72,\quad x^2=-36,$$
$$x=\pm\sqrt{-36}=\pm 6\sqrt{-1}.$$

177. Considérons maintenant l'équation la plus générale du 2e degré. Elle doit renfermer trois sortes de termes : les uns affectés du carré x^2 de l'inconnue, d'autres affectés de x au premier degré, et d'autres entièrement connus. Après avoir transposé tous les termes dans le premier membre, on pourra réunir en un seul tous ceux qui contiennent x^2, aussi en un seul ceux qui contiennent x, et aussi en un seul ceux qui sont tous connus. Alors l'équation prendra la forme

$$ax^2+bx+c=0.$$

On fait encore subir à cette équation une simplification, qui consiste à dégager le carré x^2 de son multiplicateur a. A cet effet, on divise tous les termes par a et il vient

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Si le terme en x^2 avait le signe —, on changerait tous les signes ; de sorte qu'on peut toujours ramener le premier terme à être x^2.

Soit fait, pour abréger, $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$: on aura

$$x^2+px+q=0;$$

et telle est la forme générale à laquelle on réduit les équations du second degré, p et q étant des quantités connues.

Par exemple, si l'on propose l'équation

$$\frac{3x}{2}-\frac{x^2}{3}=10-4x,$$

on la changera successivement en celles-ci :

$$9x-2x^2=60-24x,$$
$$-2x^2+33x-60=0,$$
$$x^2-\tfrac{33}{2}x+30=0.$$

Cette dernière équation est évidemment comprise dans l'équation $x^2+px+q=0$, en faisant $p=-\frac{33}{2}$, $q=30$.

178. Occupons-nous donc de résoudre l'équation générale

[2] $$x^2+px+q=0.$$

Cela serait facile si on pouvait lui donner la forme

$$(x+m)^2=n,$$

m et n étant des quantités connues. En effet, dans celle-ci on voit qu'il faut choisir x de manière que le carré de $x+m$ soit égal à n; donc $x+m$ doit être une racine carrée de n. Or, il y a pour n deux racines carrées, qu'on désigne par $\pm\sqrt{n}$; donc

$$x+m=\pm\sqrt{n};$$

et par suite, en transposant m,

$$x=-m\pm\sqrt{n}.$$

Revenons à l'équation [2], et cherchons à la mettre sous la forme $(x+m)^2=n$. En transposant q dans le second membre, elle devient d'abord

$$x^2+px=-q.$$

Maintenant rappelons que le carré d'un binome se composé du carré du 1er terme, plus le double produit du 1er par le 2e, plus le carré du 2e. Il suit de là qu'on peut regarder x^2+px comme les deux premières parties du carré de $x+\frac{1}{2}p$: car x^2 est le carré de x, et px est le double produit de x par $\frac{1}{2}p$. Le premier membre x^2+px sera donc le carré de $x+\frac{1}{2}p$, si on lui ajoute le carré de $\frac{1}{2}p$ ou $\frac{1}{4}p^2$. Or, on peut en effet lui ajouter ce carré, pourvu qu'on l'ajoute aussi au second membre ; et de cette manière l'équation deviendra

$$(x+\tfrac{1}{2}p)^2=\tfrac{1}{4}p^2-q.$$

Alors, en raisonnant comme pour l'équation $(x+m)^2=n$, on en tire d'abord

[3] $$x+\tfrac{1}{2}p=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q};$$

et par conséquent

[4] $$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}.$$

On a ainsi deux valeurs pour x. Il n'y en a pas d'autre : car, pour que $(x+\frac{1}{2}p)^2$ soit égal à $\frac{1}{4}p^2-q$, il faut que $x+\frac{1}{2}p$ soit égal à la racine carrée de $\frac{1}{4}p^2-q$; or, nous savons que cette racine n'a

que les deux valeurs désignées par $\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$; donc toutes les valeurs de x doivent se tirer de l'équation [3].

On nomme en général *racines* d'une équation toutes les valeurs de l'inconnue qui satisfont à cette équation. En conséquence, nous dirons que les valeurs [4] sont les racines de l'équation [2].

179. Si l'on veut vérifier ces valeurs, il suffit de les substituer tour à tour dans l'équation. En substituant la première, où le radical a le signe $+$, il vient

$$\left(-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}\right)^2+p\left(-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}\right)+q=0,$$
$$\tfrac{1}{4}p^2-p\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}+\tfrac{1}{4}p^2-q-\tfrac{1}{2}p^2+p\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}+q=0;$$

et, réduction faite, on voit que le premier membre est identiquement nul. La seconde valeur de x se vérifie semblablement, sans autre changement que celui du signe qui précède le radical.

180. On a fréquemment à résoudre des équations du 2e degré; pour cette raison, il est commode de traduire la formule [4] en langage ordinaire et d'établir ainsi une règle applicable à tous les cas. En observant que p est le coefficient de x pris avec le signe dont il est précédé dans l'équation [2], et que q est le terme tout connu écrit dans le premier membre, la règle sera celle-ci:

Lorsqu'une équation du second degré est ramenée à la forme $x^2+px+q=0$, *l'inconnue est égale à la moitié du coefficient de* x *pris avec un signe contraire, plus ou moins la racine carrée de la somme qu'on obtient en ajoutant au carré de cette moitié le terme tout connu, pris aussi avec un signe contraire.*

181. Appliquons cette règle à quelques exemples.

EXEMPLE I. Soit l'équation

$$x^2-10x+9=0.$$

Il faut remarquer: 1° qu'elle a déjà la forme prescrite dans la règle; 2° que le coefficient de x est -10, dont la moitié, avec un signe contraire, est $+5$; 3° que le terme tout connu est $+9$. Alors la règle donne sur-le-champ

$$x=5\pm\sqrt{25-9}=5\pm4;$$

et les deux valeurs de x sont:

$$x=5+4=9,\quad \text{et}\quad x=5-4=1.$$

EXEMPLE II. Soit l'équation

$$\frac{x}{2}+\frac{3}{x}=\frac{x+13}{3x}.$$

On la ramènera d'abord à la forme $x^2+px+q=0$. Pour chasser les dénominateurs, on multipliera tous les termes par $6x$, puis, en continuant les calculs, il viendra

$$3x^2+18=2x+26,$$
$$3x^2-2x-8 = 0,$$
$$x^2-\tfrac{2}{3}x-\tfrac{8}{3} = 0,$$
$$x = \tfrac{1}{3} \pm\sqrt{\tfrac{1}{9}+\tfrac{8}{3}},$$
$$x = \tfrac{1}{3} \pm\sqrt{\tfrac{1}{9}+\tfrac{24}{9}},$$
$$x = \tfrac{1}{3} \pm\tfrac{5}{3}.$$

Ainsi, les valeurs de x sont $x=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2$, et $x=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}$.

EXEMPLE III. $x-2=\dfrac{4x-9}{x}$,

$$x^2-2x=4x-9,$$
$$x^2-6x+9 =0,$$
$$x =3 \pm\sqrt{9-9},$$
$$x =3.$$

Dans ce cas, les deux valeurs de x se réduisent à une seule.

EXEMPLE IV. $100x^2-100x+41=0$,

$$x =\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}-\tfrac{41}{100}},$$
$$x =\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{25-41}{100}},$$
$$x =\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{16}{100}},$$
$$x =\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{2}{5}\sqrt{-1}.$$

Les deux valeurs de x sont *imaginaires*, à cause du radical $\sqrt{-\frac{16}{100}}$. Profitant de la remarque faite dans le nº **157**, j'ai extrait la racine carrée de $\frac{16}{100}$ sans faire attention au signe $-$, et j'ai remplacé ce radical par $\frac{2}{5}\sqrt{-1}$.

Composition de l'équation du 2e degré et de ses coefficients. — Discussion des racines.

182. On a décomposé, nº **154**, le premier membre de l'équation $x^2-A=0$ en deux facteurs $(x-\sqrt{A})(x+\sqrt{A})$: une décomposition analogue peut s'opérer dans l'équation générale

$$[2] \qquad x^2+px+q=0.$$

Remplaçons x^2+px par l'expression équivalente $(x+\frac{1}{2}p)^2-\frac{1}{4}p^2$: on aura

$$x^2+px+q=(x+\tfrac{1}{2}p)^2-(\tfrac{1}{4}p^2-q);$$

et comme $\frac{1}{4}p^2-q$ peut se changer en $(\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q})^2$, on mettra en

évidence la différence des carrés de $x+\frac{1}{2}p$ et de $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$. Or, cette différence est égale au produit de la somme de ces deux quantités par leur différence ; donc

$$x^2+px+q=\left(x+\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}\right)\left(x+\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}\right).$$

Telle est la décomposition que nous voulions faire connaître.

Elle fournit un nouveau procédé pour résoudre l'équation [2]. En effet, elle montre que les valeurs de x doivent rendre nul le produit ci-dessus. Or, ce produit devient nul en égalant à zéro l'un ou l'autre des facteurs; et en outre il est évident qu'il ne saurait devenir nul si aucun des facteurs n'est zéro : donc les valeurs de x, qui conviennent à l'éq. [2], doivent se tirer des équations

$$x+\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}=0,\quad x+\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}=0,$$

lesquelles donnent les racines, déjà connues (**178**),

[4] $$x=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q},\qquad x=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}.$$

183. De nouvelles propriétés se présentent ici, qui recevront plus tard une grande extension, et qu'il importe de remarquer dès à présent.

1° Il est évident que *les deux facteurs du premier membre de l'équation* $x^2+px+q=0$ *sont les différences qu'on obtient en retranchant de* x *chacune des deux racines*; de sorte qu'en nommant x' et x'' ces racines, on a

$$x^2+px+q=(x-x')(x-x'').$$

2° Si on effectue la multiplication $(x-x')(x-x'')$, on trouve

$$x^2-(x'+x'')x+x'x'';$$

et comme ce produit doit être identiquement égal à x^2+px+q, il s'ensuit qu'on a

$$p=-x'-x'',\quad q=x'x''.$$

Ces relations peuvent se vérifier immédiatement sur les valeurs [4]. Elles s'énoncent en ces termes : *Dans toute équation du 2e degré, ramenée en la forme* $x^2+px+q=0$, *le coefficient* p *du 2e terme est égal à la somme des deux racines, prises avec des signes contraires, et le terme tout connu* q *est égal au produit de ces racines.*

Quand on sait que les deux racines d'une équation du 2e degré sont réelles, les relations ci-dessus font connaître sur-le-champ la nature de ces racines. Par exemple, admettons que celles de l'équation $x^2-2x-7=0$ soient réelles : on conclura immédiate-

ment qu'elles sont de signes différents, car leur produit est égal au terme tout connu -7; et, en outre, que la plus grande est positive, car leur somme est égale à $+2$, coefficient de x pris avec un signe contraire.

184. Maintenant discutons les racines de l'équation [2]. Les valeurs générales de ces racines sont

[4] $$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q},$$

et le terme $\frac{1}{4}p^2$ est positif, quel que soit le signe de p.

Si q est négatif dans l'équation $x^2+px+q=0$, la quantité $\frac{1}{4}p^2-q$ sera positive et $>\frac{1}{4}p^2$; donc $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ sera une quantité réelle et plus grande, en valeur absolue, que $\frac{1}{2}p$; donc le terme $-\frac{1}{2}p$, placé devant le radical, ne changera point les signes des deux valeurs de ce radical; donc les deux valeurs de x seront de signes contraires entre elles. Il est d'ailleurs évident que la plus grande est de même signe que $-\frac{1}{2}p$, et par conséquent de signe contraire à p.

Si l'on a $q=0$, les deux valeurs de x sont $x=0$ et $x=-p$. Alors l'équation générale se réduit à $x^2+px=0$ ou $x(x+p)=0$; et il est clair que ses racines sont en effet $x=0$ et $x=-p$.

Si q est positif et $<\frac{1}{4}p^2$, le radical $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ sera encore réel, mais $<\frac{1}{2}p$; donc les deux valeurs de x seront de même signe que le terme $-\frac{1}{2}p$ placé devant le radical: c'est-à-dire qu'elles sont toutes deux positives quand p est négatif, et toutes deux négatives quand p est positif.

Si l'on a $q=\frac{1}{4}p^2$, les deux valeurs de x se réduisent à une seule, $x=-\frac{1}{2}p$. Dans ce cas, puisque $q=\frac{1}{4}p^2$, l'équation devient

$$x^2+px+\tfrac{1}{4}p^2=0 \quad \text{ou} \quad (x+\tfrac{1}{2}p)^2=0.$$

Le premier membre est donc un carré, et alors on voit clairement que l'inconnue n'a en effet que la seule valeur $x=-\frac{1}{2}p$; car aucune autre ne peut rendre ce carré égal à zéro.

Enfin, si q est positif et $>\frac{1}{4}p^2$, la quantité $\frac{1}{4}p^2-q$ placée sous le radical est négative, et les deux valeurs de x sont imaginaires. Changeons le signe de la quantité $\frac{1}{4}p^2-q$, et nommons r la racine carrée de $q-\frac{1}{4}p^2$. On aura $\frac{1}{4}p^2-q=-r^2$; donc

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}=\pm\sqrt{-r^2}=\pm r\sqrt{-1};$$

donc les valeurs de x pourront s'écrire ainsi

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm r\sqrt{-1}.$$

De $\frac{1}{4}p^2 - q = -r^2$ on tire $q = \frac{1}{4}p^2 + r^2$, et par suite l'équation générale devient

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 + r^2 = 0 \text{ ou } (x + \tfrac{1}{2}p)^2 + r^2 = 0.$$

Le premier membre est alors la somme de deux carrés, et, sous cette forme, on reconnaît pourquoi les deux valeurs de x sont imaginaires : c'est qu'il n'existe évidemment aucune valeur, soit positive, soit négative, qui, mise à la place de x, puisse rendre nulle la somme de ces deux carrés.

Particularités à remarquer dans les équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

185. Pour résoudre l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

on la divise d'abord par a, afin de lui donner la forme ordinaire

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

puis on en tire, par la règle générale (**180**),

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

ou, en réduisant au même dénominateur sous le radical,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Les règles connues (**175**) donnent

$$\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

donc les valeurs de x peuvent s'écrire ainsi :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Suivant qu'on aura $b^2 - 4ac > 0$ ou $= 0$ ou < 0, elles seront réelles et inégales, ou réelles et égales, ou bien imaginaires.

186. Mais le cas particulier que nous voulons remarquer ici, c'est celui où la quantité a, coefficient de x^2 dans l'équation proposée, diminue jusqu'à être zéro. Soit donc fait $a = 0$: les deux valeurs de x, prises séparément, deviendront

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2}}{0} = \frac{-b + b}{0} = \frac{0}{0},$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2}}{0} = \frac{-b - b}{0} = \frac{-2b}{0}.$$

La première se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; mais d'après les observations du nº **124**, il ne s'ensuit pas pour cela qu'elle soit indéterminée, et même on va montrer qu'elle ne l'est point. Quant à la seconde, elle est infinie.

Reprenons la valeur générale de la première racine,

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si a était facteur au numérateur et au dénominateur, on le supprimerait, puis on poserait $a = 0$, et l'on aurait la vraie valeur de x. A la vérité, on ne peut pas mettre en évidence ce facteur; mais la difficulté est facile à éluder. Multiplions le numérateur et le dénominateur par $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$: il viendra

$$x = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{-2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})}.$$

Le numérateur est alors le produit de la somme et de la différence des deux quantités $-b$ et $\sqrt{b^2 - 4ac}$; donc il est égal à la différence des carrés, savoir $b^2 - b^2 + 4ac$ ou $4ac$. On voit ainsi que $2a$ est facteur commun au numérateur et au dénominateur de la dernière expression. En le supprimant, elle devient

$$x = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}};$$

et si alors on y fait $a = 0$, elle donne $x = -\frac{c}{b}$, pour la vraie valeur de la racine qui s'est présentée d'abord sous la forme $\frac{0}{0}$.

Relativement à la valeur $x = \frac{-2b}{0}$, il y a seulement à observer que le diviseur *zéro* pouvant être regardé ici comme limite de grandeurs décroissantes, soit positives, soit négatives, il s'ensuit que la valeur infinie doit avoir le signe ambigu $\pm$ (**120**).

Ainsi, en résumé, les valeurs générales de x, déduites de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, deviennent, dans l'hypothèse $a = 0$,

$$x = \frac{-c}{b} \qquad x = \pm \infty.$$

Il est digne de remarque qu'on ait pour ce cas particulier trois valeurs de x, tandis que dans le cas général il n'en existe que deux.

Pour bien comprendre que ces valeurs conviennent véritablement à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, mettons-la sous la forme

$$\frac{-bx - c}{x^2} = a.$$

Lorsqu'on suppose $a=0$, la question est donc de trouver les valeurs qui peuvent rendre nulle l'expression fractionnaire $\frac{-bx-c}{x^2}$. On on voit tout d'abord que la valeur $x=\frac{-c}{b}$ la rend nulle; et comme la même expression peut s'écrire sous la forme $-\frac{b}{x}-\frac{c}{x^2}$, on reconnaît qu'elle devient aussi zéro par les valeurs $x=\pm\infty$ (*).

187. Considérons le cas plus particulier encore où l'on aurait à la fois $a=0$ et $b=0$. Alors les deux valeurs générales de x deviennent $\frac{0}{0}$. On a vu plus haut que la première peut se changer en

$$x=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Transformons de même la seconde : elle devient d'abord

$$x=\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)};$$ puis, en réduisant

$$x=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Maintenant, en faisant $a=0$ et $b=0$, les valeurs de x, ainsi transformées, donnent toutes deux $x=\infty$; et ici encore l'infini doit être pris avec le signe $\pm$.

Résolution de quelques problèmes qui dépendent du 2e degré.

188 PROBLÈME I. *Trouver un nombre tel qu'en le multipliant par un nombre double, le produit soit égal à un nombre triple augmenté de* 9.

Soit x le nombre demandé, cet énoncé donne sur-le-champ;

$$x\times 2x=3x+9;$$

et de cette équation on tire successivement

$$2x^2-3x-9=0,\quad x^2-\tfrac{3}{2}x-\tfrac{9}{2}=0,$$

$$x=\tfrac{3}{4}\pm\sqrt{\tfrac{9}{16}+\tfrac{9}{2}},\quad x=\tfrac{3}{4}\pm\sqrt{\tfrac{9}{16}+\tfrac{72}{16}},\quad x=\tfrac{3}{4}\pm\tfrac{9}{4}.$$

Donc enfin $\quad x=\frac{12}{4}=3 \quad$ et $\quad x=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}.$

(*) Dans la théorie analytique des courbes, ces valeurs répondent aux intersections de la ligne des abscisses x avec la courbe de 3e ordre, dont l'équation est $yx^2+bx+c=0$. Si on construit cette courbe, on reconnaît que l'axe des x la rencontre d'abord à une distance finie de l'origine, et, de plus, qu'il en est asymptote, tant du côté des x positifs que du côté des x négatifs, ce qui revient à dire qu'il la rencontre à l'infini dans l'un et l'autre sens.

La valeur positive $x=3$ satisfait à la question dans le sens précis de l'énoncé. Si dans l'équation primitive on change x en $-x$, elle devient

$$x\times 2x=9-3x;$$

et de là on conclut que la valeur négative $-\frac{3}{2}$, étant prise positivement, résout le problème dont l'énoncé demanderait *quel est le nombre qui, multiplié par son double, donne un produit égal à* 9 *diminué du triple de ce nombre.*

189. Problème II. *Partager un nombre donné* p *en deux parties dont le produit soit égal à un nombre donné* q.

En désignant par x l'une des deux parties du nombre p, l'autre sera $p-x$, et l'équation sera

$$x(p-x)=q,$$

ou bien $$x^2-px+q=0,$$

d'où $$x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Ces deux valeurs semblent annoncer deux manières de satisfaire à la question; mais leur somme étant égale au nombre à partager p, il s'ensuit qu'en prenant l'une d'elles pour x, l'autre sera $p-x$, c'est-à-dire qu'elles sont les deux parties cherchées. Ce résultat était d'ailleurs facile à prévoir : car x ne désignait pas l'une des parties plus que l'autre, et le calcul devait par conséquent les donner toutes deux pour valeurs de x.

D'après ce qui a été dit sur la composition des équations du 2e degré (**183**), on pouvait remarquer tout d'abord que les deux nombres inconnus, devant avoir pour somme p et pour produit q, sont les deux racines d'une équation du 2e degré dans laquelle le coefficient de x serait égal à $-p$, et le dernier terme égal à q; donc ils doivent être déterminés par l'équation $x^2-px+q=0$.

Le problème n'est pas toujours possible, car si on donne $q>\frac{p^2}{4}$ les valeurs de x sont imaginaires. La plus grande valeur que puisse avoir q, sans que le problème soit impossible, est $\frac{p^2}{4}$, et alors les deux valeurs de x sont égales à $\frac{p}{2}$. Donc le plus grand produit qu'on puisse faire avec les deux parties d'un nombre est égal au carré de la moitié de ce nombre.

190. Cette conséquence se présente immédiatement en pre-

nant pour inconnue la différence des deux parties cherchées. Nommons z cette différence, a la plus grande partie et b la plus petite. Comme leur somme est p, on aura (**92**)

$$a=\frac{p}{2}+\frac{z}{2}, \quad b=\frac{p}{2}-\frac{z}{2};$$

et, d'après l'énoncé, on doit avoir

$$\left(\frac{p}{2}+\frac{z}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{z}{2}\right)=q,$$

ou, en effectuant la multiplication,

$$\frac{p^2}{4}-\frac{z^2}{4}=q.$$

Cette équation montre que la plus grande valeur du produit a lieu lorsque la différence z est nulle, ou, ce qui est la même chose, lorsque les deux parties sont égales entre elles.

Pour trouver a et b, de l'équation ci-dessus on tire

$$\frac{z}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

et par conséquent on a

$$a=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \quad b=\frac{p}{2}\mp\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

On devra prendre les signes supérieurs ensemble, ou bien les signes inférieurs ensemble : mais on n'a toujours qu'une seule solution, puisqu'on ne fait ainsi que changer l'ordre des parties.

191. Problème III. *Déterminer, sur la droite qui joint deux lumières, le point qui est également éclairé par chacune.*

Je supposerai connu ce principe de physique, que les intensités d'une même lumière, pour des points qui en sont inégalement éloignés, sont entre elles en raison inverse des carrés de leurs distances à cette lumière : c'est-à-dire qu'à une distance double, triple, etc., l'intensité de cette lumière sera 4 fois, 9 fois, etc., plus petite.

Je nommerai a l'intensité de la première lumière pour les points placés à l'unité de distance, et b l'intensité de la seconde pour les points placés à la même distance. C'est par ces quantités que l'on compare les deux lumières entre elles, et l'on dit, pour cette raison, que a et b en sont les *intensités*.

C″ A C B C′

Soient A et B les deux lumières, et C le point cherché. Je ferai

$AB = d$, $AC = x$, d'où $BC = d - x$. D'après le principe cité, aux distances 2, 3, 4,... l'intensité de la lumière A serait $\frac{a}{4}, \frac{a}{9}, \frac{a}{16}, \ldots$; donc, pour le point C à la distance x, elle est $\frac{a}{x^2}$. Pareillement l'intensité de la lumière B, pour le même point C à la distance $d-x$, est $\frac{b}{(d-x)^2}$. Or l'énoncé exige que ces deux intensités soient égales; donc on a l'équation

$$[a] \qquad \frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}.$$

Elle peut s'écrire ainsi

$$(d-x)^2 = \frac{b}{a}x^2;$$

et, pour éviter d'introduire des radicaux dans le calcul, je mettrai c^2 au lieu du rapport de b à a, ce qui vient à désigner par c la racine carrée de ce rapport. Alors l'équation à résoudre sera

$$[b] \qquad (d-x)^2 = c^2x^2.$$

On pourrait développer le carré de $d-x$, et mettre cette équation sous la forme $x^2 + px + q = 0$; mais on la ramène sur-le-champ au 1er degré en extrayant la racine carrée des deux membres. On trouve ainsi, en donnant à chaque racine le signe $\pm$,

$$\pm(d-x) = \pm cx;$$

et, à cause de l'ambiguïté des signes, cette équation équivaut aux quatre suivantes :

$$[c] \qquad +(d-x) = +cx, \qquad +(d-x) = -cx,$$

$$[d] \qquad -(d-x) = +cx, \qquad -(d-x) = -cx.$$

Mais si on change tous les signes des deux dernières, on retombe sur les deux premières; par conséquent on se bornera à considérer les équations [c].

A ce sujet on peut remarquer d'une manière générale que toutes les fois qu'on extrait la racine carrée des deux membres d'une équation, il suffit de mettre le signe $\pm$ devant l'un d'eux.

Je résous donc les équations [c], et j'en tire les deux valeurs

$$x = \frac{d}{1+c}, \quad x = \frac{d}{1-c}.$$

Discussion. 1° Soit $c < 1$. Comme c^2 représente le rapport $\frac{b}{a}$, cette hypothèse revient à supposer la lumière A plus intense que B.

Alors la première valeur de x est positive, $< d$ et $> \frac{1}{2}d$. Donc il existe entre les deux lumières, et plus loin de A que de B, un point C également éclairé par chacune.

La seconde valeur de x est aussi positive, mais $> d$. Elle détermine un point tel que C', au delà de B par rapport à A ; et il est facile de reconnaître qu'en ce point l'intensité de la lumière qui émane de A est la même que celle qui émane de B. En effet, on est certain que cette valeur de x satisfait à l'équation [a]; donc, en la désignant par x', on doit avoir

$$\frac{a}{x'^2}=\frac{b}{(d-x')^2} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{x'^2}=\frac{b}{(x'-d)^2},$$

égalité dont les deux membres sont précisément les intensités dont il s'agit.

2° Soit $c > 1$: c'est-à-dire que l'intensité de la lumière B surpasse celle de A. Il est clair qu'on doit trouver pour le point B ce qui vient d'être dit du point A, et réciproquement. C'est ce que les valeurs de x confirment.

La première, qui est positive et $< \frac{1}{2}d$, montre qu'il existe entre A et B un point également éclairé par chaque lumière, mais qu'il est plus rapproché de A que de B.

La seconde valeur de x est négative : désignons-la par $-x'$. Comme cette valeur doit toujours satisfaire à l'éq. [a], on a

$$\frac{a}{x'^2}=\frac{b}{(d+x')^2}.$$

Or, si de l'autre côté de A on prend $AC''=x'$, le premier membre de l'égalité ci-dessus exprimera l'intensité de la lumière que le point C'' reçoit de A, et le second, celle de la lumière qu'il reçoit de B ; donc il est également éclairé par A et B. Ainsi, conformément au n° **104**, la valeur négative de x indique un simple changement de position dans la distance désignée par x

3° Soit $c = 1$, ce qui suppose deux lumières d'égale intensité. Les deux valeurs de x deviennent

$$x=\frac{d}{2}, \quad x=\frac{d}{0}.$$

La seconde étant infinie, il n'existe plus, à proprement dire, qu'un seul point également éclairé : il est déterminé par la première valeur, et c'est le milieu même de la ligne AB.

Pour montrer comment la valeur infinie peut convenir à la

question, remarquons que dans le cas actuel, où $c=1$, l'éq. [b] peut s'écrire ainsi :

$$\left(\frac{d-x}{x}\right)^2=1 \quad \text{ou} \quad \left(1-\frac{d}{x}\right)^2=1.$$

Alors on voit qu'en donnant à x une très-grande valeur, le premier membre différera très-peu de l'unité, et que cette différence peut être rendue aussi petite qu'on voudra en prenant x suffisamment grand. C'est là le sens qu'on doit attacher à la valeur infinie, laquelle a d'ailleurs ici le signe ambigu $\pm$.

192. Pour exercice, je proposerai encore les énoncés suivants :

Problème IV. *Deux ouvriers employés à des prix différents ont été payés au bout d'un certain temps. Le premier a reçu* 96 *fr., et le second, qui avait travaillé* 6 *jours de moins, a reçu* 54 *fr. Si le second avait travaillé tous les jours, et que le premier eût manqué* 6 *jours, ils auraient reçu tous deux la même somme : on demande combien de jours chacun a travaillé, et le prix de sa journée?* Réponse : le 1er a travaillé 24 jours et gagnait 4 fr. par jour; le 2e a travaillé 18 jours et gagnait 3 fr.

Problème V. *Un marchand fait escompter par un banquier deux billets; l'un de* 1577 *fr.* 90 *c., payable dans* 3 *mois, et l'autre de* 2605 *fr., payable dans* 7 *mois. Il reçoit pour le tout* 4050 *fr. : on demande le taux de l'intérêt d'après lequel l'escompte a été réglé.* Réponse : l'intérêt annuel était de 7 fr. 20 pour 100 fr.

Problème VI. *Trouver deux nombres* x *et* y *tels qu'en les multipliant respectivement par des nombres donnés* a *et* b, *la somme des produits soit égale à un nombre connu* p ; *et tels encore qu'en multipliant leurs carrés par les mêmes nombres* a *et* b, *la somme des nouveaux produits soit égale à un autre nombre connu* q. Réponse :

$$x=\frac{ap\pm\sqrt{ab[(a+b)q-p^2]}}{a(a+b)}, \quad y=\frac{bp\mp\sqrt{ab[(a+b)q-p^2]}}{b(a+b)}.$$

N. B. Si, à cause des deux inconnues, le lecteur trouve quelque difficulté à résoudre ce problème, il peut remettre à s'en occuper après le n° 194.

Équations à une seule inconnue qu'on résout comme celle du 2e degré. — Exemples qui renferment plusieurs inconnues et qui dépendent du 2e degré.

193. Lorsqu'une équation ne contient que deux puissances de l'inconnue, dont l'une a un exposant double de celui de l'autre, on peut la mettre sous la forme

$$[1] \qquad x^{2m}+px^m+q=0.$$

En considérant d'abord x^m comme l'inconnue, x^{2m} en sera le carré, et l'équation se résoudra comme celle du 2e degré. On a ainsi

$$x^m = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

Représentons d'une manière abrégée par a et b les deux valeurs de x^m, on aura

$$x^m = a \quad \text{et} \quad x^m = b;$$

et quand on saura résoudre ces équations, c'est-à-dire trouver toutes les valeurs de x qui satisfont à chacune d'elles, il est évident qu'on connaîtra toutes les solutions de l'éq. [1].

Ces équations sont de la classe de celles qu'on nomme *à deux termes,* et je remettrai à m'en occuper plus tard. Pour le moment je m'arrêterai au cas de $m = 2$. L'éq. [1] est alors

[2] $$x^4 + px^2 + q = 0:$$

en prenant x^2 pour inconnue on en tire d'abord

$$x^2 = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}, \quad x^2 = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q};$$

et ensuite, chacune de ces nouvelles équations donnant deux racines, l'éq. [2] en admettra quatre, savoir :

$$x = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}}, \quad x = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}}.$$

Supposons, par exemple, qu'on ait l'équation particulière

$$x^4 - 12x^2 - 64 = 0.$$

On fera dans les formules précédentes $p = -12$, $q = -64$; et elles donneront

$$x = \pm\sqrt{6 + \sqrt{36 + 64}} = \pm\sqrt{6 + \sqrt{100}} = \pm\sqrt{16} = \pm 4,$$
$$x = \pm\sqrt{6 - \sqrt{36 + 64}} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1}.$$

Ainsi, l'équation dont il s'agit a quatre racines, deux réelles et deux imaginaires : $x = \pm 4$, $x = \pm 2\sqrt{-1}$.

194. Les principes qui ont servi à résoudre les équations du 1er degré à plusieurs inconnues, reçoivent aussi leur application dans le deuxième degré.

EXEMPLE I. Soient les équations

[3] $$x + y = a, \quad x^2 + y^2 = b^2.$$

Pour les résoudre, de la première on tire

$$y = a - x;$$

on substitue cette valeur dans la 2ᵉ, laquelle devient successivement

$$x^2 + (a - x)^2 = b^2,$$
$$2x^2 - 2ax + a^2 = b^2,$$
$$x^2 - ax = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Cette dernière donne deux valeurs pour x, et en les portant dans l'expression $y = a - x$, on aura pour y deux valeurs correspondantes. Il vient ainsi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - a^2}, \\ y = \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - a^2}. \end{cases}$$

Il faut avoir bien soin de prendre les signes supérieurs ensemble, et les signes inférieurs ensemble. Les deux solutions qu'on obtient ainsi ne diffèrent que par le simple changement de x en y et de y en x ; et ce résultat était facile à prévoir, puisque ce changement n'en fait subir aucun aux éq. [3]. Une observation analogue se présente dans l'exemple suivant.

EXEMPLE II. Soient les équations

[4] $$x^2 + y^2 = a^2, \quad xy = b^2,$$

La 2ᵉ donne $y = \frac{b^2}{x}$, et par suite la 1ʳᵉ devient

$$x^2 + \frac{b^4}{x^2} = a^2 \quad \text{ou} \quad x^4 - a^2x + b^4 = 0.$$

En considérant d'abord x^2 comme l'inconnue, on tire de là

$$x^2 = \frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4};$$

et ensuite, si on prend séparément ces deux valeurs, on en aura quatre pour x, savoir :

[a] $$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}},$$

[b] $$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}}.$$

En mettant ces valeurs dans l'expression $y = \frac{b^2}{x}$, on obtiendra les valeurs correspondantes de y. Si on substitue d'abord les valeurs [a], il vient

$$y = \frac{b^2}{\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}}}.$$

Pour simplifier, on multipliera les deux termes de cette fraction

par le radical $\sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}}$: il en résulte

$$y = \frac{\pm b^2 \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}\right]\left[\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}\right]}}.$$

En réduisant le dénominateur on le trouve égal à b^2; donc

$$y = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}}.$$

Sans nouveau calcul, il est clair que les valeurs de y, correspondantes à celles de la formule [b], seraient

$$y = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}}.$$

On voit donc que les équations [4] admettent quatre solutions qui sont complétement connues. En prenant, dans chaque accolade ci-dessous les signes supérieurs ensemble et les signes inférieurs ensemble, ces solutions seront représentées assez distinctement de cette manière :

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 4b^4}}. \end{cases}$$

Les mêmes éq. [4] peuvent se résoudre plus simplement comme il suit. En ajoutant à la 1re le double de la 2e, et observant que $x^2 + y^2 + 2xy$ est le carré de $x + y$, il vient

$$(x+y)^2 = a^2 + 2b^2, \quad \text{d'où} \quad x + y = \pm\sqrt{a^2 + 2b^2}.$$

Pareillement, en retranchant de la 1re le double de la 2e, on a

$$(x-y)^2 = a^2 - 2b^2, \quad \text{d'où} \quad x - y = \pm\sqrt{a^2 - 2b^2}.$$

Maintenant qu'on connaît la somme $x + y$ et la différence $x - y$, la règle du nº **92** donnera les valeurs des deux inconnues. On peut d'ailleurs associer comme on voudra les signes des deux radicaux. En les prenant tous deux avec le même signe, il viendra

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{a^2 - 2b^2}\right), \\ y = \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2b^2} - \sqrt{a^2 - 2b^2}\right). \end{cases}$$

Puis, en les prenant avec des signes contraires, on aura

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2b^2} - \sqrt{a^2 - 2b^2}\right), \\ y = \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{a^2 - 2b^2}\right). \end{cases}$$

On obtient encore quatre solutions, comme par le premier procédé; mais elles se présentent sous une forme différente : au lieu de radicaux superposés, elles ne renferment que des radicaux séparés.

Comme les solutions trouvées dans chaque procédé doivent être les mêmes, on est certain que les valeurs déterminées par le second ne sont qu'une transformation de celles qu'on obtient par le premier. On expliquera tout à l'heure (**196**) une méthode de calcul pour opérer ces transformations.

Exemple III. Soient les équations générales

$$[5] \qquad x^2 + Px + Q = 0, \quad x^2 + P'x + Q' = 0,$$

dans lesquelles P, Q, P', Q', sont des fonctions quelconques de y. Par la soustraction, on en déduit celle-ci

$$(P - P')x + Q - Q' = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{Q' - Q}{P - P'}.$$

En mettant cette valeur de x dans l'une des éq. [5], dans la 1re, par exemple, il vient

$$(Q' - Q)^2 + P(Q' - Q)(P - P') + Q(P - P')^2 = 0,$$

ou, sous une autre forme,

$$(Q' - Q)^2 + (P - P')(PQ' - QP') = 0.$$

Cette équation ne contient plus que la seule inconnue y, et quand on saura la résoudre, elle fera connaître les valeurs de y. En les substituant dans l'expression de x écrite plus haut, on obtiendra les valeurs correspondantes de x.

195. Pour que l'analyse du 2e degré fût complète, il faudrait considérer les cas où les inconnues sont en plus grand nombre que les équations. Le plus simple est celui d'une équation unique entre deux inconnues x et y. Si on la résout par rapport à une des inconnues, y par exemple, on trouvera, en général, une expression qui renfermera x sous un radical; de telle sorte qu'en donnant à cette inconnue x des valeurs rationnelles quelconques, on en trouverait pour y, qui seraient irrationnelles. On peut alors se proposer de rechercher les valeurs rationnelles de x pour lesquelles les valeurs correspondantes de y sont aussi rationnelles. Mais la difficulté de ce problème, à moins qu'on ne le restreigne à quelques cas fort simples, est supérieure à de simples éléments. Consultez la *Théorie des nombres* de Legendre.

Racine carrée d'une quantité en partie commensurable et en partie incommensurable, ou bien en partie réelle et en partie imaginaire.

196. Proposons-nous d'*extraire la racine carrée d'une quantité en partie commensurable et en partie incommensurable.*

Si on fait le carré de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, a et b étant des quantités rationnelles, on trouve un résultat de la forme $A+\sqrt{B}$, dans lequel A et B sont des quantités rationnelles. De là on conclut réciproquement que la racine carrée d'une expression de cette dernière forme peut aussi, dans certains cas, se ramener à la première ; c'est cette transformation qu'il s'agit d'effectuer, lorsqu'elle est possible. Il faut donc considérer A et B comme des quantités rationnelles, $\sqrt{B}$ comme une quantité irrationnelle, et déterminer pour a et b, des valeurs rationnelles telles qu'on ait

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = A+\sqrt{B}.$$

En développant le carré, il vient

$$a+b+\sqrt{4ab} = A+\sqrt{B}.$$

Dans le 1[er] membre, $a+b$ doit être un nombre rationnel, et il n'y a que la partie $\sqrt{4ab}$ qui puisse être un nombre irrationnel. Or je dis qu'on doit avoir séparément les deux égalités

$$[1] \quad a+b=A, \qquad [2] \quad 4ab=B.$$

Supposons qu'il en soit autrement et isolons $\sqrt{4ab}$ dans le 1[er] membre ; il viendra $\sqrt{4ab}=A-a-b+\sqrt{B}$. Faisons $A-a-b=k$ afin d'abréger, puis élevons au carré. On aura

$$4ab=k^2+B+2k\sqrt{B}, \quad \text{ou} \quad 4ab-k^2-B=2k\sqrt{B}:$$

égalité absurde; car une quantité rationnelle n'est jamais égale à une quantité irrationnelle. L'absurdité ne peut cesser qu'en posant $k=0$, ou, ce qui est la même chose, $a+b=A$. Alors la dernière égalité se réduit à $4ab-B=0$ ou $4ab=B$, et l'on est ramené ainsi aux éq. [1] et [2].

Si on élève la 1[re] de ces équations au carré, et qu'on en retranche la 2[e], le premier membre de l'équation résultante sera le carré de $a-b$; donc

$$[3] \qquad a-b=\sqrt{A^2-B}.$$

Il est permis de supposer que a est la plus grande des deux quantités a et b, et pour cette raison on prendra le radical $\sqrt{A^2-B}$ avec le signe $+$.

Maintenant on connaît donc par les équations [1] et [3] la somme et la différence des inconnues a et b; par conséquent on aura

$$a=\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B}, \quad b=\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B}.$$

La question exige que les valeurs de a et de b soient rationnelles ;

or il est évident qu'il faut, pour que cette condition soit remplie, que $A^2 - B$ soit égal à un carré C^2.

Alors il viendra $a = \frac{A+C}{2}$, $b = \frac{A-C}{2}$; et par suite

$$[4] \qquad \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

Comme on suppose tacitement $\sqrt{B}$ positif, les radicaux du deuxième membre doivent se prendre tous deux avec $+$, ou tous deux avec $-$: autrement, en élevant ce membre au carré, on ne reproduirait pas le terme $+\sqrt{B}$, mais bien $-\sqrt{B}$.

Cette explication même prouve que si l'on avait $\sqrt{A-\sqrt{B}}$, il faudrait prendre les deux radicaux avec des signes contraires; et en conséquence on écrirait

$$[5] \qquad \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

Pour exemple, soit l'expression $\sqrt{12+\sqrt{140}}$. On a $A=12$, $B=140$, $A^2-B=4$. Ce dernier nombre est un carré, et l'on a $C=2$: on peut donc appliquer la formule [4], et il vient

$$\sqrt{12+\sqrt{140}} = \sqrt{\frac{12+2}{2}} + \sqrt{\frac{12-2}{2}} = \sqrt{7}+\sqrt{5}.$$

Soit encore l'expression $\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}$. On aura $A=1$, $B=4x^2-4x^4$, $\sqrt{A^2-B}$ ou $C=1-2x^2$. Puisque C est sans radical, et que d'ailleurs le second radical de l'expression proposée a le signe $-$, il y a lieu d'appliquer la formule [5], et il vient

$$\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - x.$$

C'est la même valeur de $\sqrt{1-x^2}$ qui entre dans les deux membres. En outre, on doit observer qu'il faudra mettre le signe $\pm$ devant le second, si on veut qu'il représente les deux valeurs du premier.

197. Lorsque la quantité A^2-B n'est pas un carré, les valeurs de a et de b ne sont plus rationnelles; mais il est clair qu'en les substituant dans $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, on n'en a pas moins une expression équivalente à $\sqrt{A+\sqrt{B}}$. Seulement, comme elle est alors beaucoup plus compliquée, elle est plus rarement employée. Cependant, quand $\sqrt{B}$ est imaginaire, elle conduit à un résultat qui mérite de fixer l'attention. Changeons B en $-B^2$, $A+\sqrt{B}$ devient $A+B\sqrt{-1}$; et ce qu'il y a de remarquable, c'est que la racine

carrée de $A+B\sqrt{-1}$ se ramène elle-même à une expression de la forme $a+b\sqrt{-1}$, dans laquelle a et b sont des quantités réelles, qui peuvent d'ailleurs, ainsi que A et B, n'être pas rationnelles.

Cette proposition devient évidente sur-le-champ en changeant B en $-B^2$ dans les calculs du numéro précédent. Alors, au lieu de $C=\sqrt{A^2-B}$, on a $C=\sqrt{A^2+B^2}$; donc

$$a=\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2},\qquad b=\frac{A-\sqrt{A^2+B^2}}{2}.$$

Le radical $\sqrt{A^2+B^2}$ étant $>A$, la valeur de a est positive, et celle de b est négative. Représentons-les par α^2 et $-\beta^2$, on aura $\sqrt{a}=\pm\alpha$, $\sqrt{b}=\pm\beta\sqrt{-1}$, et par suite

$$[6]\qquad \sqrt{A+B\sqrt{-1}}=\pm(\alpha+\beta\sqrt{-1}).$$

Je prends α et β, tous deux avec $+$, ou tous deux avec $-$, parce que le produit $2\alpha\beta$ doit être égal à B, qui est supposé positif. S'il y avait $-$ devant $B\sqrt{-1}$, il est clair qu'alors on devrait écrire

$$[7]\qquad \sqrt{A-B\sqrt{-1}}=\pm(\alpha-\beta\sqrt{-1}).$$

Il serait facile de parvenir directement à ces dernières formules en posant $\sqrt{A+B\sqrt{-1}}=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et en déterminant pour α et β des valeurs réelles telles que $A+B\sqrt{-1}$ soit le carré de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Je laisserai cet exercice au lecteur.

Pour offrir une application, choisissons l'expression très-simple $\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$. En la comparant avec $\sqrt{A\pm B\sqrt{-1}}$, on a $A=0$, $B=1$, $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\beta=\sqrt{\frac{1}{2}}$; donc

$$\sqrt{+\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}\right),$$
$$\sqrt{-\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}\right).$$

198. *Remarque.* Ajoutons les formules [6] et [7], en ne prenant que le signe $+$ pour chacune d'elles : les imaginaires se détruiront, et il restera

$$\sqrt{A+B\sqrt{-1}}+\sqrt{A-B\sqrt{-1}}=2\alpha=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ainsi, dans le cas particulier de $A=0$ et $B=1$, on aurait

$$\sqrt{+\sqrt{-1}}+\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{2}.$$

Remarque sur les *maximums* et les *minimums*.

199. On a trouvé plus haut (**189**) que le produit *maximum* qu'il est possible de former avec les deux parties d'un nombre est

égal au produit de ses deux moitiés. Cette proposition peut être généralisée en ces termes : *Le produit de plusieurs nombres, dont la somme est égale à un nombre donné, devient* maximum *quand ces nombres sont égaux entre eux.*

Supposons qu'on ait $a+b+c+d+...=p$, et que parmi les différentes manières de choisir les nombres a, b, c, d,... sans que cette condition cesse d'avoir lieu, on ait pris celle qui rend le produit *abcd... maximum* : je dis qu'alors tous ces nombres sont égaux. En effet, si a et b, par exemple, étaient inégaux, on aurait (**189**)

$$ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

et par conséquent

$$abcd....<\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)cd....$$

Dans le second produit, la somme des facteurs est la même que dans le premier, c'est-à-dire égale à p. Donc le produit *abcd...* n'est pas un *maximum,* à moins que tous ses facteurs ne soient égaux entre eux.

200. Le procédé du nº **189**, par lequel on a reconnu le produit *maximum* des deux parties d'un nombre est susceptible d'extension. Supposons qu'une fonction soit composée d'une indéterminée x, combinée avec des quantités données, et qu'on demande la valeur de x pour laquelle la fonction est *maximum* ou *minimum*. On raisonnera d'abord comme s'il fallait rendre cette fonction égale à une quantité quelconque z : on aura ainsi une équation d'où l'on tirera la valeur de x, et alors on cherchera s'il existe quelque valeur de z au delà ou en deçà de laquelle les valeurs correspondantes de x deviennent imaginaires. Dans le premier cas, cette valeur de z est un *maximum* que l'expression proposée ne peut point dépasser; dans le second, c'est un *minimum.*

Par exemple, soit la fraction

$$\frac{x^2-2x+2}{2x-2}.$$

En l'égalant à z, on a l'équation $\dfrac{x^2-2x+2}{2x-2}=z$, d'où l'on tire

$$x=z+1\pm\sqrt{z^2-1}.$$

On voit sur-le-champ qu'en faisant $z=+1$, on a $x=2$, et

que les valeurs de z, un peu moindres que 1 rendent x imaginaire ; donc l'expression proposée a une valeur *minimum*, laquelle est égale à 1 et correspond à $x=2$.

Pareillement, en faisant $z=-1$, on a $x=0$; et une valeur négative de z un peu plus petite que 1 rendrait x imaginaire. Or, en algèbre, des quantités négatives qui, abstraction faite du signe —, vont en diminuant, doivent être regardées, quand on n'en sépare point le signe, comme croissantes : on peut donc dire que les valeurs de z un peu plus grandes que -1 rendent x imaginaire ; donc $z=-1$ est un *maximum*, lequel correspond à $x=0$.

Le caractère essentiel d'un *maximum* n'est pas de surpasser toutes les autres valeurs, mais seulement celles qui le précèdent et qui le suivent immédiatement. Une observation analogue doit se faire sur le *minimum*. Je n'insiste pas ici sur la détermination des *maximums* et des *minimums* : jusqu'à présent elle a toujours été comprise parmi les applications du calcul différentiel.

CHAPITRE X.

PUISSANCES ET RACINES EN GÉNÉRAL.

Puissances et racines des monomes. — Exposants fractionnaires.

201. Soit un produit $pqr...$, et n un nombre positif quelconque : on a

$$(pqr...)^n = pqr... \times pqr... \times pqr... \times \text{etc.}$$
$$= ppp... \times qqq... \times rrr... \times \text{etc.}$$
$$= p^n q^n r^n ... ;$$

donc *on élève un produit à une puissance en élevant chaque facteur à cette puissance.*

S'il s'agit d'une quantité a^m qui a déjà un exposant, on aura

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times ... = a^{m+m+m+...} = a^{mn} ;$$

donc *on élève à une puissance une quantité qui est déjà affectée d'un exposant, en multipliant cet exposant par le degré de la puissance.*

Si l'on veut élever à une puissance un monome quelconque, on

peut le regarder comme un produit, et en conséquence élever tous les facteurs à cette puissance : or, cela revient *à élever le coefficient à cette puissance et à multiplier tous les exposants par le degré de cette puissance.*

Lorsqu'une quantité est positive, toutes ses puissances sont positives : mais lorsqu'elle est négative, il est clair, d'après la règle des signes, qu'il y aura $+$ devant la 2e puissance, $-$ devant la 3e, $+$ devant la 4e, etc. Ainsi, en général, *quel que soit le signe d'une quantité, les puissances paires de cette quantité ont le signe* $+$, *et les puissances impaires conservent le signe de cette quantité.*

Au moyen des règles ci-dessus, on aura

$$(\pm 2a^3b^5c)^4 = +16a^{12}b^{20}c^4, \qquad (\pm 2a^3b^5c)^5 = \pm 32a^{15}b^{25}c^5.$$

202. On peut renverser ces règles, et on obtiendra, pour l'extraction des racines, les règles suivantes :

1° *On extrait la racine d'un produit en extrayant la racine de chaque facteur.*

2° *On extrait la racine d'une quantité qui a un exposant en divisant cet exposant par le degré ou l'indice de la racine.*

3° *On extrait la racine d'un monome quelconque en extrayant celle du coefficient, et en divisant les exposants de chaque lettre par l'indice de la racine.*

4° *Quand la racine à extraire est d'indice pair, elle doit avoir le signe ambigu* $\pm$; *et quand elle est d'indice impair, elle a le même signe que la puissance.*

Par ces règles on trouve

$$\sqrt[4]{81a^{16}b^{12}} = \pm 3a^4b^3, \qquad \sqrt[5]{32a^{10}b^5} = 2a^2b,$$
$$\sqrt[5]{-32a^5b^{15}} = -2ab^3.$$

203. Quand le coefficient d'un monome n'est point une puissance exacte de l'ordre marqué par l'indice de la racine à extraire ou que les exposants des différents facteurs ne sont point divisibles par cet indice, la racine du monome s'indique d'abord au moyen du signe $\sqrt{\ }$; puis on simplifie le radical, comme on l'a déjà fait pour le radical carré. Par exemple, soit $\sqrt[5]{96a^7b^5c^{11}}$. On observera que $96 = 2^5 \times 3$, $a^7 = a^5 \times a^2$, $c^{11} = c^{10} \times c$; donc

$$\sqrt[5]{96a^7b^5c^{11}} = \sqrt[5]{2^5a^5b^5c^{10} \times 3a^2c} = 2abc^2\sqrt[5]{3a^2c}.$$

C'est-à-dire que *pour simplifier un radical, on décompose la quantité sous le radical en deux facteurs, dont l'un ne renferme que des*

puissances exactes de même ordre que la racine à extraire, et dont l'autre n'en renferme aucune; puis on extrait la racine du premier facteur, et l'on indique celle du second.

204. Aucune quantité réelle, positive ou négative, si on l'élève à une puissance paire, ne peut donner de résultat négatif; par conséquent, *toute expression composée d'un radical de degré pair, placé sur une quantité négative, représente une quantité imaginaire.*

Telles sont, en supposant que a et b soient des grandeurs positives par elles-mêmes,

$$\sqrt[4]{-a},\quad \sqrt[6]{-a^5},\quad \sqrt[8]{-2a^4b^3}.$$

Mais toutes ces quantités peuvent, de même que les radicaux carrés imaginaires (**157**), se transformer en produits dans lesquels il n'entre d'autre imaginaire qu'une racine de -1. Par exemple, il est clair qu'on a

$$\sqrt[4]{-a} = \sqrt[4]{a \times -1} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{-1}.$$

205. De même que la division a conduit aux exposants négatifs, de même l'extraction des racines mène à l'emploi des exposants fractionnaires. D'après la règle 2[e] du n° **202**, si l'on veut extraire la racine 5[e] de a^{10}, on doit diviser l'exposant par 5, et la racine cherchée est a^2. Mais en se bornant à indiquer la division, on peut écrire $\sqrt[5]{a^{10}} = a^{\frac{10}{5}}$.

Si l'exposant de a n'était point divisible par 5, la racine ne pourrait plus s'extraire; mais rien n'empêche d'indiquer encore la division de l'exposant, lequel aura alors pour dénominateur l'indice de la racine. Les algébristes ont en effet adopté cette convention, et en conséquence ils regardent comme équivalentes les deux expressions $\sqrt[n]{a^m}$ et $a^{\frac{m}{n}}$.

Arrangements, permutations, combinaisons.

206. Pour former une puissance quelconque d'un binome, on sera conduit incidemment à résoudre une question qui exige quelques développements, et dont il est bon de connaître la solution d'avance. Elle fait d'ailleurs partie d'une théorie utile dans un grand nombre de recherches, et surtout dans le calcul des probabilités. Cette théorie, que je vais exposer ici, est celle des *arrangements*, des *permutations* et des *combinaisons*.

207. *Arrangements*. Plusieurs lettres, a, b, c, d, e,... étant

données, imaginons qu'on les prenne deux à deux de toutes les manières possibles, en sorte que chaque assemblage de deux lettres soit différent des autres, ou par les lettres qui le composent, ou par l'ordre dans lequel elles sont écrites : on aurait ainsi ce qu'on nomme les *arrangements deux à deux* des lettres données. On comprend de même ce qu'on entend par *arrangements trois à trois, quatre à quatre*, etc. Rien de plus simple que de composer ces différents arrangements et d'en déterminer le nombre. Le seul soin à prendre sera de suivre un ordre qui les fasse trouver tous sans en répéter aucun.

Pour avoir les arrangements 2 à 2, il suffit de placer, à côté de chaque lettre, alternativement chacune des lettres restantes. De cette manière on obtient des arrangements tels que

$$\begin{array}{llll} ab, & ac, & ad, & ae,\ldots. \\ ba, & bc, & bd, & be,\ldots. \\ \text{etc.}; \end{array}$$

et en même temps on voit qu'en désignant par m le nombre des lettres a, b, c,.... et par A_2 le nombre de leurs arrangements 2 à 2, on aura

$$A_2 = m(m-1).$$

On passe aux arrangements 3 à 3 en plaçant, après chaque arrangement de deux lettres, alternativement chacune des lettres qui n'entrent pas dans cet arrangement. Il vient ainsi

$$\begin{array}{lll} abc, & abd, & abe,\ldots. \\ acb, & acd, & ace,\ldots. \\ \text{etc.}; \end{array}$$

et en nommant A_3 le nombre de tous ces arrangements 3 à 3, on a

$$A_3 = A_2(m-2) = m(m-1)(m-2).$$

On s'élèverait semblablement aux arrangements 4 à 4; et, pour en connaître le nombre, on aurait la formule

$$A_4 = A_3(m-3) = m(m-1)(m-2)(m-3).$$

Chaque fois qu'on s'élèvera à des arrangements qui auront une lettre de plus, il est clair qu'il s'introduira dans la formule un facteur de plus, lequel sera inférieur d'une unité au facteur placé avant lui. Dès lors on peut conclure avec certitude que l'expression générale du nombre des arrangements n à n devra renfermer n facteurs pris consécutivement dans la suite m, $m-1$, $m-2$, etc.

Le dernier facteur sera donc $m-(n-1)$ ou $m-n+1$, et par conséquent, en appelant A_n le nombre des arrangements de m lettres n à n, on doit avoir

$$[1] \qquad A_n = m(m-1)(m-2)....(m-n+1).$$

En faisant $n=2, 3, 4$, le dernier facteur $m-n+1$ se réduit successivement à $m-1$, $m-2$, $m-3$, et l'on retrouve les valeurs de A_2, A_3, A_4.

208. *Permutations.* Après avoir placé plusieurs lettres les unes à côté des autres, si on change de toutes les manières possibles l'ordre de ces lettres, on formera leurs *permutations.* Les permutations de n lettres ne sont donc autre chose que les arrangements de ces n lettres n à n, et par conséquent on peut calculer leur nombre par la formule [1], en faisant $m=n$. Si on représente par P_n le nombre des permutations de n lettres, on aura $P_n = n(n-1)(n-2)...1$, ou, en renversant l'ordre des facteurs,

$$[2] \qquad P_n = 1.2.3....n.$$

On peut trouver cette formule directement comme il suit. Avec 2 lettres il n'y a que deux permutations. Celles de 3 lettres se formeront en plaçant alternativement, après chaque lettre, les permutations des deux autres, ce qui donnera 2.3 permutations. En continuant ce raisonnement, on voit que le nombre des permutations de 4 lettres est 2.3.4, et qu'en général, pour n lettres, ce nombre serait $2.3.4....n$.

209. *Combinaisons.* Lorsque parmi les arrangements n à n on ne conserve que ceux qui diffèrent entre eux par une ou plusieurs lettres, ceux qu'on obtient ainsi sont désignés sous le nom de *combinaisons* ou de *produits.* Par exemple, abc et bca ne forment qu'une seule combinaison ou qu'un seul produit.

Parmi les arrangements de m lettres n à n, il est clair que chaque combinaison de n lettres doit se trouver répétée autant de fois qu'il y a de permutations possibles entre les n lettres de cette combinaison. Donc, en divisant le nombre total des arrangements de m lettres n à n par celui des permutations de n lettres, on obtiendra le nombre des combinaisons de m lettres n à n. Ainsi, ce dernier nombre étant désigné par C_n, il sera donné par la formule

$$[3] \qquad C_n = \frac{A_n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)..(m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3.......\ n}.$$

Si on veut avoir en particulier le nombre des combinaisons 2 à 2, 3 à 3, etc., il faudra faire $n=2$, 3, etc.; et il viendra

$$C_2=\frac{m(m-1)}{1\,.\,2},\quad C_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3},\ \text{etc.}$$

L'hypothèse $n=1$ donne $C_1=m$; en effet les combinaisons de m lettres une à une ne peuvent être que ces lettres elles-mêmes.

210. Le nombre des combinaisons qu'on peut faire avec des lettres étant essentiellement entier, il s'ensuit que la division indiquée dans la formule [3] doit s'effectuer exactement. Donc *un produit de* n *nombres entiers consécutifs est toujours divisible par le produit des* n *premiers nombres entiers.*

Binome de Newton, dans le cas de l'exposant entier positif.

211. Tout binome peut être représenté par $x+a$, et la question est de trouver une formule générale au moyen de laquelle on puisse obtenir immédiatement une puissance quelconque de $x+a$ sans passer par toutes les précédentes. La formule qui atteint ce but est peut-être la plus importante de l'analyse : on l'appelle vulgairement *binome* de *Newton,* du nom de son inventeur.

La première idée qui se présente est de faire les puissances successives de $x+a$ par voie de multiplication, et d'examiner s'il est possible d'y apercevoir une loi qui permette de former immédiatement une puissance quelconque, sans passer par les puissances inférieures. Ces calculs se présentent comme il suit :

$$\begin{array}{rl}
 & x^2+ax \\
 & \quad\ +ax+a^2 \\
(x+a)^2= & x^2+2ax+a^2. \\
 & x^3+2ax^2+a^2x \\
 & \quad\ +ax^2+2a^2x+a^3 \\
(x+a)^3= & x^3+3ax^2+3a^2x+a^3. \\
 & x^4+3ax^3+3a^2x^2+a^3x \\
 & \quad\ +ax^3+3a^2x^2+3a^3x+a^4 \\
(x+a)^4= & x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4.
\end{array}$$

La loi générale des exposants est évidente, mais celle des coefficients ne l'est pas. A la vérité, on voit bien que ceux du premier terme et du dernier sont égaux à l'unité, et que ceux du second et de l'avant-dernier sont égaux à l'exposant du binome ; et même,

pour les termes intermédiaires, on reconnaît bien encore que les coefficients également éloignés des extrêmes sont égaux, mais leur composition ne s'aperçoit point.

Ces coefficients proviennent des réductions qu'entraînent les termes semblables. Or, en multipliant entre eux des binomes tels que $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., dont les seconds termes sont différents, ces réductions n'auraient plus lieu, et il peut se faire qu'alors la composition des termes du produit se manifeste.

212. Considérons donc les produits successifs de ces binomes. Voici les trois premiers :

$$(x+a)(x+b) = \begin{array}{r|l} x^2+a & x+ab, \\ +b & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = \begin{array}{r|r|l} x^3+a & x^2+ab & x+abc, \\ +b & +ac & \\ +c & +bc & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = \begin{array}{r|r|r|l} x^4+a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd. \\ +b & +ac & +abd & \\ +c & +bc & +acd & \\ +d & +ad & +bcd & \\ & +bd & & \\ & +cd & & \end{array}$$

En considérant comme un seul terme tous ceux qui renferment la même puissance de x, on retrouve ici, pour les exposants de x, la même loi que dans les puissances de $x+a$: c'est-à-dire que *dans le premier terme l'exposant de* x *est égal au nombre des binomes facteurs, et qu'il diminue progressivement d'une unité jusqu'au dernier terme, où il est zéro.*

La loi suivant laquelle se composent les multiplicateurs de ces puissances est également facile à apercevoir. *La plus haute puissance est multipliée simplement par l'unité ; celle dont l'exposant a une unité de moins l'est par la somme des seconds termes des binomes ; celle qui a* 2 *unités de moins, l'est par la somme des divers produits qu'on obtient en combinant ces seconds termes* 2 *à* 2 ; *celle qui a* 3 *unités de moins, l'est par la somme des produits qu'on obtient en combinant ces seconds termes* 3 *à* 3 ; *ainsi de suite jusqu'au dernier terme, où l'exposant de* x *est zéro, et qui est égal au produit de tous les seconds termes des binomes.*

La marche qu'on suit dans les multiplications successives suffit

pour convaincre que ces lois s'étendent à tant de binomes qu'on voudra; mais s'il restait encore quelque doute, la démonstration suivante le dissiperait.

Admettons pour un moment que ces lois soient vraies pour le produit d'un certain nombre m de binomes; je vais prouver qu'elles le seront encore en prenant un binome de plus. Soit

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + Y,$$

le produit de m binomes $x+a$, $x+b$, $x+c$.... Si on le multiplie par un nouveau binome $x+l$, il viendra

$$\begin{array}{l|l|l|l} x^{m+1} + A & x^m + B & x^{m-1} + C & x^{m-2}\ldots\ldots \\ \quad\;\; + l & \quad + lA & \quad\;\; + lB & \ldots\ldots + lY. \end{array}$$

On reconnaît sur-le-champ que la loi des exposants de x est la même : car l'exposant de x, dans le premier terme, est égal au nombre des binomes facteurs, et il décroît successivement d'une unité jusqu'au dernier terme, qui ne contient plus x.

La loi des coefficients se soutient également. D'abord il est clair que celui du 1er terme est encore l'unité.

Dans le 2e terme, où l'exposant de x a une unité de moins, le coefficient est $A+l$. Or, A étant la somme des seconds termes des m binomes $x+a$, $x+b$,... il s'ensuit que $A+l$ est celle des seconds termes des $m+1$ binomes $x+a$, $x+b$,... $x+l$.

Dans le 3e terme, où l'exposant de x a 2 unités de moins, le coefficient est $B+lA$. Or, d'une part, B exprime la somme des produits 2 à 2 des m seconds termes a, b, c...; et, d'autre part, lA est celle des produits de ces m termes par l : donc $B+lA$ est la somme de tous les produits 2 à 2 qu'on peut former avec les $m+1$ seconds termes a, b, c,... l.

Dans le 4e terme, où l'exposant de x a 3 unités de moins, le coefficient est $C+lB$. Or, d'une part, C exprime la somme des produits 3 à 3 qu'on peut former avec les m quantités a, b, c,...; et, d'autre part, lB est la somme de leurs produits 2 à 2 multipliés par l : donc $C+lB$ est la somme de tous les produits 3 à 3 qu'on peut faire avec les $m+1$ seconds termes a, b, c,... l.

Ce raisonnement peut se continuer jusqu'au dernier terme lY, qui est évidemment le produit des $m+1$ seconds termes $a, b, c, \ldots l$, puisque Y est le produit des m quantités a, b, c,...

Ainsi la loi de composition, supposée vraie pour m binomes, est encore vraie en prenant un binome de plus. Or, par le fait de

la multiplication, on l'a reconnue vraie dans le cas de deux facteurs; donc elle est vraie pour trois. Étant vraie pour trois, elle le sera pour quatre, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des facteurs. Donc enfin elle est générale.

213. Maintenant, pour revenir à la puissance $(x+a)^m$, il suffira de supposer, dans le produit de m binomes $x+a$, $x+b$,... tous les seconds termes égaux à a. D'abord il est clair que les puissances de x contenues dans les termes successifs seront encore

$$x^m, \quad x^{m-1}, \quad x^{m-2}, \ldots\ldots x^0,$$

et que le premier terme sera simplement x^m.

Dans le produit des m binomes, le multiplicateur de x^{m-1} est la somme des m seconds termes des binomes; donc, dans le développement de $(x+a)^m$, ce multiplicateur deviendra ma; donc le 2ᵉ terme de ce développement est max^{m-1}.

Dans le 3ᵉ terme du produit des m binomes, les divers produits 2 à 2 qui multiplient x^{m-2} deviennent tous égaux à a^2; donc leur somme sera égale à autant de fois a^2 qu'on peut faire de produits 2 à 2 avec m lettres; donc, si on nomme p le nombre de ces produits, le 3ᵉ terme du développement de $(x+a)^m$ sera pa^2x^{m-2}.

En général, la somme des produits par laquelle chaque puissance de x est multipliée, dans le produit des binomes, doit se changer en une puissance de a, répétée autant de fois que cette somme contient de produits. Par conséquent, en désignant par p, q, r,.... le nombre des produits 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4,.... de m lettres, le développement de $(x+a)^m$ pourra s'écrire ainsi:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + pa^2x^{m-2} + qa^3x^{m-3} + ra^4x^{m-4} \ldots\ldots + a^m.$$

Pour dernier terme, j'ai pris simplement a^m, parce qu'il doit être le produit de m quantités égales à a.

La question est donc ramenée à chercher les coefficients p, q, r,...; mais comme ils sont déjà connus par le nº **209**, il n'y a plus qu'à substituer leurs valeurs, et l'on a enfin la formule

$$[1] \qquad (x+a)^m =$$

$$x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^4x^{m-4} \ldots\ldots\ldots + a^m.$$

214. La loi des termes est si évidente qu'on peut écrire immédiatement un terme de tel rang qu'on voudra.

1° Il est clair que chaque coefficient a pour dénominateur la suite 1.2.3.... jusqu'au nombre qui marque combien il y a de termes qui précèdent, et pour numérateur les facteurs décroissants $m(m-1)(m-2)\ldots$ jusqu'à celui où m est diminué d'autant d'unités, moins une, qu'il y en a dans le dernier facteur du dénominateur.

2° Il est clair aussi que l'exposant de a est toujours égal au nombre des termes qui précèdent, et celui de x égal à m diminué de ce même nombre, de telle sorte que la somme des exposants de x et de a reste constamment égale à m.

En conséquence, si on désigne par T_n un terme quelconque dont le rang est n, on aura, pour le terme T_{n+1}, qui occupe le rang $n+1$ ou qui en a n avant lui,

$$T_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots n}a^n x^{m-n}.$$

Cette expression est *le terme général* de la formule [1]. On l'appelle ainsi, parce qu'en y supposant successivement $a=1, 2, 3,\ldots$ on peut en déduire tous les termes de cette formule, à partir du second. Par exemple, en faisant $n=6$, on aura le 7ᵉ terme, savoir :

$$T_7=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}a^6 x^{m-6}.$$

Si on voulait avoir le dernier terme, il faudrait observer que la formule a en tout $m+1$ termes, et que par suite il faut supposer $n=m$. Alors il vient

$$T_{m+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}a^m x^0.$$

Or, le numérateur renferme, dans un ordre inverse, les mêmes facteurs que le dénominateur, et x^0 est la même chose que l'unité ; donc cette expression se réduit à a^m, ainsi que cela doit être.

Si on prenait pour n un nombre entier $>m$, il y aurait un facteur $m-m$ ou zéro parmi ceux du terme général, ce qui avertirait que tous les termes sont nuls au delà du rang $m+1$, c'est-à-dire que la formule du binome n'a pas plus de $m+1$ termes.

Remarques sur la formule du binome. — Comment on l'applique.

215. Quand on veut faire une puissance particulière de $x+a$, la cinquième, par exemple, il est commode d'employer chaque

terme au calcul du suivant. Or, si on examine avec attention les termes successifs du développement de $(x+a)^m$, on découvre cette règle générale. *Pour passer d'un terme au suivant, multipliez son coefficient par l'exposant de* x *dans ce terme, divisez-le par le nombre qui marque le rang de ce terme, ajoutez une unité à l'exposant de* a, *et retranchez-en une à celui de* x.

Si l'on ne trouve pas cette loi assez évidente à l'inspection de la formule [1], il suffira de montrer qu'elle s'observe en passant d'un terme de rang quelconque au suivant. A cet effet, on changera n en $n+1$ dans l'expression du terme général, et on aura ainsi celle du terme de rang $n+2$, savoir :

$$T_{n+2}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ n\ .\ (n+1)}a^{n+1}x^{m-n-1}.$$

Or, si on compare les expressions de T_{n+2} et de T_{n+1}, on voit qu'en effet T_{n+2} se forme de T_{n+1} selon la règle énoncée.

Comme le 1er terme de chaque puissance de $x+a$ est toujours connu immédiatement, on pourra, par cette règle, en déduire le 2e; de celui-ci le 3e; et ainsi de suite.

Par exemple, soit $(x+a)^5$. Le 1er terme du développement étant x^5 ou a^0x^5, le 2e sera $\frac{5}{1}a^1x^4=5ax^4$, le 3e sera $\frac{5\ .\ 4}{2}a^2x^3=10a^2x^3$, le 4e sera $\frac{10\ .\ 3}{3}a^3x^2=10a^3x^2$, le 5e sera $\frac{10\ .\ 2}{4}a^4x=5a^4x$, et enfin le 6e ou dernier sera $\frac{5\ .\ 1}{5}a^5x^0=a^5$. Donc, en réunissant tous ces termes, il viendra

$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5.$$

216. Dans cet exemple, les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux. Pour démontrer cette propriété en général, reprenons le terme T_{n+1}, qui en a n avant lui dans le développement de $(x+a)^m$. On a

$$T_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ n}a^nx^{m-n}.$$

En multipliant et en divisant le coefficient de a^nx^{m-n} par la suite $(m-n)(m-n-1)\ldots 2\ .\ 1$, le numérateur de ce coefficient renfermera tous les facteurs depuis 1 jusqu'à m, et on aura

$$T_{n+1}=\frac{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ldots\ldots\ldots\ldots(m-1)m}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots n\times 1\ .\ 2\ .\ 3\ldots(m-n)}a^nx^{m-n}.$$

Maintenant, considérons le terme qui en a n après lui. Le nombre total des termes de la puissance $(x+a)^m$ étant $m+1$, celui dont il s'agit doit en avoir $m-n$ avant lui, par conséquent on le trouvera en remplaçant n par $m-n$ dans T_{n+1}. Il n'en résulte pour le coefficient aucun changement, si ce n'est dans l'ordre des facteurs du dénominateur; donc, dans le développement de $(x+a)^m$, *les termes également éloignés des extrêmes ont des coefficients égaux.*

Au fond cette démonstration revient à prouver que le nombre des produits $m-n$ à $m-n$ qu'on peut former avec m lettres est égal à celui des produits n à n, ce qui est facile à reconnaître *a priori*. En effet, si on divise le produit de toutes les m lettres successivement par chacun des produits n à n, on aura tous les produits $m-n$ à $m-n$; donc ils sont en même nombre.

On peut encore démontrer la même propriété d'une manière fort simple comme il suit : concevons qu'on ait formé la puissance $(x+a)^m$ par des multiplications successives, et qu'ensuite on ait fait les mêmes calculs en prenant $a+x$ au lieu de $x+a$. Il est évident que les deux résultats doivent se déduire l'un de l'autre, en changeant x en a et a en x; et, d'un autre côté, il est évident aussi, par les règles de la multiplication, qu'ils doivent être composés des mêmes termes : donc, par le changement de x en a et de a en x, chaque terme du développement de $(x+a)^m$ doit reproduire un terme de ce même développement. Cela posé, le terme, qui dans ce développement en a n avant lui, peut être représenté par ka^nx^{m-n}, k étant un coefficient qui ne renferme ni a ni x. Or si on échange a et x, ce terme devient $ka^{m-n}x^n$; donc $ka^{m-n}x^n$ est aussi un terme du développement de $(x+a)^m$. Mais l'exposant de x montre qu'il en a n après lui; donc les termes également éloignés des extrêmes ont des coefficients égaux.

217. Si, au lieu de $(x+a)^m$, on a $(x-a)^m$, on remplacera a par $-a$ dans tous les termes du développement de $(x+a)^m$. Cela revient à mettre $-$ devant ceux qui contiennent a à un exposant impair, c'est-à-dire devant tous les termes de rang pair : de sorte qu'on a

$$(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2} - \text{etc.}$$

218. Dans les développements de $(x+a)^m$ et de $(x-a)^m$ faisons $x=1$ et $a=1$: ils donnent

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{etc.}$$

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{etc.}$$

Donc, *dans toute puissance de* x + a, *la somme des coefficients, y compris ceux des termes extrêmes, est égale à une puissance de* 2, *indiquée par celle du binome; et la somme des coefficients de rang pair est égale à celle des termes de rang impair.*

219. Pour montrer comment on doit faire les calculs, quand on veut élever à une puissance un binome quelconque, je prendrai l'exemple $(2a^3 - 3bx^2)^6$.

On commence par développer $(x - a)^6$ comme dans le nº **215**, en ayant soin de placer les termes à la suite les uns des autres à mesure qu'on les forme, et de leur donner alternativement les signes + et —. On aura soin aussi de remarquer, lorsqu'on aura trouvé le 4ᵉ terme, que les coefficients des trois derniers sont les mêmes, dans un ordre inverse, que ceux des trois premiers. De cette manière, on peut écrire sur-le-champ

$$(x-a)^6 = x^6 - 6ax^5 + 15a^2x^4 - 20a^3x^3 + 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6.$$

Maintenant, pour passer de $(x-a)^6$ à $(2a^3 - 3bx^2)^6$, il n'y a qu'à changer x en $2a^3$, et a en $3bx^2$. Il vient d'abord

$$(2a^3 - 3bx^2)^6 = (2a^3)^6 - 6(3bx^2)(2a^3)^5 + 15(3bx^2)^2(2a^3)^4$$
$$- 20(3bx^2)^3(2a^3)^3 + 15(3bx^2)^4(2a^3)^2 - 6(3bx^2)^5(2a^3) + (3bx^2)^6;$$

puis, en effectuant les calculs,

$$(2a^3 - 3bx^2)^6 = 64a^{18} - 576a^{15}bx^2 + 2160a^{12}b^2x^4$$
$$- 4320a^9b^3x^6 + 4860a^6b^4x^8 - 2916a^3b^5x^{10} + 729b^6x^{12}.$$

220. On trouve ordinairement plus commode de n'avoir à développer que des puissances de binomes qui aient l'unité pour premier terme. Or, $x + a = x\left(1 + \frac{a}{x}\right)$; donc, en posant $\frac{a}{x} = z$, on aura

$$(x+a)^m = x^m(1+z)^m.$$

On voit qu'il ne s'agit plus que de développer $(1+z)^m$; et pour cela il suffit de remplacer, dans la formule [1] du nº **215**, x par 1 et a par z. Il vient ainsi

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3 + \text{etc.}$$

On réduit cette formule à la règle suivante : *Après avoir formé*

les fractions $\frac{m}{1}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}$, etc., *prenez l'unité pour premier terme du développement ; multipliez cette unité par la* 1re *fraction et aussi par* z ; *multipliez le résultat par la* 2e *fraction et encore par* z ; *multipliez le nouveau résultat par la* 3e *fraction et encore par* z ; *et ainsi de suite. Enfin, ajoutez tous ces résultats au premier terme* 1, *et vous aurez le développement de* $(1+z)^m$.

On verra plus tard que la formule [1] ne cesse point d'être vraie quand l'exposant m est fractionnaire ou négatif. C'est surtout dans ces cas qu'il convient d'employer la règle ci-dessus, parce qu'elle a l'avantage de mettre en évidence la loi des coefficients numériques propres à chaque développement particulier

Puissances des polynomes.

221. En considérant deux termes d'un trinome comme n'en formant qu'un, on ramène au binome les puissances de ce trinome, et l'on en peut dire autant de tout polynome. Montrons comment on parvient par cette voie au terme général de la puissance

$$(a+b+c+d...)^m,$$

c'est-à-dire au terme qui renferme les lettres a, b, c,... à des exposants quelconques n, n', n'',...

Posons $x=b+c+d....$: la puissance ci-dessus sera égale à $(a+x)^m$, et d'après ce qui a été dit n° **216**, la partie qui contient a^n dans le développement de $(a+x)^m$ peut s'écrire ainsi :

$$[a] \qquad \frac{1.2.3.4......m \times a^n x^{m-n}}{1.2.3...n \times 1.2.3....(m-n)}.$$

Posons $y=c+d...$; on aura $x^{m-n}=(b+y)^{m-n}$, et par suite, si on développe cette dernière puissance, la partie qui contiendra $b^{n'}$ sera égale à

$$\frac{1.2.3.4.......(m-n) \times b^{n'} y^{m-n-n'}}{1.2.3......n' \times 1.2.3......(m-n-n')}.$$

En mettant cette quantité au lieu de x^{m-n} dans l'expression [a], le résultat représentera l'ensemble des termes qui contiennent $a^n b^{n'}$ dans la puissance du polynome donné. Ce résultat, en effaçant les multiplicateurs et les diviseurs qui se détruisent, sera

$$[b] \qquad \frac{1.2.3.4.....m \times a^n b^{n'} y^{m-n-n'}}{1.2.3...n \times 1.2.3...n' \times 1.2.3...(m-n-n')}.$$

Posons encore $z = d + \ldots$: on aura $y^{m-n-n'} = (c + z)^{m-n-n'}$, et la partie de $y^{m-n-n'}$ dans laquelle se trouve $c^{n''}$ sera

$$\frac{1.2.3.4\ldots\ldots(m-n-n') \times c^{n''} z^{m-n-n'-n''}}{1.2.3\ldots n'' \times 1.2.3\ldots(m-n-n'-n'')}.$$

Par suite, en mettant dans [b] cette expression au lieu de $y^{m-n-n'}$, et faisant les réductions, on aura

$$\frac{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots m \times a^n b^{n'} c^{n''} z^{m-n-n'-n''}}{1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots n' \times 1.2.3\ldots n'' \times 1.2.3\ldots(m-n-n'-n'')}.$$

Il est évident, sans pousser les raisonnements plus loin, que si on nomme V le terme général du développement de

$$(a + b + c + d\ldots.)^m,$$

ce terme pourra se représenter ainsi

$$V = \frac{1.2.3.4\ldots\ldots m \times a^n b^{n'} c^{n''}\ldots}{1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots n' \times 1.2.3\ldots n'' \times \ldots},$$

$n, n', n'', \ldots$ étant tels nombres entiers positifs qu'on voudra, pourvu que leur somme soit égale à m. De sorte qu'on obtiendrait tous les termes du développement dont il s'agit en donnant, dans cette formule, à n, n', n'',... toutes les valeurs entières et positives qui satisfont à la condition

$$n + n' + n''\ldots. = m.$$

Remarque. Quand on fait un de ces nombres égal à zéro, V prend une forme illusoire. Par exemple, soit $n = 0$: la suite $1.2.3\ldots n$ placée au dénominateur ne peut plus avoir de sens; car en prenant des facteurs croissants à partir de 1, on ne peut pas rencontrer le facteur zéro. Pour lever cette difficulté, remontons au terme général [a] du développement de $(a + x)^m$, et remarquons que l'hypothèse $n = 0$ le réduit à $\frac{x^m}{1.2.3\ldots 0}$. Mais, d'un autre côté, l'hypothèse $n = 0$ devrait donner, dans ce développement, le terme qui ne contient point a, et ce terme est x^m, donc, pour que ce terme puisse se déduire de la formule [a], il suffit de considérer la suite $1.2.3\ldots n$ comme équivalente à 1 dans le cas particulier de $n = 0$. La même observation doit s'étendre aux autres suites de facteurs contenues dans le dénominateur de V; et alors V donnera, sans aucune exception, tous les termes de la puissance m du polynome $a + b + c +$ etc.

Formule de Taylor.

222. Considérons une expression composée d'une manière quelconque avec une quantité x, qui peut recevoir telle valeur qu'on veut : cette expression, composée avec x, est ce qu'on nomme une *fonction* (**15**), et, suivant l'usage, nous la représenterons, d'une manière abrégée, par $F(x)$.

Donnons à x un accroissement h, ce qui revient à changer x en $x+h$; par là $F(x)$ devient $F(x+h)$, et si l'on développe cette dernière fonction suivant les puissances ascendantes de h, on aura la formule à laquelle Taylor a attaché son nom, et qui est une des plus importantes de l'analyse. Nous nous bornerons ici à démontrer cette belle formule pour le cas particulier où $F(x)$ représente une fonction algébrique rationnelle et entière de x.

Ainsi restreinte, si on effectue les calculs qui peuvent être indiqués dans cette fonction et si on ordonne convenablement, elle sera de la forme suivante

$$F(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots\ldots + Tx + V.$$

Ici A, B, C,.... V, désignent des quantités qui ne contiennent pas x, et les points tiennent lieu des termes qui sont sous-entendus. Si on change x en $x+h$, il vient d'abord

$$F(x+h) = A(x+h)^m + B(x+h)^{m-1} + C(x+h)^{m-2} \ldots + T(x+h) + V.$$

Développons les puissances par la formule du binome (**215**), et réunissons ensemble les termes qui contiennent une même puissance de h : on aura

$$\begin{aligned} F(x+h) = {} & Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots\ldots + Tx + V \\ & + [mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} \ldots\ldots + T]\frac{h}{1} \\ & + [m(m-1)Ax^{m-2} + (m-1)(m-2)Bx^{m-3} + \ldots]\frac{h^2}{1.2} \\ & + [m(m-1)(m-2)Ax^{m-3} + \ldots\ldots]\frac{h^3}{1.2.3} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + Ah^m. \end{aligned}$$

On voit que le polynome écrit sur la première ligne n'est autre que $F(x)$, et que les polynomes, multiplicateurs des diverses puissances de h, se déduisent de $F(x)$ d'après une loi fort simple.

Pour abréger, je les désignerai par $F'(x)$, $F'(x)$, etc. : c'est-à-dire que je poserai

$$F(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.},$$
$$F'(x) = mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + \text{etc.},$$
$$F''(x) = m(m-1)Ax^{m-2} + (m-1)(m-2)Bx^{m-3} + \text{etc.},$$
$$\text{etc.};$$

et en conséquence on pourra écrire

$$[1] \quad F(x+h) = F(x) + \frac{hF'(x)}{1} + \frac{h^2F''(x)}{1.2} + \frac{h^3F'''(x)}{1.2.3} \ldots + Ah^m.$$

Il est clair que, dans ce développement, le dernier terme, qui contient h à la plus haute puissance, doit provenir de $A(x+h)^m$, et qu'il est égal à Ah^m. Si on omettait de l'écrire, on le trouverait en formant toutes les parties de la formule d'après la loi indiquée dans les premiers termes.

223. J'ai dit que les polynomes $F'(x)$, $F''(x)$, etc., se déduisent de $F(x)$ d'après une loi très-simple : c'est pour cette raison qu'on les nomme *polynomes dérivés*. Cette loi est évidente : on peut l'énoncer ainsi,

Le 1[er] *polynome dérivé* $F'(x)$ *se déduit du polynome* $F(x)$ *en multipliant chaque terme de ce polynome par l'exposant de* X, *et en diminuant cet exposant d'une unité;*

Le 2[e] *polynome dérivé* $F''(x)$ *se déduit du* 1[er], $F'(x)$, *d'après la même règle;*

Le 3[e] *polynome dérivé* $F'''(x)$, *se déduit de* $F''(x)$ *encore par la même règle.*

Ainsi de suite.

D'après ces règles, quand un terme ne contient point x, il disparaît entièrement dans le polynome dérivé. Par exemple, supposons que ce terme soit V ou Vx^0; pour former le polynome dérivé, la règle prescrit de le multiplier par l'exposant *zéro*, ce qui donne *zéro* pour produit.

224. Revenons au développement de Taylor [1], et supposons que h y soit une quantité très-petite, aussi voisine de *zéro* qu'on voudra; il est clair que chaque terme, à partir du 2[e], sera lui-même une quantité aussi petite qu'on voudra, et que par conséquent il en sera encore ainsi de toute la quantité formée par l'ensemble des termes qui contiennent h. De là on conclut que, *dans un polynome* $F(x)$, *on peut donner à* X *un accroissement assez*

petit pour que ce polynome en reçoive lui-même un changement aussi petit qu'on voudra. En termes équivalents, on dit encore que, *si on fait varier* x *d'une manière continue, le polynome* F (x) *variera aussi d'une manière continue.*

Cette proposition est évidente d'elle-même, mais elle emprunte encore un nouveau degré d'évidence aux explications qui précèdent.

225. Dans ce même développement [1], considérons la partie qui s'ajoute à F (x) quand on donne à x l'accroissement h. Cette partie peut s'écrire ainsi:

$$[2] \qquad h\left[F'(x) + \frac{hF''(x)}{1.2} + \text{etc.}\right].$$

Or, en prenant h assez petit, la quantité affectée de h, h^2, etc. qui vient après F' (x), peut devenir aussi petite qu'on veut; par conséquent, lorsque F' (x) n'est pas zéro, cette quantité pourra être supposée $< F'(x)$. Donc, quand h est positif et très-petit, l'expression [2] sera de même signe que F' (x): c'est-à-dire, positive si F' (x) est positif, et négative, si F' (x) est négatif. Donc encore, en d'autres termes, *si on fait croître* x *d'une manière continue, on connaîtra qu'à partir d'une valeur quelconque de* x, *la fonction* F (x) *est croissante ou décroissante, suivant que la fonction dérivée* F' (x) *sera, pour cette valeur de* x, *positive ou négative.*

Racines quelconques des nombres et des polynomes.

226. Supposons, par exemple, qu'on ait à extraire la racine cinquième d'un nombre.

On formera d'abord le tableau des puissances cinquièmes des neuf premiers nombres, et l'on s'en servira pour obtenir, à une unité près, la racine des nombres moindres que 10^5, c'est-à-dire qui n'ont pas plus de cinq chiffres.

Quand un nombre a plus de cinq chiffres, sa racine cinquième en aura plus d'un, et on peut la décomposer en deux parties $a+b$, a étant les dizaines et b les unités. Alors on examinera comment se compose la puissance 5ᵉ de $a+b$; mais, comme on ne se servira que des deux termes qui renferment les plus hautes puissances de a, on posera seulement

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + \text{etc.}$$

Ces raisonnements et ceux qui restent encore à faire sont telle-

ment semblables à ceux qu'on fait pour trouver la racine cubique, que je crois inutile de m'y arrêter davantage.

227. Quand le degré de la racine est un nombre composé de plusieurs facteurs, elle peut s'extraire au moyen de racines successives dont les degrés sont ces divers facteurs. En effet, d'après la 2e règle du nº **202**, on a

$$\sqrt[m]{a^{mnp}} = a^{np}, \quad \sqrt[n]{a^{np}} = a^{p}, \quad \sqrt[p]{a^{p}} = a.$$

Or, si on voulait extraire de a^{mnp} la racine de l'ordre mnp, cette racine serait évidemment a : c'est-à-dire la même qu'on trouve en extrayant la racine m, puis la racine n, puis la racine p.

On pourra donc obtenir la racine 4e au moyen de deux racines carrées, la racine 8e au moyen de trois, la racine 16e au moyen de quatre, et ainsi de suite : c'est-à-dire que toute racine dont le degré est une puissance de 2 peut s'extraire par des racines carrées successives. Au reste, quand on a besoin d'extraire des racines de degré élevé, il est toujours plus commode de faire ces opérations par logarithmes.

228. Passons aux polynomes. La question à résoudre est celle-ci : *On suppose qu'un polynome donné* P *est la puissance* m *d'un polynome inconnu* p, *et il s'agit de retrouver* p.

Considérons les deux polynomes comme ordonnés selon les exposants décroissants d'une même lettre x, et nommons a, b, c,... les termes inconnus de la racine p : ils devront être tels qu'en élevant $a + b + c$... à la puissance m, on retrouve tous les termes qui composent P. Or, si on imagine qu'on effectue cette puissance par multiplications successives, il est clair que, dans le résultat, le terme où x aura le plus haut exposant sera la puissance m de a; donc *on connaîtra le* 1er *terme de la racine cherchée* p *en extrayant la racine* mème *du* 1er *terme du polynome donné* P.

Le 1er terme de la racine étant trouvé, il sera facile d'obtenir le 2e ; mais je préfère montrer tout d'abord comment, lorsqu'on connaît plusieurs termes successifs de la racine à partir du 1er, on peut déterminer le terme qui vient immédiatement après.

Soit u la somme des termes connus, et v celle des termes inconnus, on doit avoir $P = (u + v)^m$, ou, en développant

$$P = u^m + mu^{m-1}v + ku^{m-2}v^2 + k'u^{m-3}v^3 + \text{etc.}$$

Je n'ai point mis en évidence la composition des coefficients k,

k',... parce que cela serait inutile, ainsi qu'on va le voir. De cette égalité, on tire

$$P - u^m = mu^{m-1}v + ku^{m-2}v^2 + k'u^{m-3}v^3 + \text{etc.}$$

D'une part, le 1er membre $P - u^m$ est une quantité qu'on peut calculer en formant la puissance m de la quantité connue u et en la retranchant du polynome P. D'autre part, le second membre est une somme de produits au moyen desquels on peut facilement assigner la composition du 1er terme du reste $P - u^m$, et par suite découvrir le 1er terme de la partie inconnue v.

D'abord, si on développe u^{m-1}, il est clair, d'après les seules règles de la multiplication, que le premier terme du développement, c'est-à-dire celui qui renferme x au plus haut exposant, sera a^{m-1}; donc, si on nomme f le 1er terme de v, le 1er terme du produit $mu^{m-1}v$ sera $ma^{m-1}f$. Par un raisonnement semblable, on voit que les premiers termes, dans les développements des autres produits, seront respectivement $ka^{m-2}f^2$, $k'a^{m-3}f^3$,... Ces termes, abstraction faite des coefficients qui n'ont aucune influence sur le degré de x, peuvent se déduire du terme $ma^{m-1}f$ en y supprimant un ou plusieurs facteurs égaux à a, et en les remplaçant par autant de facteurs égaux à f. Or, f étant en x d'un degré inférieur à a, ces changements ne peuvent donner que des termes de degré inférieur à $ma^{m-1}f$. Donc, après avoir soustrait du polynome donné P la puissance m de la partie u trouvée à la racine, le 1er terme du reste est égal au produit de m fois la puissance $m-1$ du 1er terme a de la racine par le premier terme de ceux qui restent encore à trouver. Donc enfin, en divisant le 1er terme du reste par m fois la puissance $m-1$ du 1er terme de la racine, on connaîtra un nouveau terme de cette racine.

Cette conclusion donne le moyen de découvrir successivement tous les termes de la racine une fois que le premier est connu. *Pour avoir le* 2e *terme* b, *on retranche du polynome donné* P *la puissance* m *du* 1er *terme* a *de la racine, puis on divise le* 1er *terme du reste par* ma^{m-1}; *pour avoir le* 3e *terme* c *de la racine, on retranche de* P *la puissance* m *de* $a + b$, *puis on divise le* 1er *terme du reste par* ma^{m-1}; *ainsi de suite.*

229. Ce procédé fera toujours connaître si le polynome donné est ou n'est pas une puissance exacte du degré m. En effet, pour peu qu'on fasse attention aux réductions qui doivent s'opérer en

formant les restes successifs, on voit que le 1er terme de chaque reste contient la lettre x, d'après laquelle on a ordonné, à un exposant moindre que le 1er terme du reste précédent; donc on finira ou par trouver un reste nul, auquel cas le polynome donné est la puissance m de la quantité écrite à la racine, ou par trouver un reste dont le 1er terme ne sera plus divisible par m fois la puissance $m - 1$ du 1er terme de la racine, et alors on sera certain que le polynome donné n'est pas une puissance exacte du degré m.

On peut aussi remarquer que si le polynome donné est une puissance de degré m, la racine $m^{ième}$ de son dernier terme doit être le dernier terme de la racine. Donc, si le calcul amène à la racine un terme de degré moindre, on sera encore assuré que le polynome n'est pas une puissance exacte de l'ordre m.

230. Au lieu d'ordonner de façon que les exposants d'une lettre x soient décroissants, on peut ordonner en sens contraire; et il est clair que les raisonnements qui font trouver la racine (228) subsisteront en entier. Alors, dans le premier terme des restes successifs, l'exposant de x va en augmentant, et par conséquent il ne sera jamais un obstacle à ce qu'on puisse effectuer les divisions qui doivent donner les termes de la racine. Mais comme la racine du dernier terme du polynome donné doit toujours être le dernier terme de la racine cherchée, il s'ensuit que le calcul ne peut amener à la racine un terme de degré supérieur que dans le cas où le polynome donné n'est pas une puissance exacte.

Il serait superflu de parler des cas où la lettre x, d'après laquelle on ordonne, se trouve au même exposant dans plusieurs termes. Ce qui a été dit à ce sujet, en traitant de la division et de la racine carrée, doit se répéter ici littéralement.

CHAPITRE XI.

CALCUL DES RADICAUX ET DES EXPOSANTS FRACTIONNAIRES.

Calcul des radicaux arithmétiques.

231. Dans les commencements de l'algèbre, on ne considérait que des grandeurs positives, et alors non-seulement les quantités

sous les radicaux étaient positives, mais les valeurs des radicaux étaient elles-mêmes regardées comme telles. Plus tard, lorsque les quantités négatives furent introduites dans le calcul, on remarqua qu'un radical de degré pair devait être précédé du signe $\pm$; et plus tard encore, après de nouveaux progrès, quand on y admit les quantités imaginaires, on reconnut que les radicaux pouvaient avoir aussi des déterminations de cette espèce.

Sous l'acception restreinte dont j'ai parlé d'abord, lorsque les radicaux ont des valeurs positives et qu'on rejette toutes les autres, ils seront très-bien désignés par la dénomination de *radicaux arithmétiques*; et, quand on leur donne toute l'extension que permettent les signes de l'algèbre, par celle de *radicaux algébriques*.

Je vais exposer ici les règles de calcul relatives aux premiers; l'ordre à suivre sera le même que pour les radicaux carrés.

232. On a déjà dit (**201**) qu'on élève un produit à une puissance en y élevant tous ses facteurs, et que par conséquent on en extrait la racine en extrayant celle de chaque facteur; donc

$$\sqrt[m]{a^m b} = a\sqrt[m]{b};$$

donc, *s'il y a sous le radical une puissance de même degré que le radical, on peut mettre la racine de cette puissance en facteur hors du radical; et réciproquement, un facteur placé devant un radical peut passer sous ce radical, en l'élevant à la puissance marquée par l'indice*.

233. Lorsque plusieurs radicaux de degrés différents sont joints entre eux par les signes $+$ et $-$, ils ne donnent lieu à aucune réduction; il en est autrement lorsqu'ils ont même indice, et qu'en les simplifiant il reste la même quantité sous chacun d'eux. Par exemple, en simplifiant les radicaux, on a

$$\begin{aligned} 3\sqrt[5]{2a^{13}b} - 5\sqrt[5]{64a^8b^6} &= 3a^2\sqrt[5]{2a^3b} - 10ab\sqrt[5]{2a^3b} \\ &= (3a^2 - 10ab)\sqrt[5]{2a^3b}. \end{aligned}$$

234. Soit le produit $\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}$. En l'élevant à la puissance m on trouve abc; donc il est égal à la racine $m^{ième}$ de abc; donc

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$$

Ainsi, *on multiplie entre eux plusieurs radicaux de même degré en formant le produit des quantités placées sous les radicaux; et en affectant ce produit du radical commun*.

235. On élève une fraction à une puissance en y élevant son numérateur et son dénominateur. Donc, si on divise $\sqrt[m]{a}$ par $\sqrt[m]{b}$, la puissance m du quotient sera $\frac{a}{b}$; donc

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}};$$

donc *on divise l'un par l'autre deux radicaux de même indice en divisant l'une par l'autre les quantités placées sous les radicaux, et en affectant le quotient du radical commun.*

236. Considérons maitenant les puissances des radicaux. D'abord, par la règle de la multiplication (**234**), il est clair qu'en prenant n facteurs égaux à $\sqrt[m]{a}$, on a

$$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{a}\ldots=\sqrt[m]{aaa\ldots}=\sqrt[m]{a^n};$$

donc *on élève un radical à une puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical.*

On élève encore un radical à une puissance *en divisant, quand cela est possible, l'indice du radical par l'exposant de la puissance.* Ainsi

$$(\sqrt[mn]{a})^n=\sqrt[m]{a}.$$

En effet, $\sqrt[mn]{a}$ est une quantité mn fois facteur dans a : on peut donc partager a en m groupes, chacun composé de n facteurs égaux à $\sqrt[mn]{a}$. Or chaque groupe équivaut à $(\sqrt[mn]{a})^n$; donc cette dernière quantité est m fois facteur dans a; donc enfin

$$(\sqrt[mn]{a})^n=\sqrt[m]{a}.$$

Si l'exposant de la puissance, sans être un diviseur de l'indice, a seulement avec lui un facteur commun, on pourra faire concourir les deux règles à la formation de la puissance. Par exemple, soit $(\sqrt[mn]{a})^{np}$. On remarquera qu'on peut faire la puissance np d'une quantité en élevant d'abord cette quantité à la puissance n, et le résultat à la puissance p. Or, d'après la seconde règle, $(\sqrt[mn]{a})^n=\sqrt[m]{a}$; et, d'après la première, $(\sqrt[m]{a})^p=\sqrt[m]{a^p}$; donc

$$(\sqrt[mn]{a})^{np}=\sqrt[m]{a^p}.$$

237. Pour extraire une racine d'un radical, il n'y a qu'à renverser les règles ci-dessus. D'abord on a

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}}=\sqrt[m]{a};$$

car en élevant $\sqrt[m]{a}$ à la puissance n, on retrouve $\sqrt[m]{a^n}$. Donc *on extrait la racine d'un radical en extrayant celle de la quantité qui est sous le radical.*

Lors même que la quantité sous le radical n'est pas une puissance de même ordre que la racine à extraire, on peut encore appliquer cette règle, mais alors la racine à extraire ne sera qu'indiquée. Par exemple, on écrira $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^2}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}}$.

En second lieu, puisqu'on a $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a}$, on doit avoir aussi

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

donc *on peut extraire une racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par le degré de la racine à extraire.*

Cette manière de prendre la racine d'un radical est la plus usitée. D'ailleurs, chacune des deux règles montre également que l'ordre dans lequel on extrait deux racines successives est tout à fait indifférent.

238. La multiplication et la division des radicaux de même indice réduit ces radicaux à un seul. Il en sera donc de même pour des radicaux quelconques si on les ramène préalablement au même indice, et c'est ce qui est facile. Remarquons, d'un côté, qu'on élève un radical à une puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical (236); et, d'un autre côté, qu'on extrait une racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par celui de la racine qu'on veut extraire (237). De là il suit que *la valeur d'un radical ne change point si on multiplie son indice par un nombre, et qu'en même temps on élève à la puissance marquée par ce nombre la quantité placée sous le radical.*

Cette remarque montre que plusieurs radicaux peuvent se ramener à un indice commun par les mêmes règles qui servent à réduire des fractions au même dénominateur. Ici les indices des radicaux remplacent les dénominateurs des fractions.

Par exemple, soit le produit $P = \sqrt[3]{a^2b^2} \times \sqrt[4]{a^2b^3} \times \sqrt[5]{a^3b^4}$. Comme chaque indice est premier avec les deux autres, le plus petit nombre divisible par chacun d'eux est le produit $3 \times 4 \times 5 = 60$, et ce sera l'indice auquel je ramènerai les radicaux.

En divisant 60 par les trois indices, on obtient les quotients 20, 15, 12 : c'est par ces nombres qu'on doit multiplier respectivement les indices des trois radicaux, en même temps qu'on élèvera

les quantités placées sous les radicaux aux puissances marquées par ces nombres. De cette manière il vient

$$P = \sqrt{a^{40}b^{40}} \times \sqrt[60]{a^{30}b^{45}} \times \sqrt[60]{a^{36}b^{48}};$$

puis, en effectuant la multiplication et simplifiant,

$$P = \sqrt[60]{a^{106}b^{133}} = ab^2 \sqrt[60]{a^{46}b^{13}}.$$

Soit encore le produit $Q = \sqrt[4]{32a^2b^5} \times \sqrt[6]{128a^7b} \times \sqrt[8]{64a^3b^7}$. Ici le plus petit nombre divisible par chaque indice est 24. Observons en outre que les facteurs numériques sous les radicaux sont des puissances de 2, savoir : $32 = 2^5$, $128 = 2^7$, $64 = 2^6$. En réduisant les trois radicaux à l'indice 24, on aura

$$Q = \sqrt[24]{2^{30}a^{12}b^{30}} \times \sqrt[24]{2^{28}a^{28}b^4} \times \sqrt[24]{2^{18}a^9b^{21}}$$
$$= \sqrt[24]{2^{76}a^{49}b^{55}} = 2^3a^2b^2 \sqrt[24]{2^4ab^7} = 8a^2b^2 \sqrt[24]{16ab^7}.$$

Calcul des exposants fractionnaires.

259. Puisque les exposants fractionnaires ne font que remplacer des radicaux (**205**), c'est du calcul des radicaux qu'on doit tirer les règles du calcul de ces exposants. Il est inutile d'avertir qu'il ne sera encore question ici que des radicaux arithmétiques.

En parcourant les différents cas que peuvent présenter la multiplication et l'élévation aux puissances, il vient

$$a^p \times a^{\frac{q}{n}} = a^p \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^{pn+q}} = a^{\frac{pn+q}{n}}.$$

$$a^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{q}{n}} = \sqrt[m]{a^p}\sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{pn+qm}} = a^{\frac{pn+qm}{mn}}.$$

$$\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^q = \left(\sqrt[m]{a^p}\right)^q = \sqrt[m]{a^{pq}} = a^{\frac{pq}{m}}.$$

$$(a^q)^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{(a^q)^p} = \sqrt[m]{a^{pq}} = a^{\frac{pq}{m}}.$$

$$\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^q} = \sqrt[mn]{a^{pq}} = a^{\frac{pq}{mn}}.$$

Tous ces résultats sont remarquables en ce qu'ils *sont précisément les mêmes que si l'on eût appliqué immédiatement aux exposants fractionnaires les règles établies pour les exposants entiers.*

L'analogie entre les deux sortes d'exposants a lieu aussi dans la division et l'extraction des racines. En effet, dans ces opérations les règles des exposants se déduisent de celles de la multiplication et de l'élévation aux puissances ; donc, elles doivent, comme dans

la multiplication et l'élévation aux puissances, rester les mêmes pour les exposants fractionnaires que pour les exposants entiers.

Par là il devient évident que la division peut donner naissance à des exposants fractionnaires négatifs; par conséquent la convention du nº **58** s'étendra aussi à ces derniers, c'est-à-dire que p étant entier ou fractionnaire, l'expression a^{-p} est toujours équivalente à $\frac{1}{a^p}$. De là il suit que, pour les exposants négatifs fractionnaires, les règles seront absolument les mêmes que pour les exposants négatifs entiers; et comme, pour ceux-ci, on a vu qu'elles étaient les mêmes que pour les exposants positifs, on conclut que tous les exposants, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, entrent selon les mêmes règles dans les diverses opérations de l'algèbre.

A la vérité, on n'a considéré (**60**, **61**) les exposants entiers négatifs que dans la multiplication et la division, et non pas dans les élévations aux puissances; mais la conclusion ci-dessus n'en est pas moins vraie. En effet, m et n étant des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, il est facile de voir qu'on a

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn},$$

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn},$$

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}.$$

Ces résultats montrent qu'on doit toujours, comme pour les exposants positifs, multiplier l'exposant de a par celui de la puissance.

240. En général, toute notation bien choisie doit être la représentation exacte de l'opération dont elle tire son origine; et cette condition est si fidèlement remplie par les différentes sortes d'exposants, qu'il est toujours facile de transformer une expression, dans laquelle elles se trouvent, en une autre qui ne renferme que des exposants positifs et des radicaux. Pour qu'il ne puisse rester aucun doute à cet égard, j'effectuerai cette transformation sur la formule

$$x = \left(\sqrt[-\frac{m}{n}]{a^{-\frac{p}{q}}}\right)^{-r}.$$

Ne considérons pour un moment que la quantité placée entre parenthèses, et posons

$$z = \sqrt[-\frac{m}{n}]{a^{-\frac{p}{q}}}.$$

A cause du sens attaché au signe $\sqrt{\ }$, quand il y a $-\frac{m}{n}$ pour indice, on doit avoir

$$z^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{p}{q}};$$

à cause des exposants négatifs, cette égalité se change en celle-ci

$$\frac{1}{z^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}, \quad \text{d'où} \quad z^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}};$$

et cette dernière, à cause des exposants fractionnaires, équivaut à celle-ci

$$\sqrt[n]{z^m} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Or, en élevant les deux membres à la puissance n, il vient

$$z^m = \sqrt[q]{a^{pn}};$$

puis, en extrayant la racine m de chacun,

$$z = \sqrt[mq]{a^{pn}}:$$

donc enfin la formule proposée deviendra

$$x = z^{-r} = \frac{1}{z^r} = \frac{1}{\left(\sqrt[mq]{a^{pn}}\right)^r} = \frac{1}{\sqrt[mq]{a^{pnr}}}.$$

241. On pourrait demander si les règles du calcul des exposants s'appliquent aussi aux exposants incommensurables ou imaginaires.

Relativement aux exposants incommensurables, je ferai remarquer qu'ils n'ont absolument aucun sens par eux-mêmes, et que, pour leur en donner un, il faut concevoir par la pensée qu'on les remplace par des exposants commensurables qui en approchent de plus en plus. De là il suit qu'une formule dans laquelle il entre des exposants incommensurables doit être considérée comme représentant la limite vers laquelle tendent les valeurs qu'on en déduit, en y remplaçant ces exposants par des nombres commensurables qui peuvent différer de ces exposants aussi peu qu'on voudra ; et de cette manière, on comprend que l'expression proposée représentera exactement la même limite, après qu'on y aura exécuté, sur les exposants incommensurables qu'elle contient, les mêmes opérations que s'ils étaient commensurables.

Par exemple, m et n étant incommensurables, on a toujours

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

En effet, si on met au lieu de m et n des nombres commensurables m' et n', m'' et n'',... qui approchent indéfiniment de m et de n, on aura

$$a^{m'} \times a^{n'} = a^{m'+n'}, \quad a^{m''} \times a^{n''} = a^{m''+n''}, \ldots$$

Les premiers membres de ces égalités tendent donc vers la même limite que les seconds. Or, $a^m \times a^n$ représente la limite des uns, et a^{m+n} celle des autres; donc $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Relativement aux exposants imaginaires, nous observerons d'une manière générale qu'en introduisant des quantités imaginaires dans les calculs, une convention tacite subsiste toujours : c'est de regarder comme équivalentes les expressions dans lesquelles on remplace certaines lettres, a, b, etc., par des quantités imaginaires, toutes les fois qu'il est démontré que ces expressions sont égales en y mettant pour ces lettres des valeurs réelles.

S'il s'agit, par exemple, de $a^m \times a^n$, cette expression n'ayant absolument aucun sens lorsque m et n sont imaginaires, il est clair que, sans une convention expresse ou tacite, on ne pourrait point la regarder comme équivalente à a^{m+n}.

Sur les valeurs multiples des radicaux algébriques.

242. Les radicaux n'ont encore été considérés que comme représentant des valeurs réelles et positives ; maintenant je vais leur rendre toute leur généralité, c'est-à-dire que je les regarderai comme désignant indistinctement toutes les valeurs qui reproduisent la quantité placée sous le radical, quand on les élève à la puissance marquée par l'indice de ce radical. Par là nous sommes ramenés à la distinction déjà établie ailleurs (**158**) entre les *déterminations arithmétiques* et les *déterminations algébriques*. Chaque radical n'en admet qu'une seule de la première espèce; et encore pour cela, faut-il que la quantité soumise au radical soit réelle et positive. Quelques développements sur ce point ne seront pas inutiles.

243. Prenons un radical quelconque $\sqrt[m]{A}$, et supposons A successivement positif, négatif, imaginaire.

Lorsque A est positif, on sait trouver, exactement ou avec approximation, par les méthodes connues, une quantité positive a dont la $m^{ème}$ puissance reproduit A. Or, toute autre quantité positive, élevée à cette puissance, donnerait évidemment un résultat $> A$ ou $< A$; donc la valeur a est une détermination arithmétique du radical, et c'est la seule de cette espèce qu'il puisse avoir.

Lorsque A est négatif, on remarquera qu'il n'existe pas de grandeur positive dont les puissances soient négatives; donc alors le radical ne peut avoir que des déterminations algébriques.

Enfin, lorsque A est imaginaire, comme il est évident que les puissances d'une grandeur réelle, positive ou négative, sont ellesmêmes des grandeurs réelles, il s'ensuit que toutes les déterminations du radical sont algébriques, et même imaginaires.

244. On peut encore considérer séparément le cas où l'indice m est pair et celui où il est impair.

Dans le premier cas, toutes les valeurs du radical sont deux à deux égales et de signes contraires. En effet, si a est l'une d'elles, de telle sorte que l'on ait $a^m = A$, il est clair qu'on aura aussi, attendu que m est un nombre pair $(-a)^m = a^m = A$, c'est-à-dire que $-a$ est aussi une valeur du radical. On peut donc alors représenter toutes les valeurs du radical par une suite de quantités affectées du signe $\pm$, telles que $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$,... En même temps que m est pair, si A est positif, le radical a une valeur réelle et positive; et en supposant que ce soit a, on voit que $-a$ est aussi une valeur réelle, mais négative, du radical. Quant aux autres valeurs $\pm b$, $\pm c$,... elles ne peuvent être qu'imaginaires.

Lorsque m est impair, en changeant le signe de A, les m valeurs du radical ne feront que changer de signe. En effet, si a est une valeur de $\sqrt[m]{A}$, il est clair que, m étant impair, on doit avoir $(-a)^m = -a^m = -A$. Ainsi, en supposant que les valeurs de $\sqrt[m]{A}$ soient a, b, c, d,...., celles de $\sqrt[m]{-A}$ seront $-a$, $-b$, $-c$, $-d$,... Si A est une quantité réelle, l'une des m valeurs du radical est réelle et de même signe que A : c'est-à-dire qu'elle est positive lorsque A est positif, et négative lorsque A est négatif. Les autres valeurs sont essentiellement imaginaires.

245. Jusqu'ici j'ai parlé des valeurs multiples des radicaux, sans en préciser le nombre. Il est temps à présent de porter l'attention sur la proposition suivante.

Un radical quelconque a autant de valeurs différentes, ni plus ni moins, qu'il y a d'unités dans l'indice de ce radical, ou, en d'autres termes, *toute quantité a autant de racines d'un certain degré qu'il y a d'unités dans l'indice de ce degré.*

Cette proposition est déja connue pour les radicaux carrés; considérons aussi le radical cubique $\sqrt[3]{A}$. Toute quantité qui a A pour cube est par cela même une valeur de $\sqrt[3]{A}$; donc les valeurs de ce radical sont précisément les mêmes que les valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$x^3 = A \quad \text{ou} \quad x^3 - A = 0.$$

Pour mieux fixer les idées, supposons A positif. Alors il existe une quantité positive dont le cube est A, et que l'on sait calculer exactement ou avec approximation. Désignons cette quantité par a, et remplaçons A par a^3 : l'équation $x^3 - A = 0$ deviendra

$$x^3 - a^3 = 0.$$

Le binome $x^3 - a^3$ est divisible par $x - a$ (55), et l'on a $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$. Or, pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit qu'un de ses facteurs le soit; donc on aura toutes les solutions de l'équation $x^3 - a^3 = 0$ en posant successivement

$$x - a = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + ax + a^2 = 0,$$

et en tirant de là les valeurs de x. On obtient ainsi

$$x = a, \quad x = a\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right);$$

et par conséquent telles sont les trois racines cubiques de a^3 ou A. On retrouve la valeur a, et l'on devait s'y attendre : car elle était, par hypothèse, une racine cubique de A. Mais on voit qu'outre celle-là il en existe deux autres que l'analyse précédente fait connaître. Et remarquez bien que cette analyse subsiste quelle que puisse être la quantité A, pourvu que a désigne une valeur de $\sqrt[3]{A}$, soit réelle, soit imaginaire.

La proposition peut facilement s'étendre à tous les radicaux dont l'indice est une puissance de 2 ou 3, ou un nombre composé des facteurs 2 et 3. Par exemple, supposons qu'on ait le radical $\sqrt[12]{A}$, dont l'indice $12 = 2 \times 2 \times 3$.

La quantité A aura deux racines carrées; chacune d'elles aura aussi deux racines carrées, ce qui fera quatre quantités diffé-

rentes; enfin chacune de ces quantités aura trois racines cubiques, ce qui fera en tout douze quantités différentes : et je dis que chacune d'elles est une valeur de $\sqrt[12]{A}$. Soient a une des deux racines carrées de A, a' une des deux racines carrées de a, et a'' une des trois racines cubiques de a'. Il est clair que a'' sera une des douze quantités dont il s'agit. Or, il est clair aussi qu'on aura

$$a''^3 = a', \quad a''^6 = a'^2 = a, \quad a''^{12} = a^2 = A;$$

donc a'' est une valeur de $\sqrt[12]{A}$.

Quel que soit le radical $\sqrt[m]{A}$ que l'on considère, la détermination de ses différentes valeurs revient toujours à la résolution d'une équation. En effet, ce radical désigne indifféremment toutes les quantités réelles ou imaginaires qui, élevées à la puissance m, reproduisent A; par conséquent elles ne sont autres que les valeurs de x qui satisfont à l'équation $x^m = A$.

Par là on voit que la proposition générale qui nous occupe revient à prouver que dans cette équation l'inconnue x a m valeurs différentes. Je ne saurais entreprendre ici cette démonstration, mais j'y reviendrai ailleurs, et j'admettrai dès à présent comme établi que tout radical a autant de valeurs différentes, soit réelles, soit imaginaires, qu'il y a d'unités dans l'indice du radical.

246. En désignant par a une valeur de $\sqrt[3]{A}$, on a trouvé plus haut, pour les trois valeurs de ce radical,

$$a, \quad a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right), \quad a\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

Soit $A = 1$: on pourra prendre $a = 1$, et par conséquent les trois valeurs de $\sqrt[3]{1}$ seront

$$1, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Si on les compare avec celles de $\sqrt[3]{A}$, on aura cette conséquence remarquable : que *les trois racines cubiques d'une quantité s'obtiennent en multipliant l'une quelconque d'entre elles par les trois racines cubiques de l'unité.*

Je vais prouver que cette propriété s'étend à tous les radicaux. Désignons par a une valeur quelconque du radical $\sqrt[m]{A}$, et par $1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les m valeurs de $\sqrt[m]{1}$; si on forme les produits

$$a \times 1, \; a \times \alpha, \; a \times \beta, \; a \times \gamma, \ldots$$

et, si on les élève à la puissance m, il vient

$$a^m,\ a^m\alpha^m,\ a^m\beta^m,\ a^m\gamma^m, \ldots$$

Or, ces quantités sont toutes égales à A, car on a évidemment $a^m = A$, $\alpha^m = 1$, $\beta^m = 1, \ldots$; donc les produits a, $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma, \ldots$ sont les m valeurs de $\sqrt[m]{A}$. Ainsi on peut dire en général que *dans chaque ordre, les racines d'une quantité quelconque se forment en multipliant l'une d'elles par les racines de l'unité.*

247. Cette proposition peut s'appliquer aux racines de l'unité, et alors on a cette propriété curieuse : que les diverses racines de l'unité ne font que se reproduire dans un ordre différent, quand on multiplie successivement chacune d'elles par toutes ces racines. J'engage le lecteur à en faire la vérification sur les racines cubiques trouvées plus haut. Il reconnaîtra en même temps que les deux racines imaginaires sont le carré l'une de l'autre; et cette remarque recevra dans la suite une grande extension.

248. Afin de prévenir toute équivoque, quelques auteurs ont pensé qu'une notation caractéristique était nécessaire pour distinguer le cas où l'on prend un radical avec toutes ses déterminations de celui où l'on n'en considère qu'une seule. Une convention assez simple serait de remplacer, dans le premier cas, la barre horizontale du radical par un double trait. Par exemple, $\sqrt{\overline{A}}$ désignerait les deux valeurs de la racine carrée, tandis que $\sqrt{A}$ désignerait l'une d'elles seulement. Ainsi, on pourrait écrire

$$\sqrt{\overline{A}} = \pm\sqrt{A}.$$

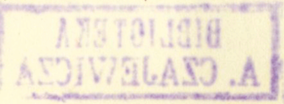
Par exemple, si on suppose $A = 4$, on aura $\sqrt{\overline{A}} = \pm 2$.

Avec cette notation, le théorème général du n° **246** s'écrirait ainsi : $\sqrt[m]{\overline{A}} = \sqrt[m]{A}\,\sqrt[m]{\overline{1}}$.

249. Les exposants fractionnaires donnent lieu à des remarques analogues. L'expression $A^{\frac{n}{m}}$ peut être employée pour désigner à la fois toutes les valeurs du radical $\sqrt[m]{A^n}$, ou seulement l'une d'elles. Si l'on jugeait utile de distinguer ces deux points de vue par quelque différence dans la notation, on pourrait encore convenir de placer, dans le premier cas, le double trait au-dessus de la quantité A. De cette manière on aurait

$$\sqrt[m]{\overline{A^n}} = \overline{\overline{A}}^{\frac{n}{m}},\quad \sqrt[m]{A^n} = A^{\frac{n}{m}}.$$

Par exemple, si $m = 2$, on écrirait $\sqrt{\overline{A^n}} = \overline{\overline{A}}^{\frac{n}{2}} = \pm\sqrt{A^n} = \pm A^{\frac{n}{2}}$.



250. Lorsqu'on a plusieurs radicaux de même indice placés sur des quantités positives, il pourrait arriver qu'on eût besoin de considérer plus spécialement, dans ces radicaux, les déterminations qui résultent de la multiplication de leurs valeurs arithmétiques par la même racine de l'unité, sans d'ailleurs particulariser cette racine. Pour désigner ces déterminations, je me suis quelquefois servi, dans mes cours, de la dénomination de valeurs ou racines *similaires*. Ainsi, a et b étant des valeurs arithmétiques des radicaux $\sqrt[m]{A}$ et $\sqrt[m]{B}$, et α étant une des racines $m^{\text{èmes}}$ de 1, les produits $a\alpha$ et $b\alpha$ seraient deux racines *similaires*.

Quand, sous les radicaux, il y a des quantités négatives $-A$, $-B$, les radicaux n'ont plus de valeur arithmétique. Si l'indice m est impair, ils ont chacun une valeur réelle, mais négative; alors on prendrait pour a et b les valeurs négatives de ces radicaux, et on nommerait valeurs *similaires* les produits tels que $a\alpha$ et $b\alpha$, formés avec la même racine de l'unité.

Quand les radicaux ont un indice pair, et qu'ils sont placés sur des quantités négatives $-A$ et $-B$, toutes leurs déterminations sont imaginaires. Alors on peut concevoir que a et b soient des valeurs de ces radicaux tellement choisies qu'elles deviennent égales lorsque les quantités $-A$ et $-B$ sont égales; et c'est au produit de a et de b par une même racine de l'unité qu'on donnerait le nom de racines *similaires*.

251. Pour ne point contrarier l'usage, je ne me servirai point de cette dénomination, non plus que d'aucune notation nouvelle : mais au moins le lecteur doit-il être bien averti maintenant de l'équivoque qui peut accompagner les radicaux et les exposants fractionnaires; et par conséquent, lorsqu'il les emploie, il doit faire soigneusement attention à l'acception qu'il leur donne.

Calcul des radicaux algébriques.

252. Lorsqu'on donne aux radicaux leur signification la plus étendue, les expressions qui en contiennent peuvent aussi avoir plusieurs valeurs; par conséquent les transformations qu'on fait subir à ces expressions, pour ne pas être défectueuses, doivent leur conserver toutes ces valeurs. Il convient donc de reprendre ici les opérations qu'on peut exécuter sur les radicaux, et de faire

en sorte que les résultats atteignent toute la généralité qu'ils doivent avoir.

253. La simplification des radicaux est fondée sur l'égalité

$$\sqrt[m]{a^m b} = a\sqrt[m]{b};$$

et cette égalité n'est sujette à aucune restriction. En effet, le second membre a m valeurs, et, en élevant chacune d'elles à la puissance m, on retrouve toujours $a^m b$; donc ce membre représente exactement toutes les m valeurs du premier.

254. Dans la multiplication des radicaux de même indice, on doit encore avoir, comme dans le n° **234**,

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}.$$

D'abord, si on fait la puissance m du produit $\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$, il vient ab; donc toutes les valeurs de ce produit sont parmi les m valeurs de $\sqrt[m]{ab}$. Ensuite, il est clair que chacun des facteurs $\sqrt[m]{a}$ et $\sqrt[m]{b}$ ayant m valeurs différentes, on ne peut pas trouver moins de m produits différents en multipliant les m valeurs de l'un par celles de l'autre. Donc on doit avoir exactement les mêmes valeurs pour le produit $\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$ que pour $\sqrt[m]{ab}$.

Cette conclusion donne lieu à une remarque assez importante. Comme, en multipliant les m valeurs du premier radical par une des valeurs du second, on aurait déjà m résultats différents, il s'ensuit qu'en les multipliant par toute autre valeur du second radical, on doit reproduire les mêmes résultats, mais dans un autre ordre.

255. Ce qui vient d'être dit s'applique littéralement à la division des radicaux de même indice; de sorte qu'on devra encore avoir, avec toute la généralité possible,

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

256. Passons aux puissances. Trois cas sont à distinguer, et je vais les parcourir successivement.

1° Quand les nombres m et n sont premiers entre eux, on a

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

En élevant le 1er membre à la puissance m, il vient

$$[(\sqrt[m]{a})^n]^m = (\sqrt[m]{a})^{mn} = [(\sqrt[m]{a})^m]^n = a^n;$$

et de là on conclut d'abord que toutes les valeurs de l'expression $(\sqrt[m]{a})^n$ se trouvent parmi celles de $\sqrt[m]{a^n}$. Il reste donc à faire voir que ces valeurs sont au nombre de m.

Soient $a', a'', a''',\ldots..$ les m valeurs de $\sqrt[m]{a}$, celles de $(\sqrt[m]{a})^n$ seront $a'^n, a''^n, a'''^n,\ldots$: je vais démontrer que toutes ces valeurs sont différentes. Admettons qu'il y en ait d'égales, et soit

[1] $$a'^n = a''^n.$$

Puisque a' et a'' sont deux racines $m^{\text{èmes}}$ de a, on a aussi

[2] $$a'^m = a''^m.$$

Supposons $m > n$, et que la division du nombre m par n donne $m = nq + r$, l'égalité [2] devient

[3] $$a'^{nq+r} = a''^{nq+r}.$$

Si on fait la puissance q des deux membres de l'égalité [1], on a

[4] $$a'^{nq} = a''^{nq};$$

et, si l'on divise l'une par l'autre les égalités [3] et [4], il reste

$$a'^r = a''^r.$$

Maintenant supposons qu'en divisant n par r on ait $n = rq' + r'$. Dans l'égalité [1] remplaçons n par cette valeur, élevons la dernière égalité à la puissance q', puis alors divisons-les l'une par l'autre : il restera $a'^{r'} = a''^{r'}$.

En continuant ainsi, on voit qu'on tombe toujours sur des égalités de la forme $a'^s = a''^s$, dans lesquelles l'exposant s est un des restes qu'on obtient en effectuant sur m et n les opérations du plus grand commun diviseur. Or, ces deux nombres étant premiers entre eux, on doit arriver au reste 1 ; donc on aurait $a' = a''$: donc a' et a'' ne seraient point deux valeurs différentes, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc 1°, etc.

2° Quand l'indice du radical est un multiple mn de l'exposant n de la puissance, on doit avoir

$$(\sqrt[mn]{a})^n = \sqrt[m]{a}.$$

En effet, pour toute quantité x, qui serait une valeur de $\sqrt[mn]{a}$, on doit avoir $x^{mn} = a$, ou bien, ce qui est la même chose $(x^n)^m = a$; donc, les valeurs de x^n ne sont autres que celles de $\sqrt[m]{a}$, c'est-à-dire que $(\sqrt[mn]{a})^n = \sqrt[m]{a}$.

3° Quand l'indice du radical et l'exposant de la puissance ont

un facteur commun, si ces nombres sont désignés par mp et np, p étant leur plus grand diviseur, on devra avoir

$$(\sqrt[mp]{a})^{np} = \sqrt[m]{a^n};$$

car, en s'appuyant sur les deux premiers cas, il vient

$$(\sqrt[mp]{a})^{np} = [(\sqrt[mp]{a})^p]^n = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

Remarque. Si on appliquait aux deux derniers cas la règle du premier, on trouverait un radical qui comporterait plus de valeurs qu'on n'en doit avoir. Cependant on se sert presque toujours de cette règle; mais alors il est sous-entendu que les résultats peuvent quelquefois embrasser une trop grande généralité.

257. La règle relative aux racines des radicaux sera générale : elle est comprise dans l'égalité

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

En effet, si on pose $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, on aura $x^n = \sqrt[m]{a}$, puis $x^{mn} = a$; donc x a les mêmes valeurs que $\sqrt[mn]{a}$.

258. Il n'y a point lieu à parler de réduction au même indice pour les radicaux algébriques : car cette transformation est évidemment défectueuse, en ce qu'elle augmente le nombre des valeurs de ces radicaux. Elle ne pourra donc pas servir ici, comme dans le n° **238**, à expliquer la multiplication et la division des radicaux d'indices différents. Cependant on va prouver que les résultats trouvés par cette voie sont encore vrais dans le cas des radicaux algébriques, pourvu que l'indice commun soit toujours le plus petit possible. Je ne considérerai que la multiplication; l'explication serait absolument la même pour la division.

1° Lorsque les indices m et n sont premiers entre eux, je dis qu'on a

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n b^m}.$$

D'abord, si on élève le produit $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}$ à la puissance mn, il vient

$$(\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b})^{mn} = (\sqrt[m]{a})^{mn}(\sqrt[n]{b})^{mn} = a^n b^m,$$

ce qui montre que parmi les déterminations du radical $\sqrt[mn]{a^n b^m}$ se trouvent toutes celles du produit. Il faut prouver en outre qu'elles ne sont pas en moindre nombre.

Représentons par a', a'', a''', ... les m valeurs de $\sqrt[m]{a}$, et par b', b'', b''',..... ..... les n valeurs de $\sqrt[n]{b}$. En multipliant les

quantités a', a'', a''',... par b', b'', b''',... on aura toutes les déterminations du produit $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}$, lesquelles seront

$$\begin{array}{lll} a'b', & a''b', & a'''b', \dots \\ a'b'', & a''b'', & a'''b'', \dots \\ a'b''', & a''b''', & a'''b''', \dots \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

Voilà bien mn produits; mais il faut prouver qu'ils sont inégaux.

Il n'y a lieu à démonstration que dans le cas où l'on compare entre eux des produits formés de facteurs différents; par exemple, $a'b'$ et $a''b''$. Admettons pour un moment que ces produits soient égaux : en les élevant à la puissance n, on aurait $a'^n b'^n = a''^n b''^n$; et cette égalité, en observant que $b'^n = b''^n = b$, devient

$$a'^n = a''^n.$$

Mais, puisque a' et a'' sont deux racines $m^{\text{èmes}}$ de a, on a aussi

$$a'^m = a''^m.$$

Les quantités a' et a'' sont donc tout à fait dans le même cas que celles du n° **256** (1°); par conséquent on arriverait de la même manière à conclure $a' = a''$, ce qui est contre l'hypothèse.

2° Lorsque les indices ont des facteurs communs, en nommant p leur plus grand diviseur, on aura

$$\sqrt[mp]{a}\sqrt[np]{b} = \sqrt[mnp]{a^n b^m}.$$

En effet, par les n^{os} **254** et **257**, on a $\sqrt[mp]{a}\sqrt[np]{b} = \sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}\sqrt[p]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[p]{\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}}$. Mais, par ce qui vient d'être dit ci-dessus (1°), on a $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n b^m}$; et, par le n° **257** déjà cité, on a $\sqrt[p]{\sqrt[mn]{a^n b^m}} = \sqrt[mnp]{a^n b^m}$; donc enfin $\sqrt[mp]{a}\sqrt[np]{b} = \sqrt[mnp]{a^n b^m}$.

Calcul des expressions imaginaires du 2e degré.

259. On a souvent à combiner entre elles des expressions imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$, dans lesquelles a et b sont des quantités réelles; et on démontre que les résultats sont eux-mêmes toujours réductibles à la forme $a + b\sqrt{-1}$. Cette proposition va se vérifier dans les différents cas que je vais parcourir.

260. Si on soumet les expressions imaginaires aux quatre opérations fondamentales, on a

$$(a+b\sqrt{-1})+(a'+b'\sqrt{-1})=(a+a')+(b+b')\sqrt{-1};$$
$$(a+b\sqrt{-1})-(a'+b'\sqrt{-1})=(a-a')+(b-b')\sqrt{-1};$$
$$(a+b\sqrt{-1})\times(a'+b'\sqrt{-1})=aa'+ab'\sqrt{-1}+a'b\sqrt{-1}-bb'$$
$$=aa'-bb'+(ab'+a'b)\sqrt{-1};$$
$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}{(a'+b'\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}$$
$$=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\sqrt{-1}.$$

261. Les puissances de $\sqrt{-1}$ se présentent fréquemment. Or, il est évident qu'on a

$$(\sqrt{-1})^1=+\sqrt{-1},\qquad (\sqrt{-1})^2=-1,$$
$$(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1},\qquad (\sqrt{-1})^4=+1;$$

de là on conclut qu'en s'élevant aux puissances supérieures on retrouvera toujours ces quatre résultats. Si on veut renfermer cette conclusion dans des formules, on designera par i un nombre entier positif quelconque, et on aura

$$(\sqrt{-1})^{4i}=[(\sqrt{-1})^4]^i=+1,$$
$$(\sqrt{-1})^{4i+1}=(\sqrt{-1})^{4i}\times\sqrt{-1}=+\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^{4i+2}=(\sqrt{-1})^{4i}\times\sqrt{-1})^2=-1,$$
$$(\sqrt{-1})^{4i+3}=(\sqrt{-1})^{4i}\times(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}.$$

Ces formules seront employées selon qu'en divisant l'exposant par 4, on aura pour reste 0, 1, 2 ou 3, ce qui comprend tous les cas.

262. Maintenant, considérons l'expression $(a+b\sqrt{-1})^n$, n étant un nombre entier positif. Par la formule du binome, on a

$$(a+b\sqrt{-1})^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^n=a^n\left[1+\frac{n}{1}\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right.$$
$$\left.-\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{b^2}{a^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}\sqrt{-1}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\frac{b^4}{a^4}+\text{etc.}\right];$$

et, en réunissant les termes affectés de $\sqrt{-1}$,

$$(a+b\sqrt{-1})^n=a^n\left[1-\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\frac{b^4}{a^4}-\text{etc.}\right]$$
$$+a^n\left[\frac{n}{1}\frac{b}{a}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}\right]\sqrt{-1}.$$

Puisque a et b sont supposés réels, ce résultat est évidemment de la forme $A+B\sqrt{-1}$, A et B étant aussi des quantités réelles.

Pour développer $(a-b\sqrt{-1})^n$, il suffira de changer b en $-b$ dans le résultat précédent. Par là il n'y aura d'autre changement que celui de B en $-$B : car b entre à des puissances paires dans tous les termes de A, et à des puissances impaires dans tous ceux de B.

Ainsi, en posant, pour abréger,

$$A=a^n\left[1-\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\frac{b^4}{a^4}-\text{etc.}\right],$$

$$B=a^n\left[\frac{n}{1}\frac{b}{a}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}\right],$$

on aura

$$[1] \qquad (a+b\sqrt{-1})^n=A+B\sqrt{-1},$$

$$[2] \qquad (a-b\sqrt{-1})^n=A-B\sqrt{-1}.$$

Pour passer aux puissances négatives, on observera que $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2$. De là on tire

$$\frac{1}{a+b\sqrt{-1}}=\frac{a-b\sqrt{-1}}{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a-b\sqrt{-1}}=\frac{a+b\sqrt{-1}}{a^2+b^2};$$

donc on aura

$$\frac{1}{(a+b\sqrt{-1})^n}=\frac{(a-b\sqrt{-1})^n}{(a^2+b^2)^n}, \quad \frac{1}{(a-b\sqrt{-1})^n}=\frac{(a+b\sqrt{-1})^n}{(a^2+b^2)^n};$$

et par conséquent, à cause des formules [1] et [2], il viendra

$$[3] \qquad (a+b\sqrt{-1})^{-n}=\frac{A-B\sqrt{-1}}{(a^2+b^2)^n},$$

$$[4] \qquad (a-b\sqrt{-1})^{-n}=\frac{A+B\sqrt{-1}}{(a^2+b^2)^n}.$$

Dans la suite, il sera démontré que la formule du binome convient à des exposants de nature quelconque. Par conséquent les transformations [1], [2], [3], [4], sont vraies, quel que soit n. Mais il arrive, quand cet exposant est négatif ou fractionnaire, que les valeurs de A et B renferment une infinité de termes (*).

(*) Si on multiplie entre elles les égalités [1] et [2], on trouve cette relation $(a^2+b^2)^n=A^2+B^2$, qui est fort simple et qui peut être quelquefois utile. Par exemple, elle montre comment une puissance quelconque, entière et positive, d'un nombre qui est une somme de deux carrés, peut se décomposer elle-même en une somme de deux carrés.

263. Quand on veut réduire l'expression radicale

$$\sqrt[n]{a \pm b\sqrt{-1}}$$

à la forme $A \pm B\sqrt{-1}$, on la remplace par la puissance fractionnaire $(a \pm b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$, qu'on développe comme il vient d'être dit. L'algèbre ne fournit point d'autre méthode genérale pour cette transformation; mais lorsque n est une puissance de 2, on peut encore l'effectuer sans le secours de séries.

Considérons d'abord les deux radicaux $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$ et $\sqrt{a-b\sqrt{-1}}$. En posant

$$[5] \qquad \sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=x,$$

$$[6] \qquad \sqrt{a+b\sqrt{-1}}-\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=y,$$

et en élevant ces quantités au carré, il vient

$$2a+2\sqrt{a^2+b^2}=x^2, \qquad 2a-2\sqrt{a^2+b^2}=y^2.$$

Quel que soit le signe de a la valeur de x^2 est positive, mais celle de y^2 est négative. De ces égalités on tire

$$[7] \quad x=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y=\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}.$$

Or, les égalités [5] et [6] donnent

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=\frac{x+y}{2}, \quad \sqrt{a-b\sqrt{-1}}=\frac{x-y}{2};$$

donc enfin, en mettant pour x et y les valeurs [7], on aura

$$[8] \qquad \sqrt{a+b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1},$$

$$[9] \qquad \sqrt{a-b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}.$$

Maintenant, si on considère les expressions radicales

$$\sqrt[4]{a \pm b\sqrt{-1}}, \quad \sqrt[8]{a \pm b\sqrt{-1}}, \quad \sqrt[16]{a \pm b\sqrt{-1}}, \quad \text{etc.}$$

On observera que l'extraction d'une racine dont l'indice est une puissance de 2, peut être remplacée par des extractions successives de racine carrée; par conséquent, l'emploi répété des formules [8] et [9] réduira toujours les expressions ci-dessus à des expressions de la forme $A \pm B\sqrt{-1}$.



Remarque. Dans chacune de ces formules le premier membre, à raison des radicaux qu'il contient, peut avoir quatre valeurs différentes, et c'est aussi ce qui a lieu pour le second membre. Dans l'une et l'autre les quatre valeurs du premier membre sont les mêmes, et c'est encore ce qui a lieu évidemment pour les seconds membres : de sorte que les deux formules n'en font vraiment qu'une seule. Elles ne présentent de différences que lorsqu'on les emploie simultanément dans un même calcul, parce qu'alors on y doit regarder les termes dans lesquels entre $\sqrt{-1}$ comme affectés de signes contraires. Mais alors il faut remarquer en outre que, par la manière même dont on est parvenu à ces formules, $\sqrt{a^2+b^2}$ y représente le produit $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}\sqrt{a-b\sqrt{-1}}$; par conséquent, les déterminations de ces deux radicaux doivent toujours être supposées associées de manière que leur produit ait le signe qu'on donnera à $\sqrt{a^2+b^2}$ dans les seconds membres. Sans cette attention les formules conduiraient à des résultats fautifs.

Sur le module des quantités imaginaires.

264. Presque toujours les quantités qu'on doit considérer en algèbre sont réductibles à la forme $a+b\sqrt{-1}$: c'est pourquoi l'on peut sans inconvénient restreindre la dénomination de *quantités imaginaires* aux seules expressions de cette forme.

Avec les quantités a et b de l'expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$, on peut former une quantité positive égale à $\sqrt{a^2+b^2}$; cette quantité est dite le *module* de l'expression imaginaire. Par exemple, le module de $3-4\sqrt{-1}$ serait $\sqrt{9+16}$ ou 5.

Deux quantités, telles que $a+b\sqrt{-1}$ et $a-b\sqrt{-1}$, qui ne diffèrent entre elles que par le signe de la partie imaginaire, sont dites *conjuguées* l'une de l'autre. Deux quantités conjuguées ont donc le même module.

Si on fait $b=0$, l'expression $a+b\sqrt{-1}$ se réduit à a. Ainsi la formule $x=a+b\sqrt{-1}$ peut représenter toutes les quantités, réelles ou imaginaires. Lorsque la quantité est réelle, elle a pour conjuguée une quantité égale, et le module n'est autre chose que cette quantité elle-même, abstraction faite de son signe.

Maintenant je vais établir sur les modules deux propositions qui peuvent souvent être utiles.

265. Proposition I. *La somme ou la différence de deux quantités quelconques ont un module compris entre la somme et la différence de leurs modules.*

Soient les deux expressions $a+b\sqrt{-1}$, $a'+b'\sqrt{-1}$. En appelant r et r' leurs modules, on a $r^2=a^2+b^2$, $r'^2=a'^2+b'^2$. Nommons R le module de leur somme, on aura évidemment

$$\begin{aligned} R^2 &= (a+a')^2+(b+b')^2 \\ &= a^2+a'^2+b^2+b'^2+2(aa'+bb') \\ &= r^2+r'^2+2(aa'+bb') \end{aligned}$$

Mais, en multipliant r^2 par r'^2, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} r^2r'^2 &= a^2a'^2+b^2b'^2+a^2b'^2+a'^2b^2 \\ &= (aa'+bb')^2+(ab'-ba')^2; \end{aligned}$$

donc la valeur numérique de $aa'+bb'$ est inférieure ou tout au plus égale à rr'. Par suite il est clair que R^2 est compris entre les deux quantités $r^2+r'^2+2rr'$ et $r^2+r'^2-2rr'$, ou, ce qui est la même chose, entre $(r+r')^2$ et $(r-r')^2$. Donc le module R est compris entre la somme et la différence des modules r et r'.

La démonstration est exactement semblable, lorsqu'au lieu de la somme des expressions imaginaires on considère leur différence.

266. Proposition II. *Le produit de deux quantités a pour module le produit des modules de ces quantités.*

En effet, la multiplication donne

$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})=aa'-bb'+(ab'+ba')\sqrt{-1};$$

et, si on prend le module de ce produit, on trouve, conformément à l'énoncé,

$$\begin{aligned} \sqrt{(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2} &= \sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+a^2b'^2+b^2a'^2} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}. \end{aligned}$$

Corollaire. Donc le produit d'un nombre quelconque de facteurs doit avoir pour module le produit des modules de tous les facteurs. Donc aussi la $n^{ème}$ puissance d'une expression imaginaire a pour module la $n^{ème}$ puissance du module de cette expression.

Explication de quelques paradoxes.

267. On propose quelquefois sur les radicaux des difficultés qui embarrassent les commençants, mais qui disparaissent aussitôt

qu'on fait attention à la signification plus ou moins étendue qu'on attache à chaque radical.

268. Soit l'expression

[1] $$2b\sqrt{ab^2} + 3\sqrt{a^3}.$$

Par les règles du n° **255**, on réduira les radicaux à un seul. En effet, on a

$$2b\sqrt{ab^2} = 2b^2\sqrt{a}, \quad 3\sqrt{a^3} = 3a\sqrt{a};$$

donc l'expression proposée équivaut à

$$2b^2\sqrt{a} + 3a\sqrt{a},$$

ou, en mettant $\sqrt{a}$ en facteur commun, à

[2] $$(2b^2 + 3a)\sqrt{a}.$$

Or, si on considère chaque radical comme portant avec lui le signe $\pm$, l'expression [1] peut avoir quatre valeurs distinctes, à cause des quatre combinaisons qu'on peut faire entre les signes, tandis que l'expression [2] n'en a évidemment que deux. Il n'est donc point exact de dire que les deux expressions soient équivalentes.

Mais si on fait attention à la manière dont la réduction s'est opérée, on reconnaît qu'en mettant le radical $\sqrt{a}$ en facteur commun, on a supposé tacitement qu'il devait être pris avec le même signe dans chacun des termes où il entrait; et par suite, au lieu de quatre arrangements de signes, il n'y en a plus que deux. On voit donc qu'on pourra en effet employer les expressions [1] et [2] comme équivalentes, pourvu qu'on regarde les deux radicaux qui entrent dans la première comme devant être pris avec le même signe, c'est-à-dire tous deux avec $+$, ou tous deux avec $-$.

269. Dans l'exemple précédent on attachait à l'expression proposée une idée plus générale que ne comportait la transformation qu'on lui a fait subir. Voici un exemple du contraire. Soit le produit $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$: la règle de la multiplication (**254**) donnerait

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{-a \times -a} = \sqrt{a^2}.$$

Or, dit-on, il est bien vrai que $\sqrt{a^2}$ a deux valeurs $\pm a$; mais le produit $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ étant le carré de $\sqrt{-a}$, il doit être égal à $-a$; donc le résultat $\sqrt{a^2}$ renferme la valeur fausse, $+a$.

L'explication de ce paradoxe est facile. Le résultat est exactement ce qu'il doit être, et l'erreur est ici tout entière dans une

fausse supposition, laquelle consiste à regarder le produit de $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ comme le carré de $\sqrt{-a}$, tandis qu'il a une signification plus étendue, ainsi qu'on va le reconnaître.

Considérons en général le produit $\sqrt{A}\times\sqrt{B}$, dans lequel A et B sont des quantités quelconques. Il doit avoir autant de valeurs qu'on en peut trouver en multipliant chacune des deux valeurs de $\sqrt{A}$ par chacune de celles de $\sqrt{B}$. Pour plus de netteté, désignons ces valeurs par $\pm A'$ et $\pm B'$. L'expression $\sqrt{A}\times\sqrt{B}$ représentera indifféremment chacun des quatre produits

$$+A'\times+B',\quad +A'\times-B',\quad -A'\times+B',\quad -A'\times-B',$$

lesquels se réduisent à deux seulement, $\pm A'B'$. Or, le carré de ces deux produits est $A'^2B'^2$ ou AB; donc ils sont les deux racines carrées de AB; donc on a rigoureusement, et sans aucune restriction dans le signe $\sqrt{}$, l'égalité

$$\sqrt{A}\times\sqrt{B}=\sqrt{AB}.$$

Cela posé, si, au lieu de $\sqrt{A}\times\sqrt{B}$, on considère le produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$, la règle n'en doit pas moins donner les deux valeurs qui résultent de la combinaison des deux valeurs du premier facteur avec les deux valeurs du second; et au contraire, quand on veut faire le carré de $\sqrt{-a}$, chaque valeur de ce radical ne devant être multipliée que par elle-même, il n'en peut résulter que $-a$.

Le produit $\sqrt{a}\times\sqrt{a}$ donne lieu au même paradoxe. Pour dire qu'il est égal à a, il faut supposer qu'il équivaut à $(\sqrt{a})^2$, tandis qu'en lui laissant toute sa généralité il est égal à $\pm a$.

270. C'est dans les radicaux imaginaires qu'on remarque surtout ce genre de difficulté. Supposons qu'on veuille apprécier la justesse de la transformation

$$[3]\qquad \sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}.$$

Nommons a' et b' les déterminations arithmétiques de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$, c'est-à-dire les deux nombres positifs dont les carrés sont a et b. En laissant aux radicaux toute l'extension possible, on a toujours

$$\sqrt{-a}=a'\sqrt{-1},\quad \sqrt{-b}=b'\sqrt{-1};$$

et alors les deux déterminations de $\sqrt{-a}$ et de $\sqrt{-b}$ résultent de celles de $\sqrt{-1}$. Par suite il vient

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=a'b'(\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}).$$

D'après ce qui a été dit dans le numéro précédent, si on n'établit aucune restriction, on a $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{-1\times-1}=\pm 1$; donc

[4] $$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\pm a'b'.$$

Mais si on introduit la restriction que les deux facteurs du produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$ soient les déterminations de $\sqrt{-a}$ et $\sqrt{-b}$ correspondantes à la même détermination de $\sqrt{-1}$, alors on a simplement $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$, et par suite

[5] $$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-a'b'.$$

Maintenant on peut remarquer que le carré de $a'b'$ est $a'^2b'^2$, ou ab; donc, si on convient de n'attacher à $\sqrt{ab}$ que la seule idée d'une détermination arithmétique, on pourra dire que $a'b'=\sqrt{ab}$, et écrire les égalités [4] et [5] comme ci-dessous :

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\pm\sqrt{ab},\quad \sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}.$$

La dernière n'est autre chose que la transformation [3]; et par là on voit quelle restriction doit accompagner cette transformation.

271. Soit encore l'expression $\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$. En réduisant le second radical à l'indice 4, il vient

[6] $$\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}=\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{(-1)^2}=\sqrt[4]{a},$$

résultat qui est, dit-on, évidemment absurde : car, a étant une quantité positive, il représente une quantité réelle, tandis que l'expression proposée est imaginaire.

Il y a ici confusion d'idées. Si, dans l'expression $\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$, le radical $\sqrt[4]{a}$ est une détermination arithmétique, il est bien vrai que cette expression est imaginaire. Mais alors il n'est point permis de lui appliquer la transformation ci-dessus; car elle laisse aux deux radicaux $\sqrt[4]{a}$ et $\sqrt{-1}$ toute leur généralité.

Pour mieux nous en convaincre, développons toutes les valeurs dont le produit $\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$ est susceptible. Soit a' la détermination arithmétique de $\sqrt[4]{a}$: pour avoir les quatre déterminations de ce radical, il faut (**246**) multiplier a' par les quatre valeurs de $\sqrt[4]{1}$. Or, en désignant par $\pm\alpha$ les deux valeurs de $\sqrt{-1}$, il est facile de voir que $+1$, -1, $+\alpha$, $-\alpha$, sont celles de $\sqrt[4]{1}$: car en les élevant à la 4e puissance on reproduit 1. Donc les quatre déterminations de $\sqrt[4]{a}$ sont

$$+a',\quad -a',\quad +a'\alpha,\quad -a'\alpha.$$

Maintenant, pour avoir toutes les valeurs du produit $\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$,

il faut multiplier ces quatre quantités successivement par chacune des valeurs de $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, par $+\alpha$ et par $-\alpha$. On trouve ainsi huit produits, savoir :

$$+a'\alpha,\quad -a'\alpha,\quad +a'\alpha^2,\quad -a'\alpha^2,$$
$$-a'\alpha,\quad +a'\alpha,\quad -a'\alpha^2,\quad +a'\alpha^2.$$

Mais en observant alors que les quatre derniers sont les mêmes que les premiers écrits dans un ordre différent, et ensuite que α^2 est la même chose que -1, ces produits se réduisent à ceux-ci : $+a'\alpha$, $-a'\alpha$, $-a'$, $+a'$. Alors on voit qu'ils ne sont autres que les quatre valeurs de $\sqrt[4]{a}$. Donc l'égalité [6] est parfaitement exacte; et l'erreur, qu'on prétend y remarquer, vient de ce qu'on attache au produit $\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$ une signification restreinte que n'admet point la transformation qu'on lui fait subir.

272. Je terminerai cet article par l'explication d'un autre paradoxe que présente l'emploi des exposants fractionnaires. Soit l'expression $a^{\frac{2}{4}}$: si on simplifie la fraction $\frac{2}{4}$, il vient $a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}}$; donc, en repassant aux radicaux, on aura $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$. Cependant cette égalité manque de justesse, car le premier membre doit avoir quatre valeurs, et le second n'en a que deux.

On présentera la difficulté d'une manière générale en posant

$$[7] \qquad a^{\frac{np}{mp}} = a^{\frac{n}{m}},$$

et en concluant de là

$$[8] \qquad \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Pour découvrir la cause de l'erreur, il suffit de remonter à la convention qui fixe le sens des exposants fractionnaires (**205**). Alors on voit qu'ils ne font que remplacer des radicaux; et, pour rester dans les termes de la convention, on ne doit pas regarder, dans l'expression $a^{\frac{n}{m}}$, l'exposant comme une fraction ordinaire, mais il faut comprendre que le numérateur n indique une puissance qu'on doit former d'abord, et le dénominateur m une racine qu'on doit extraire ensuite.

Lors même qu'on ne considère que des radicaux arithmétiques, c'est toujours de cette manière qu'on doit entendre les exposants fractionnaires; et par conséquent alors, bien loin qu'on puisse tirer l'égalité [8] de l'égalité [7], c'est au contraire l'égalité [7] qui doit se déduire de l'égalité [8].

Moyen proposé par M. Mourey pour éviter les quantités imaginaires.

273. Des objections ont été faites contre les résultats qu'on obtient par le calcul des expressions imaginaires. Les règles qu'on observe dans ces calculs, a-t-on dit, n'ont été démontrées que pour le cas des grandeurs réelles : c'est par pure analogie qu'on les étend au cas des imaginaires ; par conséquent on peut, avec raison, élever des doutes sur l'exactitude des résultats qui s'en déduisent.

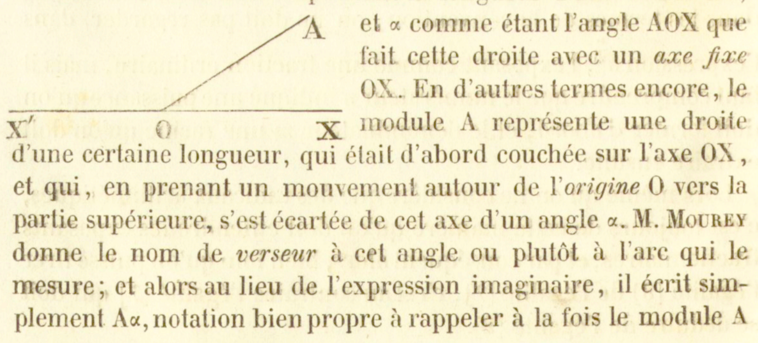
M. Argand et, après lui, M. Mourey se sont occupés de ces difficultés, et ont essayé d'en affranchir l'analyse. Les moyens qu'ils proposent sont presque semblables : M. Argand les a expliqués en 1806 dans une brochure anonyme intitulée : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* ; et M. Mourey, en 1828, dans une brochure qui a pour titre : *Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*. Ces écrits sont peu connus : je vais exposer avec brièveté les vues nouvelles qu'ils renferment.

Reprenons l'expression $a + b\sqrt{-1}$, et posons $a = \mathrm{A}\cos\alpha$, $b = \mathrm{A}\sin\alpha$. Ces égalités feront connaître A et α : en les élevant au carré et les ajoutant on aura A, puis, en divisant la 2e par la 1re, on aura tang α. On trouve ainsi

$$\mathrm{A} = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \mathrm{tang}\,\alpha = \frac{b}{a};$$

et par suite l'expression imaginaire peut se mettre sous la forme $\mathrm{A}(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)$.

Considérant que cette expression renferme réellement deux quantités, le module A et l'angle α, M. Mourey propose de regarder le module A comme exprimant la longueur d'une droite OA,



et α comme étant l'angle AOX que fait cette droite avec un *axe fixe* OX. En d'autres termes encore, le module A représente une droite d'une certaine longueur, qui était d'abord couchée sur l'axe OX, et qui, en prenant un mouvement autour de l'*origine* O vers la partie supérieure, s'est écartée de cet axe d'un angle α. M. Mourey donne le nom de *verseur* à cet angle ou plutôt à l'arc qui le mesure ; et alors au lieu de l'expression imaginaire, il écrit simplement A_α, notation bien propre à rappeler à la fois le module A

et le verseur α. Il consacre aussi le nom de *route* ou *chemin* à désigner la longueur OA placée dans sa véritable position à l'égard de OX ; de sorte que A *verseur* α ou A_α est la route de O vers A.

Une droite peut faire autour de l'origine O autant de révolutions qu'on voudra, et cela, aussi bien en commençant sa rotation par-dessous OX que par-dessus. Il s'ensuit que le verseur peut passer par tous les états de grandeur, et être aussi bien négatif que positif : il sera positif quand le mouvement de la droite aura commencé en dessus; il sera négatif quand le mouvement aura commencé en dessous. De là résulte que la même route OA peut être représentée indifféremment avec un verseur positif ou avec un verseur négatif, pourvu que la somme des deux verseurs, abstraction faite de leurs signes, soit égale à 360 degrés.

Des conventions précédentes il résulte qu'un même chemin peut être représenté en donnant à la longueur A une infinité de verseurs différents. En effet, supposons, pour fixer les idées, que OA soit un chemin déterminé, et qu'alors le verseur AOX soit un angle aigu α : il est évident que la position de OA ne changera point, si on ajoute ou si on retranche à α un nombre quelconque de circonférences entières. Ainsi se trouve établie cette remarque importante que si on désigne par 2π une circonférence entière, ou 360°, et par n un nombre entier quelconque, positif ou négatif, l'expression $A_{2n\pi+\alpha}$ représentera la même route que A_α; et c'est ce qu'on exprime encore par l'égalité

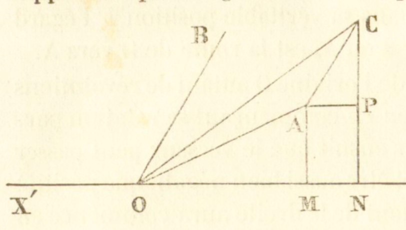
$$A_{2n\pi+\alpha} = A_\alpha.$$

Lorsqu'on donne à A un verseur égal à zéro, la longueur A est couchée sur OX. Lorsque le verseur est égal à π ou 180°, cette longueur se trouve du côté opposé OX' : alors elle n'est autre que la quantité négative —A. Ainsi l'on devra regarder comme tout à fait équivalentes les deux expressions —A et A_π.

Après ces préliminaires, M. Mourey établit les règles du calcul algébrique, puis il passe aux équations, et refait ainsi l'algèbre en son entier. Je me bornerai ici à donner une idée sommaire de la manière dont il présente les opérations fondamentales du calcul, et à montrer la concordance des résultats de la nouvelle algèbre avec ceux de l'algèbre ordinaire.

274. Addition. Je ne prendrai que deux quantités; on étendra facilement ce qui va être dit au cas où il y en aurait davantage.

Supposons qu'il s'agisse des deux quantités A_α et B_β, représentées par OA et OB. L'addition aura pour objet de porter OB à la suite de OA, dans une direction AC parallèle à OB et de même sens : alors le chemin OC, qui unit l'origine O à l'extrémité de la ligne brisée, est le résultat cherché, auquel s'applique le nom de *somme* ou *total*. Ainsi, en désignant par R la longueur OC, et par ρ son verseur, on aura



[1] $$A_\alpha + B_\beta = R_\rho.$$

Quant à R et ρ, le mieux est de les calculer comme il suit. Abaissez AM et CN perpendiculaires sur OX, et AP perpendiculaire sur CN. Je désignerai par A' et A'' les côtés OM et AM du triangle rectangle OAM, par B' et B'' ceux du triangle ACP : alors il est évident que ceux du triangle OCN sont $A'+A''$ et $B'+B''$. En conséquence, ce triangle fera connaître R et ρ par les formules

$$R = \sqrt{(A'+A'')^2 + (B'+B'')^2},$$

$$\text{tang}\,\rho = \frac{B'+B''}{A'+A''}.$$

Maintenant, comparons la formule [1] avec celle qu'on trouve en employant les imaginaires. A_α, B_β remplacent les expressions imaginaires

$$A(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha), \quad B(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta);$$

en ajoutant ces expressions, il vient

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + \sqrt{-1}(A\sin\alpha + B\sin\beta).$$

Or, les triangles rectangles OAM et ACP donnent

$$A\cos\alpha = A', \quad A\sin\alpha = A'', \quad B\cos\beta = B', \quad B\sin\beta = B'';$$

par conséquent, la somme ci-dessus peut s'écrire ainsi

$$A' + A'' + \sqrt{-1}(B'+B'').$$

D'après les considérations établies au commencement de cet article, posons

$$T = \sqrt{(A'+A'')^2 + (B'+B'')^2},$$

$$\text{tang}\,\theta = \frac{B'+B''}{A'+A''},$$

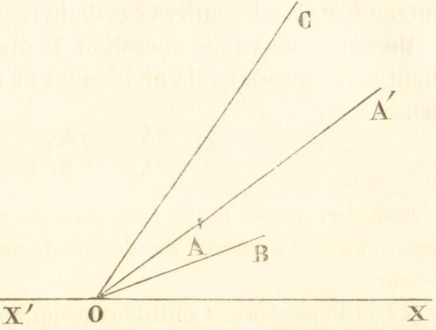
la somme imaginaire dont il s'agit se transformera en celle-ci :

$$T\left(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta\right).$$

Cette dernière, dans la notation de M. MOUREY, équivaut à T_θ ; et, comme les valeurs de T et θ sont les mêmes que celles de R et ρ, l'exacte concordance des résultats est mise ainsi en évidence.

SOUSTRACTION. Cette opération, inverse de l'addition, doit se faire en portant la quantité à soustraire dans une direction contraire à celle qu'on lui donnerait si on voulait l'ajouter.

275. MULTIPLICATION. Supposons qu'on ait à multiplier A_α par B_β. Ces facteurs sont des grandeurs A et B mesurées sur deux droites OA et OB, qui font, avec un axe fixe OX, des angles AOX, BOX, représentés par les verseurs α et β. Il faut donc, avant tout, donner à la définition de la multiplication l'extension convenable pour qu'on puisse l'appliquer au cas dont il s'agit. Or, considérant que le multiplicateur B_β indique une droite B qui est écartée de la droite fixe OX d'un angle égal à β, M. MOUREY regarde la multiplication comme ayant pour objet de prendre d'abord la longueur A, dans sa direction actuelle autant de fois qu'il y a d'unités dans B, et ensuite de faire tourner la nouvelle ligne OA′ autour du point O pour l'écarter de cette direction d'un angle égal à β et lui donner la position OC. De là il suit qu'en désignant par AB le produit des deux grandeurs, abstraction faite de toute idée de position, le produit cherché sera $(AB)_{\alpha+\beta}$. Ainsi l'on a



$$A_\alpha \times B_\beta = (AB)_{\alpha+\beta}:$$

C'est-à-dire qu'*on multiplie les modules selon les règles ordinaires de l'arithmétique, et qu'on fait la somme des verseurs.*

Comparons maintenant le produit $(AB)_{\alpha+\beta}$ avec celui qu'on trouverait avec les imaginaires. Les facteurs A_α, B_β remplacent les expressions $A\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\right)$, $B\left(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta\right)$, et en multipliant celles-ci entre elles, on trouve

$$AB\left[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \sqrt{-1}\,(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\right].$$

Par les formules de la trigonométrie, on sait que les binomes compris entre parenthèses représentent $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$; donc enfin, le produit cherché est

$$\mathrm{AB}\left[\cos(\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta)\right],$$

et l'on voit que cette expression correspond exactement au produit $(\mathrm{AB})_{\alpha+\beta}$.

Si les deux verseurs sont égaux à π ou 180°, on aura $\mathrm{A}_\pi \times \mathrm{B}_\pi = (\mathrm{AB})_{2\pi}$. Or A_π et B_π ne sont autre chose que $-\mathrm{A}$ et $-\mathrm{B}$, et $(\mathrm{AB})_{2\pi}$ est la même chose que $+\mathrm{AB}$: donc $-\mathrm{A}\times-\mathrm{B}=+\mathrm{AB}$. C'est la règle connue, — *par* — *donne* +. On retrouverait de la même manière les autres cas de la règle des signes.

Division. Dans cette opération, le diviseur multiplié par le quotient doit reproduire le dividende; et de là on conclut immédiatement

$$\frac{\mathrm{A}_\alpha}{\mathrm{A}_\beta}=\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)_{\alpha-\beta}$$

c'est-à-dire qu'*on divise le module du dividende par celui du diviseur, et que du verseur du dividende on soustrait le verseur du diviseur.*

276. Puissances. Comme conséquence de la multiplication, on conclut

$$(\mathrm{A}_\alpha)^2=\mathrm{A}_\alpha\mathrm{A}_\alpha=(\mathrm{A}^2)_{2\alpha},$$
$$(\mathrm{A}_\alpha)^3=(\mathrm{A}^2)_{2\alpha}\mathrm{A}_\alpha=(\mathrm{A}^3)_{3\alpha},$$

et en général

$$(\mathrm{A}_\alpha)^m=(\mathrm{A}^m)_{m\alpha}.$$

Racines. En renversant la règle contenue dans la formule précédente, on trouve, pour l'extraction des racines,

$$\sqrt[m]{\mathrm{A}_\alpha}=(\sqrt[m]{\mathrm{A}})_{\frac{\alpha}{m}}.$$

Considérons le radical $\sqrt[m]{\mathrm{A}^m}$ et cherchons-en les diverses valeurs. A cet effet, remarquons d'abord qu'en désignant par n un nombre entier quelconque, A^m équivaut à $(\mathrm{A}^m)_{2n\pi}$; donc

$$\sqrt[m]{\mathrm{A}^m}=\mathrm{A}_{\frac{2n\pi}{m}}.$$

On peut donner à n telle valeur entière qu'on veut. Supposons qu'en le divisant par m, le quotient soit q, et r le reste; on aura $\frac{2n\pi}{m}=2\pi.q+\frac{2r\pi}{m}$. Dans ce verseur supprimons $2\pi.q$, qui est

un nombre exact de circonférences ; la grandeur et la position ne subiront aucun changement ; donc

$$\sqrt[m]{A^m} = A_{\frac{2r\pi}{m}}.$$

Ici, les valeurs entières qu'on peut attribuer à r sont $< m$: en conséquence posons $r = 0, 1, 2, \ldots m-1$, et il en résultera pour le radical les m valeurs suivantes

$$A_0,\quad A_{\frac{2\pi}{m}},\quad A_{2\frac{2\pi}{m}}, \ldots\ A_{(m-1)\frac{2\pi}{m}}:$$

C'est-à-dire que le radical a m valeurs, qui sont représentées par les rayons qui divisent en m parties égales un cercle décrit avec le rayon A. Il est sous-entendu que l'un de ces rayons, A_0, est celui qui sert d'origine aux verseurs.

Si au lieu de A^m, il y avait $-A^m$ sous le radical, il faudrait remarquer que $-A^m = (A^m)_{2n\pi+\pi}$; et par suite les m valeurs du nouveau radical s'obtiendront en ajoutant $\frac{\pi}{m}$ à tous les verseurs qui se trouvent dans les valeurs du premier.

Comme exemple prenons les radicaux $\sqrt{A^2}$ et $\sqrt{-A^2}$. Les valeurs du premier sont A_0 et A_π, ce qui est la même chose que les deux rayons opposés $+A$ et $-A$. Les valeurs du second sont $A_{\frac{\pi}{2}}$ et $A_{\frac{3\pi}{2}}$. De cette manière, le radical $\sqrt{-A^2}$ n'offre plus à l'esprit aucune idée d'impossibilité : il représente deux routes égales et opposées, toutes deux perpendiculaires au rayon A_0.

277. J'ai beaucoup abrégé sans doute l'exposition de la nouvelle doctrine ; cependant j'en ai dit assez pour montrer comment les difficultés relatives aux imaginaires eussent été écartées, si, au moment où ces expressions se sont offertes pour la première fois, on leur eût donné le sens clair et précis que leur attribue M. MOUREY. Toutefois il y a lieu de penser qu'en devenant plus rigoureuse, l'algèbre eût beaucoup perdu de sa simplicité ; mais, quoi qu'il en puisse être, les explications dans lesquelles je suis entré font assez pressentir la parfaite concordance des résultats des calculs ordinaires avec ceux qui seraient fournis par l'emploi des verseurs.

CHAPITRE XII.

PROPOSITIONS SUR LES NOMBRES. — GRANDEURS INCOMMENSURABLES ET APPROXIMATION DES RACINES. — PROGRESSIONS. — FRACTIONS CONTINUES.

Propositions sur les nombres.

278. Théorème. *Un produit de plusieurs nombres entiers ne change pas, dans quelque ordre qu'on multiplie ses facteurs.*

Supposons d'abord qu'on mette les deux derniers facteurs l'un à la place de l'autre. Soient a et b ces facteurs, et P le produit de tous les précédents : je dis qu'on aura $Pab = Pba$. En effet, multiplier P par a, c'est prendre autant de fois P qu'il y a d'unités dans a; donc

$$Pa = P + P + P + \ldots,$$

en comprenant dans cette somme un nombre a de termes égaux à P. Pour multiplier Pa par b, il suffit de prendre b fois chacun des termes; donc

$$Pab = Pb + Pb + Pb + \ldots$$

Mais cette dernière somme, renfermant a fois le terme Pb, est égale à $Pb \times a$ ou Pba; donc $Pab = Pba$.

Si tous les facteurs de P étaient égaux à 1, on aurait $P = 1$; Pab se réduirait à ab et Pba à ba; donc $ab = ba$. Ainsi le théorème est vrai dans le cas de deux nombres.

Maintenant considérons un produit $abcde$, composé de tant de facteurs qu'on voudra. A cause de la première partie de notre démonstration, on peut échanger les deux derniers facteurs, et l'on a $abcde = abced$. La même raison montre qu'on a $abce = abec$, et par conséquent $abced = abecd$. En continuant ainsi on peut successivement avancer le facteur e à toutes les places vers la gauche; et ce qu'on dit du facteur e peut s'appliquer à tous les autres.

Reprenons le produit $abcde$: on y peut remplacer ab par ba; donc $abcde = bacde$. Dans le produit bac on peut échanger a et c, et écrire bca; donc $bacde = bcade$. Par là on voit qu'on peut aussi avancer un facteur à telle place qu'on voudra vers la droite.

Donc on peut amener chaque facteur du produit à une place quelconque, ce qui revient à dire qu'on peut intervertir à volonté l'ordre des divers facteurs sans que le produit change.

279. *Remarque.* La démonstration précédente ne s'applique qu'aux nombres entiers; mais le théorème s'étend à toute espèce de facteurs. Quand il y en a de fractionnaires, si on les réduit en fractions, et si on regarde les facteurs entiers comme ayant l'unité pour dénominateur, on peut dire que le produit s'obtient en divisant le produit de tous les numérateurs par celui de tous les dénominateurs. Or, en changeant l'ordre des facteurs primitifs, on ne fait qu'intervertir l'ordre des nombres entiers qui composent ces deux produits, ce qui n'altère en rien ces produits.

Quand il y a des facteurs incommensurables, pour reconnaître la vérité de la proposition, il suffit d'expliquer le sens qu'on attache alors au mot *produit*. Dans ce cas, il n'a absolument aucun sens, à moins qu'on ne le regarde comme représentant une limite vers laquelle tendent les produits qu'on obtient en remplaçant les facteurs incommensurables par des valeurs commensurables qui en approchent de plus en plus. Or, ces produits successifs ne changent pas quand on change l'ordre des facteurs; donc il en est de même du produit qui renferme les facteurs incommensurables.

280. *Corollaires.* I. Puisqu'un produit ne change pas quand on change l'ordre des facteurs, on a $m \times abc = abcm = mabc$: donc on multiplie une quantité par un produit, en multipliant cette quantité par les facteurs de ce produit. Cette démonstration est déjà connue par la note de la page 20.

II. En général, lorsqu'on multiplie entre elles plusieurs quantités P, Q, R,.... on pourra considérer leur produit comme composé de tous les facteurs de ces quantités. En effet, d'après le corollaire précédent, si on écrit les facteurs de Q à la suite des facteurs de P, on indiquera un produit égal à $P \times Q$; par la même raison, si après tous les facteurs de P et Q on place ceux de R, on indiquera un produit égal à $P \times Q \times R$, etc.

III. Il suit de là que tout nombre entier, qui divise exactement un des facteurs d'un produit de plusieurs nombres entiers, doit diviser exactement ce produit.

A ce sujet, on doit observer qu'un nombre peut quelquefois diviser exactement un produit, quoiqu'il ne divise aucun facteur. Par exemple, 20 ne divise ni 12 ni 15, et cependant il divise le

produit 12×15 ou 180. Il en est ainsi parce que 20 est composé de facteurs dont les uns se trouvent dans 12 et les autres dans 15. Mais si le nombre 20 n'avait aucun facteur commun avec l'un des deux facteurs, il devrait nécessairement diviser l'autre : c'est ce qui résultera du théorème suivant.

281. Théorème. *Tout nombre* P *qui divise exactement un produit* AB *de deux nombres, et qui est premier par rapport à l'un d'eux, doit nécessairement diviser l'autre.*

Supposons P premier relativement à A. En opérant sur ces deux nombres comme si on cherchait leur plus grand diviseur commun, on doit parvenir à un reste égal à 1. Soit $A > P$: nommons

Q le quotient de A par P, et R le reste;
Q' le quotient de P par R, et R' le reste;
Q'' le quotient de R par R', et R'' le reste;
etc.

Ces divisions successives donnent les égalités

$$A = PQ + R, \quad P = RQ' + R', \quad R = R'Q'' + R'', \text{ etc.}$$

Multiplions par B les deux membres de chacune, puis divisons-les par P; il vient

$$\frac{AB}{P} = BQ + \frac{BR}{P}, \quad B = \frac{BR}{P}Q' + \frac{BR'}{P}, \quad \frac{BR}{P} = \frac{BR'}{P}Q'' + \frac{BR''}{P}, \text{ etc.}$$

D'après l'énoncé, AB est divisible par P, donc le second membre de la 1re égalité doit être entier, et comme BQ est nombre entier, il faut que BR soit divisible par P. La 2e égalité prouve que la divisibilité de BR par P entraîne celle de BR' par P; puis la 3e prouve que la divisibilité de BR et BR' par P entraîne celle de BR'' par P; et ainsi de suite. Les produits de B par tous les restes successifs seront donc divisibles par P. Or, dans la suite de ces restes, on doit trouver l'unité; dont le produit $B \times 1$ ou B est divisible par P. C'est ce qu'il fallait démontrer.

282. *Corollaire.* Un nombre premier P qui divise un produit ABCD...E de plusieurs nombres entiers doit diviser l'un d'eux. Décomposons ce produit en $A \times BCD...E$; puisque P est un nombre premier, s'il ne divise point A, on pourra le regarder comme premier à l'égard de A, et d'après le théorème précédent il devra diviser BCD...E. Ce dernier produit se décompose en $B \times CD...E$, et on conclut encore que si P ne divise point B, il devra diviser CD...E. En continuant ainsi on voit que si aucun des facteurs qui

précèdent E n'est divisible par P, E devrait l'être. Donc P divise l'un des facteurs.

283. Théorème. *Il n'existe qu'un seul système de nombres premiers dont le produit soit égal à un nombre donné : ou, en d'autres termes, deux produits de nombres premiers ne peuvent pas être égaux, à moins qu'ils ne soient composés de facteurs égaux chacun à chacun.*

Soient *abcd*... et ABCD.... les deux produits égaux. Puisque le produit *abcd*.... est divisible par a, le produit ABCD.... doit l'être aussi : mais a est un nombre premier ainsi que A, B, C, etc.; donc, si a n'est point égal à quelqu'un de ces facteurs, il ne pourra diviser aucun d'eux. Or, d'après le théorème précédent, a ne divisant ni A ni B, ne peut point diviser le produit AB; ne divisant ni AB ni C, il ne peut point diviser le produit AB $\times$ C ou ABC ; et ainsi de suite : donc, a ne pourrait point diviser le produit ABCD... il faut donc que a soit égal à l'un des nombres A, B, C... Supposons $a=$ A, et divisons les deux produits par a. Les produits restants *bcd*... et BCD... seront encore égaux, et l'on pourra leur appliquer le raisonnement précédent. On conclura donc que b est égal à l'un des facteurs B, C, D..., à B, par exemple. On fera voir semblablement que c est égal à l'un des autres facteurs, et ainsi de suite. Donc les deux produits *abcd*... et ABCD... sont composés des mêmes facteurs premiers.

Cette démonstration ne suppose pas que les nombres a, b, c,... soient inégaux : de sorte que si, dans le premier produit, un facteur se répète plusieurs fois, il doit se répéter dans le second un pareil nombre de fois.

284. Les corollaires de cette proposition sont nombreux : je me bornerai aux principaux.

I. Un produit de plusieurs nombres contient tous les facteurs premiers dont ces nombres sont composés, et il n'en contient pas d'autres. En effet, il est démontré, d'un côté (**280**, cor. II), que le produit de plusieurs nombres peut être considéré comme composé de tous les facteurs premiers de ces nombres; et, d'un autre côté (**283**), qu'il n'y a qu'un seul système de facteurs premiers dont le produit soit égal à un nombre donné.

II. Une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux ne peut pas être réduite à des termes moindres. Supposons que a et b soient des nombres premiers entre eux, et qu'on puisse

avoir $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, a' et b' étant des nombres respectivement moindres que a et b. De là on tire $ab' = ba'$. Mais a et b n'ont point de facteurs communs; donc a' contient les facteurs premiers de a, et b' contient ceux de b; donc les nombres a' et b' ne seraient pas moindres que a et b.

III. Deux produits de nombres entiers sont premiers entre eux lorsque tous les facteurs de l'un d'eux sont premiers par rapport à ceux de l'autre. Soient ABC... et abc... les deux produits. Le produit ABC... n'a pas d'autres diviseurs premiers que ceux des nombres A, B, C, ..., et le produit abc... n'en a pas d'autres que ceux des nombres a, b, c,... Donc, si aucun des nombres A, B, C,... n'a de diviseur commun ni avec a, ni avec b, ni avec c, etc., les produits eux-mêmes ne pourront pas avoir de diviseur commun.

IV. Si a et b sont des nombres premiers entre eux, les puissances a^m et b^n sont dans le cas du corollaire III; donc elles représentent des nombres premiers entre eux. Les exposants m et n peuvent d'ailleurs être égaux ou inégaux.

V. Le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres est égal au produit de tous les facteurs premiers communs à ces nombres. Soit D le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres. Par le cor. I, on sait que les facteurs premiers de D doivent se trouver parmi les facteurs premiers de chacun de ces nombres. D'ailleurs, aucun autre facteur premier ne peut leur être commun à tous; car s'il en existait un autre, d, ces nombres admettraient le diviseur commun Dd, lequel serait plus grand que D.

De là il suit que si on détermine le plus grand diviseur D commun à deux nombres A et B, puis le plus grand diviseur D' commun à D et à un troisième nombre C, le diviseur D' sera le plus grand qui soit commun aux trois nombres A, B, C. On continuerait de la même manière s'il y avait plus de trois nombres.

VI. Plusieurs nombres étant donnés, composons un produit de telle sorte que tout facteur premier appartenant à quelqu'un de ces nombres se trouve dans ce produit avec l'exposant le plus élevé dont il soit affecté dans ces différents nombres; le produit ainsi formé sera le plus petit nombre divisible par chacun des nombres donnés.

Il est clair, en effet, que si un nombre ne renferme pas tous ces facteurs, ou s'il les renferme à des exposants moindres, il ne sera

pas divisible par chacun des nombres donnés; et, d'un autre côté, si, outre ces facteurs, il en contenait d'autres, il serait plus grand que le produit dont il s'agit.

285. PROBLÈME. *Trouver tous les diviseurs d'un nombre quelconque* N.

La première idée qui se présente est d'essayer successivement la division du nombre N par chacun des nombres 1, 2, 3, 4,... jusqu'à N; mais on peut abréger ces tâtonnements. Soient D un diviseur de N, et D' le quotient de N par D : on a $DD' = N$, ou, sous une autre forme, $DD' = \sqrt{N} \times \sqrt{N}$. Donc si D est $< \sqrt{N}$, D' sera $> \sqrt{N}$. Donc, après avoir trouvé tous les diviseurs $< \sqrt{N}$, les quotients, qui auront été obtenus en divisant N par ces diviseurs, seront les diviseurs $> \sqrt{N}$.

Par exemple, soit $N = 360$. La racine carrée de 360 est comprise entre 18 et 19 : ainsi, on divisera 360 seulement par les nombres 1, 2, 3,... 18. De cette manière on trouve tous les diviseurs de 360, savoir,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18.
360, 180, 120, 90, 72, 60, 45, 40, 36, 30, 24, 20.

286. PROBLÈME. *Former une table de nombres premiers.*

On appelle nombre *premier* celui qui n'a pour diviseurs que l'unité et lui-même. Lors donc qu'un nombre étant donné, le procédé ci-dessus ne fera découvrir aucun autre diviseur, on sera sûr que ce nombre est premier. Pour éviter ces calculs, qui peuvent être fort longs, on a construit des tables qui renferment tous les nombres premiers jusqu'à certaines limites (*).

La manière la plus simple de les construire consiste à écrire de suite les nombres impairs 3, 5, 7, 9, etc., jusqu'à telle limite qu'on voudra, et à effacer tous les multiples de 3, tous ceux de 5, tous ceux de 7, etc. Il est évident que les nombres premiers sont les seuls qui resteront. A la tête de ces nombres il ne faut pas oublier de placer 1 et 2.

Rien d'ailleurs de plus facile que de reconnaître les multiples

(*) LEGENDRE cite particulièrement les tables de CHERNAC et celles de BURCKHARDT. Dans celles de CHERNAC, on trouve tous les nombres premiers jusqu'à 1 000 000, et les diviseurs de tous les autres nombres compris dans cette limite. Celles de BURCKHARDT s'étendent jusqu'à 3 036 000.

qu'on doit effacer. Ceux de 3 se trouvent en comptant les nombres 3, 5, 7, etc., de 3 en 3 à partir de 5; ceux de 5, en les comptant de 5 en 5 à commencer de 7; et ainsi de suite (*).

287. *Remarques.* I. La suite des nombres premiers est illimitée. Admettons qu'il en soit autrement, et que n soit le plus grand de tous. Si on forme le produit $P = 2.3.5 \ldots n$, qui renferme tous les nombres premiers, il faudrait que le nombre $P+1$, qui est $> n$, fût divisible par quelqu'un de ces nombres. Or, cela est évidemment impossible, car il y aura toujours le reste 1. Donc il est impossible que la suite des nombres premiers soit limitée.

II. En comparant tous les nombres avec les multiples d'un même nombre, on est conduit à les présenter sous différentes formes. Par exemple, si on les compare aux multiples de 6, on pourra d'abord les représenter par une des six formules

$$6x,\quad 6x+1,\quad 6x+2,\quad 6x+3,\quad 6x+4,\quad 6x+5,$$

dans lesquelles x est un nombre entier quelconque. Mais si on ne veut que les nombres premiers, on ne conservera que les deux formules $6x+1$ et $6x+5$: car les autres donnent des nombres divisibles par 2 ou par 3. On peut aussi, à la place de $6x+5$, écrire $6(x+1)-1$, ou bien encore $6x-1$, puisque x est un nombre entier quelconque. Ainsi tous les nombres premiers, excepté 2 et 3 qui sont diviseurs de 6, sont compris dans la formule

$$N = 6x \pm 1.$$

On raisonnerait d'une manière analogue, si on considérait d'autres multiples que ceux de 6.

288. PROBLÈME. *Décomposer un nombre en facteurs premiers, et trouver ensuite tous ses diviseurs.*

Un nombre quelconque N, s'il n'est pas premier, peut être représenté par un produit de nombres premiers a, b, c, etc., élevés chacun à une certaine puissance, de sorte qu'on peut toujours supposer $N = a^m b^n c^p \ldots$. C'est cette décomposition qu'il s'agit d'opérer.

(*) Représentons-nous une planchette percée de trous, au-dessus desquels les nombres impairs 3, 5, 7, etc., sont placés par ordre; puis à mesure qu'on arrive, en les comptant de trois en trois, de cinq en cinq, de sept en sept, etc., aux multiples qu'on doit effacer, concevons qu'on laisse échapper ces multiples à travers les trous correspondants, il ne restera sur la planchette que les nombres premiers. Tel est le fameux *crible* d'Ératosthène, qui vivait à Alexandrie 280 ans avant J. C.

Prenons pour exemple le nombre 504. Je le divise d'abord par 2 autant de fois que possible, et on trouve ainsi

$$504 = 252 \times 2 = 126 \times 2 \times 2 = 63 \times 2 \times 2 \times 2.$$

Alors je divise 63 autant que possible par 3, qui est le plus petit nombre premier au-dessus de 2, et il vient $63=21\times3=7\times3\times3$. Donc $504=7\times3\times3\times2\times2\times2$, ou bien, sous une autre forme,

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7.$$

Les divisions par 3 ont amené le quotient 7. Si ce quotient n'était pas un nombre premier, on continuerait les opérations en essayant successivement les autres nombres premiers 5, 7, etc.

Maintenant on formera facilement tous les diviseurs de 504. Ils ne sont autres que les nombres qu'on obtient en prenant tous les facteurs premiers un à un, deux à deux, etc. Pour être sûr de n'omettre aucun diviseur, on adopte la disposition suivante :

		1,
504	2	2,
252	2	4,
126	2	8,
63	3	3, 6, 12, 24,
21	3	9, 18, 36, 72,
7	7	7, 14, 28, 56, 21, 42,
		84, 168, 63, 126, 252, 504.

La 1re colonne à gauche contient le nombre donné 504 et les quotients des divisions successives. A côté de ces nombres, dans une 2e colonne, sont écrits les nombres premiers qu'on emploie comme diviseurs, et qui sont les facteurs premiers du nombre 504. Enfin, on place à droite de cette colonne tous les diviseurs de 504, et je vais dire comment on les trouve.

En tête de la 3e colonne, au-dessus de la ligne qui contient 504, on écrit d'abord l'unité, qu'on doit regarder comme le premier diviseur de 504. On multiplie cette unité par le premier nombre de la 2e colonne, et on a ainsi le diviseur 2 qu'on écrit à côté de ce nombre. On multiplie ensuite les diviseurs déjà trouvés, 1 et 2, par le deuxième nombre de la 2e colonne; et, en omettant la répétition du produit 1×2 ou 2, on obtient le nouveau diviseur 4, qu'on écrit sur la ligne du dernier multiplicateur. On continue ainsi jusqu'à ce qu'on multiplie enfin par le dernier nombre de la 2e colonne, ce qui produit une dernière suite de diviseurs, laquelle sera toujours terminée par le nombre donné.

Quand on connaît les facteurs premiers d'un nombre, on peut encore trouver ses diviseurs par un autre procédé. Supposons qu'un nombre N, décomposé en facteurs premiers, soit $N = a^m b^n c^p \ldots$; les diviseurs de N seront représentés par la formule $a^{m'} b^{n'} c^{p'} \ldots$, dans laquelle les exposants m', n', p',... ne doivent point surpasser m, n, p.... Par là on reconnaît que ces diviseurs seront les différents termes qu'on obtient en effectuant le produit

$$P = (1 + a + a^2 \ldots + a^m)(1 + b + b^2 \ldots + b^n)(1 + c + c^2 \ldots + c^p)\ldots$$

289. *Remarques.* La multiplication des deux premiers polynomes donne un nombre de termes égal à $(m+1)(n+1)$; par conséquent celle des trois premiers polynomes en donne un nombre égal à $(m+1)(n+1)(p+1)$, et ainsi de suite; donc le nombre de tous les diviseurs de N est exprimée par la formule

$$(m+1)(n+1)(p+1)\ldots\ldots$$

En même temps on voit que P est la somme de tous ces diviseurs. Or, on sait (55) que les polynomes qui composent P sont respectivement égaux à $\dfrac{a^{m+1}-1}{a-1}$, $\dfrac{b^{n+1}-1}{b-1}$, etc.; donc la somme de tous les diviseurs de N peut s'exprimer par la formule

$$P = \frac{a^{m+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{n+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{p+1}-1}{c-1} \times \ldots$$

Par exemple, prenons $N = 504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$: on aura $m = 3$, $n = 2$, $p = 1$. Donc le nombre des diviseurs de 504 sera $4 \times 3 \times 2 = 24$; et la somme de tous ces diviseurs sera

$$\frac{2^4-1}{2-1} \times \frac{3^3-1}{3-1} \times \frac{7^2-1}{7-1} = 15 \times 13 \times 8 = 1560.$$

290. PROBLÈME. *Combien de fois un nombre premier* θ *est-il facteur dans la suite des nombres naturels, depuis* 1 *jusqu'à* n*? ou, en d'autres termes, quelle est la plus haute puissance de* θ *qui divise le produit* 1.2.3... n?

Soit n' la partie entière du quotient de n par θ. Dans la suite proposée on trouve les n' facteurs θ, 2θ, 3θ,... du produit

$$\theta.2\theta.3\theta\ldots.n'\theta;$$

et il est clair qu'ils sont les seuls qui soient divisibles par θ. Ce produit peut s'écrire ainsi

$$1.2.3\ldots.n' \times \theta^{n'};$$

donc on aura la puissance cherchée en multipliant $\theta^{n'}$ par la plus haute puissance de θ renfermée dans le produit $1.2.3\ldots n'$.

Le même raisonnement peut se répéter sur ce produit, de sorte que, en appelant n'' la partie entière du quotient de n' par θ, on verra que la plus haute puissance de θ, contenue dans le dernier produit, se compose de la puissance $\theta^{n''}$ multipliée par la plus haute puissance de θ contenue dans $1.2.3... n''$.

Semblablement, en nommant n''' la partie entière du quotient de n'' par θ, on sera encore conduit à chercher la plus haute puissance de θ renfermée dans le produit $1.2.3...n'''$.

On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient $< \theta$. Pour fixer les idées, supposons que ce soit n'''; alors on conclura que la plus haute puissance de θ, contenue dans le produit donné $1.2.3...n$, est $\theta^{n'+n''+n'''}$.

Veut-on savoir, par exemple, quelle est la plus haute puissance de 7 qui divise le produit $1.2.3... 1000$? On fera $n = 1000$; et en ne prenant que les parties entières des quotients, on aura $\frac{1000}{7} = 142$, $\frac{142}{7} = 20$, $\frac{20}{7} = 2$. La somme de ces quotients étant 164, il s'ensuit que la puissance cherchée est 7^{164}.

291. *Corollaire.* Soient m, n, p, q,... des nombres entiers tels qu'on ait $m = n + p + q....$; l'expression

$$[1] \qquad \frac{1.2.3.4.......m}{1.2.....n \times 1.2...p \times 1.2...q \times \text{etc.}}$$

représentera toujours un nombre entier. En effet, soit θ un facteur premier du dénominateur, on aura

$$\frac{m}{\theta} = \frac{n}{\theta} + \frac{p}{\theta} + \frac{q}{\theta} + \text{etc.}$$

En nommant m', n', p', q',..... les quotients entiers, on aura donc aussi

$$m' = \text{ ou } > n' + p' + q' + \text{etc.}$$

Si on divise de nouveau par θ, et qu'on nomme m'', n'',... les nouveaux quotients entiers, on aura pareillement

$$m'' = \text{ ou } > n'' + p'' + q'' + \text{etc.}$$

On continuera ainsi tant que les quotients ne seront pas tous moindres que θ. Alors en ajoutant, on aura

$$(m' + m'' + ...) =$$
$$\text{ou } > (n' + n + ...) + (p' + p'' + ...) + (q' + q'' + ...) + \text{etc.}$$

Or ces différentes sommes font connaître les plus hautes puissances de θ par lesquelles on peut diviser les produits qui compo-

sent l'expression [1]; donc il n'y a aucun facteur premier dans le dénominateur de cette expression qui ne soit à une puissance au moins égale dans son numérateur; donc cette expression représente un nombre entier. Cette conclusion renferme, comme cas particulier, la remarque du n° **210**.

Continuation. — Théorèmes sur les résidus.

292. Théorème. *Soit* p *un nombre premier par rapport à* a; *si on divise par* p *les multiples successifs de* a *jusqu'à* (p — 1) a *inclusivement, les résidus ou restes de ces divisions seront tous différents.*

Admettons que deux multiples ma et $m'a$, moindres que pa, puissent donner le même résidu r. En nommant E et E' les entiers des quotients, on devrait avoir

$$ma = \mathrm{E}p + r, \quad m'a = \mathrm{E}'p + r.$$

Si on retranche ces égalités l'une de l'autre, il vient

$$(m' - m)a = (\mathrm{E}' - \mathrm{E})p \quad \text{d'où} \quad \frac{(m' - m)a}{p} = \mathrm{E}' - \mathrm{E};$$

et comme p est premier avec a, il s'ensuivrait que p divise $m' - m$; ce qui est impossible puisque m et m' sont $< p$.

Remarque. Appelons $r, r', r'', \ldots$ les $p - 1$ restes qu'on obtient en divisant a, $2a$, $3a, \ldots$ $(p - 1)a$, par p; et supposons qu'on ait

$$a = \mathrm{E}p + r, \quad 2a = \mathrm{E}'p + r', \quad 3a = \mathrm{E}''p + r'', \text{ etc.}$$

Si on ajoute pa à chaque égalité, on a

$$(p + 1)a = (\mathrm{E} + a)p + r, \quad (p + 2)a = (\mathrm{E}' + a)p + r', \text{ etc.};$$

donc, après avoir passé pa qui est le premier multiple de a divisible par p, les multiples suivants ramènent les restes déjà trouvés, et dans le même ordre. Sans pousser la démonstration plus loin, il est clair que cette période de restes se reproduit après chaque multiple de a divisible par p.

293. Théorème. *Soit* p *un nombre premier avec* a, *si on divise par* p *la suite des puissances* 1, a, a^2, $a^3, \ldots$ *il y en aura au moins une avant* a^p, *qui laissera un résidu égal à* 1; *jusqu'à la plus petite, tous les résidus seront différents; et au delà, les mêmes résidus se reproduiront périodiquement.*

Les résidus devant être moindres que p, on ne peut pas en trouver plus de $p - 1$ qui soient différents; donc, dans les p premiers termes de la suite $1, a, a^2, \ldots a^{p-1}$, il en existe au moins

deux qui donnent le même résidu. En les représentant par a^m et $a^{m'}$, et le résidu commun par r, supposons qu'on ait

[1] $$a^m = Ep + r, \quad a^{m'} = E'p + r.$$

De là on tire

$$a^{m'} - a^m = (E' - E)p, \quad \text{ou} \quad a^m(a^{m'-m} - 1) = (E' - E)p;$$

et comme p est premier avec a, il devra diviser $a^{m'-m} - 1$. Donc on aura l'unité pour résidu en divisant par p la puissance $a^{m'-m}$, laquelle est $< a^p$.

Désignons par a^n la plus petite puissance, autre que a^0, qui donne le résidu 1, tous les résidus précédents seront inégaux entre eux. En effet, si pour deux puissances a^m et $a^{m'}$, moindres que a^n, on pouvait avoir les égalités [1], on en conclurait, comme tout à l'heure, que $a^{m'-m}$ donnerait le résidu 1; par conséquent a^n ne serait pas la plus petite puissance qui jouît de cette propriété.

Soit $a^n = Ep + 1$, E étant entier. Au delà, on aura

$$a^{n+1} = Eap + a, \quad a^{n+2} = Ea^2p + a^2, \quad a^{n+3} = Ea^3p + a^3, \text{ etc.};$$

donc, pour les puissances a^n, a^{n+1},... a^{2n-1}, les résidus seront successivement les mêmes que pour a^0, a^1, a^2,... a^{n-1}.

Pour a^{2n} le reste sera 1 comme pour a^n : car l'égalité $a^n = Ep + 1$, en la multipliant par a^n, donne $a^{2n} = Ea^np + a^n$. Avec le raisonnement précédent, on fera donc voir que de a^{2n} à a^{3n-1}, les puissances donnent encore la même période de restes; et ainsi de suite.

294. *Remarques.* I. En partant de l'égalité $a^n = Ep + 1$, on a $a^{2n} = Ea^np + a^n$, $a^{3n} = Ea^{2n}p + a^{2n}$, etc.; et de celles-ci on conclut que le résidu 1 correspond à tous les exposants multiples de n. On peut même affirmer que tout exposant plus grand que n qui ramène ce résidu doit être multiple de n. En effet, on a dû observer plus haut que le résidu d'une puissance de a ne change pas quand on ajoute ou qu'on ôte à l'exposant autant de fois n qu'on voudra; donc, si cet exposant n'est pas multiple de n, on pourra l'abaisser au-dessous de n sans le réduire à zéro; donc a^n ne serait pas la plus petite puissance, autre que a^0, qui pût donner le résidu 1.

II. La même observation fournit un moyen facile d'obtenir les résidus des puissances très-élevées, lorsqu'on connaît les résidus de la première période. Quant à ceux-ci, on les détermine directement, mais on simplifie le calcul en faisant attention que, pour passer du résidu de a^t à celui de a^{t+1}, il suffit de multiplier le premier par a, ou par le résidu de a, et de diviser le produit par p.

Par exemple, cherchons le résidu de la division de 4^{898} par 11. Ceux de 4^0, 4^1, 4^2, sont 1, 4, 5. Le produit 5×4 ou 20 donne le résidu 9; 9×4 ou 36 donne 3; et 3×4 ou 12 donne 1. L'on s'arrête ici, et l'on forme le tableau suivant :

Puissances....	4^0,	4^1,	4^2,	4^3,	4^4.
Résidus.......	1,	4,	5,	9,	3.

L'exposant 5 étant celui qui ramène le résidu 1, on divisera l'exposant donné 898 par 5, et le reste 3 indiquera que la puissance 4^{898} laisse le même résidu que 4^3; donc ce résidu est 9.

III. Lorsque p n'est pas premier avec a, le théorème ne subsiste plus. En effet, supposons que la division de a^t par p donne $a^t = \mathrm{E}p + r$, on en conclurait que si des facteurs sont communs à a et p, ils doivent diviser r; donc r ne pourrait pas être égal à 1.

295. THÉORÈME. *Si* p *est un nombre premier qui ne divise point* a, *la division de* a^{p-1} *par* p *donnera le résidu* 1; *ou, ce qui est la même chose,* $a^{p-1} - 1$ *sera un nombre exactement divisible par* p.

Dans ce théorème, qui est dû à FERMAT, il faut bien faire attention que p est un nombre premier absolu, et non pas un nombre premier seulement par rapport à a.

Nommons q, q', q'',... et r, r', r'',... les quotients et les restes qu'on obtient en divisant par p les $p-1$ quantités a, $2a$, $3a$,... $(p-1)a$: si on multiplie entre elles ces quantités, et si on désigne par E un nombre entier, on aura

$$a.2a.3a....(p-1)a = (qp+r)(q'p+r')(q''p+r'')....$$
$$= \mathrm{E}p + rr'r''....$$

Ici le premier membre est égal à $1.2.3...(p-1)\times a^{p-1}$; et, d'un autre côté, comme on a démontré, n° **292**, que les $p-1$ restes r, r', r'',.... sont différents entre eux, le produit $rr'r''$,.... doit être égal à $1.2.3....(p-1)$. En conséquence, l'égalité ci-dessus revient à celle-ci $1.2.3....(p-1)\times a^{p-1} = \mathrm{E}p + 1.2.3....(p-1)$, d'où

$$1.2.3....(p-1)(a^{p-1}-1) = \mathrm{E}p :$$

donc le premier membre de cette dernière égalité est divisible par p. Mais, par hypothèse, p est un nombre premier; donc, puisqu'il ne peut diviser aucun des facteurs $1.2.3....(p-1)$, il devra diviser $a^{p-1} - 1$.

296. *Remarques.* I. Lorsque a^{p-1} n'est pas la plus petite puissance, autre que zéro, qui ramène le résidu 1, la remarque I[re] du

n° **294** prouve que l'exposant de cette plus petite puissance doit être un diviseur de $p-1$.

II. Lorsque a^{p-1} est la plus petite puissance, autre que a^0, dont la division par p ramène le reste 1, p doit être un nombre premier absolu. En effet, le théorème du n° **293** prouve que les restes qui précèdent la division de a^{p-1} sont tous inégaux entre eux; donc ils doivent comprendre tous les nombres 1, 2, 3... $p-1$; mais dans un ordre différent de l'ordre naturel. Si p était un nombre composé et que r fût un de ses facteurs premiers, r ferait donc partie des $p-1$ résidus, et par conséquent on devrait avoir une égalité telle que $a^t = Ep + r$. De là on conclurait que r est aussi facteur de a : donc a et p ne seraient pas premiers entre eux; et dès lors, d'après la remarque III du n° **294**, il ne serait pas même possible de trouver au-dessus de a^0 une puissance de a qui ramenât le résidu 1.

III. Supposons qu'on ne prenne pour p que des nombres premiers, si on veut que les puissances a^0, a^1,... a^{p-1} donnent pour résidus tous les nombres inférieurs à p, il faudra donc choisir a dans les nombres tels que a^{p-1} soit la plus petite puissance, au-dessus de a^0, qui ramène le reste 1; et si, parmi ceux qui remplissent cette condition, on ne prend pour a que les nombres au-dessous de p, on aura ceux que EULER appelle des *racines primitives* par rapport à p. Pour la recherche de ces racines on devra consulter M. IVORY, 4ᵉ vol. du supplément de l'*Encyclopedia Britannica*, p. 698, et M. CAUCHY, *Exercices mathématiques*, 4ᵉ année, p. 217. Je me bornerai ici à rapporter les *racines primitives* des nombres premiers jusqu'à 37.

Nombres p.	Racines primitives de p.
3	2.
5	2, 3.
7	3, 5.
11	2, 6, 7, 8.
13	2, 6, 7, 11.
17	3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14.
19	2, 3, 10, 13, 14, 15.
23	5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21.
29	2, 3, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 21, 26, 27.
31	3, 11, 12, 13, 17, 21, 22, 24.
37	2, 5, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 32, 35.

En consultant ce tableau, on y voit que 5 est racine primitive de 7 : et en effet, si on divise par 7 les puissances 5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, on trouve les résidus 1, 5, 4, 6, 2, 3, qui comprennent tous les nombres au-dessous de 7.

On pourrait aussi prouver que, pour chaque nombre premier p, il existe autant de racines primitives, plus une, qu'il y a, entre 1 et p, de nombres premiers par rapport à $p-1$. Mais, pour cette proposition, et toutes les autres qu'on peut encore démontrer sur les nombres, je renverrai à la *Théorie des nombres* par LEGENDRE.

Sur les grandeurs incommensurables. — Approximation des racines.

297. Deux grandeurs sont *commensurables* lorsqu'elles ont une commune mesure, c'est-à-dire lorsqu'il existe une troisième grandeur qui soit contenue un nombre exact de fois dans chacune d'elles; dans le cas contraire, elles sont *incommensurables*.

Quand on dit d'une quantité prise isolément, qu'elle est commensurable ou incommensurable, il y a toujours une certaine unité sous-entendue avec laquelle on la compare; et alors ces expressions indiquent qu'il existe une mesure commune entre cette quantité et l'unité, ou bien qu'il n'en existe pas.

Supposons, par exemple, qu'une ligne donnée contienne 23 fois une certaine longueur, et que le mètre la contienne 7 fois; la ligne donnée sera commensurable; et comme elle est égale à 23 septièmes de l'unité, elle sera représentée par $\frac{23}{7}$. Cet exemple suffit pour montrer que toute quantité commensurable peut s'exprimer exactement en nombres entiers ou fractionnaires.

D'un autre côté, toute quantité représentée par un nombre entier ou fractionnaire est commensurable : car il y a évidemment une commune mesure entre elle et l'unité. Ainsi, qu'une longueur soit égale à $\frac{43}{10}$, et que le mètre soit l'unité sous-entendue, la commune mesure sera le décimètre.

Donc, une quantité qui ne peut être exprimée exactement, ni avec des entiers, ni avec des fractions, est incommensurable. Telles sont $\sqrt{2}$, $\sqrt{17}$.

En faisant attention que le *rapport* ou la *raison*, entre une quantité commensurable et l'unité à laquelle on la rapporte, est toujours exprimée exactement par un nombre entier ou fractionnaire, on comprendra pourquoi l'on indique encore les quantités com-

mensurables sous la désignation de *rationnelles*, et les incommensurables sous celle d'*irrationnelles.*

298. *Lorsque la racine d'un nombre entier, quel que soit le degré de cette racine, ne peut pas être exprimée exactement en nombres entiers, elle ne peut pas l'être non plus avec des fractions, et par conséquent elle est incommensurable.*

Supposons qu'elle puisse s'exprimer avec des fractions, on pourra la mettre sous la forme d'un nombre fractionnaire irréductible $\frac{a}{b}$. Or, à quelque puissance qu'on élève un tel nombre, bien loin de retrouver un nombre entier, je vais montrer qu'on obtiendra toujours un nombre fractionnaire irréductible. En effet, les nombres premiers qui divisent a ne devant point diviser b, il s'ensuit (n° **281**) qu'ils ne diviseront pas $b \times b$ ou b^2, ni $b^2 \times b$ ou b^3, etc, Cette conclusion revient à dire que les nombres premiers qui divisent les puissances de b ne peuvent pas diviser a; donc aussi, d'après le théorème cité, ils ne diviseront ni $a \times a$ ou a^2, ni $a^2 \times a$ ou a^3, etc. Ainsi, les puissances de a n'ont aucun facteur commun avec celles de b. Donc la fraction $\frac{a}{b}$ étant irréductible, ses puissances $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, etc. seront irréductibles aussi. Donc les racines des nombres entiers, quand elles ne sont pas des nombres entiers, sont toujours incommensurables.

299. Déterminons aussi à quel caractère on connaîtra que la racine d'un nombre fractionnaire est incommensurable.

D'après ce qui vient d'être dit, dans le numéro précédent, la puissance $\frac{a^n}{b^n}$ d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est elle-même une fraction irréductible; donc, pour qu'une fraction soit égale à une puissance n, il faut qu'après l'avoir réduite à sa plus simple expression, on puisse extraire exactement la racine n de son numérateur et de son dénominateur. Quand cette double extraction sera possible, il est clair qu'elle fera connaître la racine de la fraction donnée. On trouve ainsi $\sqrt{\frac{867}{363}} = \sqrt{\frac{289}{121}} = \frac{17}{11}$.

300. On peut remplacer cette règle par une autre, fondée sur ce principe que si une fraction est égale à la puissance n d'une fraction, et que l'un de ses termes soit une puissance n, l'autre en doit être une aussi. En effet, supposons que la fraction

$\frac{A}{B^n}$ soit égale à la puissance n d'une fraction $\frac{a}{b}$; on devra avoir

$$\frac{A}{B^n} = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{a^n B^n}{b^n};$$

donc $a^n B^n$ est divisible par b^n. Or, si on conçoit a et B décomposés en facteurs premiers, il est clair que tous ces facteurs sont à la puissance n dans $a^n B^n$; et de même les facteurs premiers de b sont à la puissance n dans b^n. Donc, après avoir divisé $a^n B^n$ par b^n, ce qui revient à supprimer dans $a^n B^n$ tous les facteurs de b^n, il ne restera au quotient que des facteurs élevés à la puissance n; donc A est une puissance exacte de l'ordre n.

Cela posé, remarquons qu'une fraction $\frac{a}{b}$ étant donnée, on peut toujours, en multipliant ou en divisant ses deux termes par des facteurs convenables, rendre son dénominateur puissance exacte d'un ordre quelconque n. Donc il faudra qu'alors le numérateur en soit une aussi, pour que la fraction donnée puisse être égale à la puissance n d'une fraction.

Par exemple, en multipliant les deux termes de la fraction par le dénominateur, on rendra ce dénominateur carré parfait; il deviendra un cube en les multipliant par son carré, et ainsi de suite. De cette manière on a $\sqrt{\frac{867}{363}} = \sqrt{\frac{867 \times 363}{363 \times 363}} = \sqrt{\frac{314721}{363 \times 363}} = \frac{561}{363}$. En simplifiant, on retrouverait $\frac{17}{11}$ comme dans le n° précédent.

301. Maintenant expliquons comment on évalue avec approximation les racines incommensurables. La question générale est celle-ci : *Étant donnée une quantité quelconque* M, *déterminer sa racine* n^{ème} *à moins d'une fraction donnée* $\frac{1}{p}$.

Tout se réduit à chercher combien de fois cette fraction est contenue dans $\sqrt[n]{M}$: car si r exprime ce nombre de fois, il est clair que $\sqrt[n]{M}$ sera entre $\frac{r}{p}$ et $\frac{r+1}{p}$; et comme ces deux fractions ne diffèrent entre elles que de la fraction donnée, il arrivera, à plus forte raison, que la différence entre chacune d'elles et $\sqrt[n]{M}$ sera $< \frac{1}{p}$. En conséquence, on posera

$$[1] \qquad \frac{x}{p} = \sqrt[n]{M};$$

et la valeur de x, calculée à une unité près, sera le nombre r. Or, de l'équation [1], on déduit

$$\frac{x^n}{p^n}=\text{M},\quad x^n=\text{M}p^n,\quad x=\sqrt[n]{\text{M}p^n};$$

donc il faut extraire, à une unité près, la racine du produit $\text{M}p^n$.

Ainsi, on peut établir cette règle générale : *Pour évaluer, avec une approximation marquée par une certaine partie d'unité, la racine* $n^{\text{ème}}$ *d'une quantité donnée* M, *multipliez cette quantité par la puissance* p^n *du dénominateur de la fraction qui désigne l'approximation, extrayez la racine du produit à une unité près, puis divisez cette racine par le dénominateur* p *de cette même fraction.*

Par exemple, veut-on trouver $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{6}$ près? on fait le produit $2\times 36=72$, on en extrait la racine carrée 8, à une unité près, et on divise 8 par 6. Le quotient $\frac{8}{6}$ ou $1\frac{1}{3}$ est la racine cherchée.

Soit encore à évaluer $\sqrt{7\frac{2}{3}}$ à $\frac{1}{5}$ près. On fera le produit $7\frac{2}{3}\times 25=\frac{575}{3}=191\frac{2}{3}$. Alors on remarquera que la racine carrée de ce produit, à une unité près, est la même que si on avait le nombre 191 sans fraction. En conséquence, on extrait, par la règle connue, cette racine qui est 13 : et la racine cherchée sera $\frac{13}{5}$ ou $2\frac{3}{5}$.

302. Les approximations se font ordinairement en décimales, et, pour ce genre de fractions, la règle générale se simplifie beaucoup : je ne parlerai ici que de la racine carrée.

Supposons d'abord qu'on ait à évaluer en décimales la racine carrée d'un nombre entier. Dans ce cas, la règle se réduira à celle-ci : On place à la suite du nombre donné deux fois autant de zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine, on en extrait alors la racine à moins d'une unité, puis on sépare sur la droite de cette racine le nombre requis de décimales.

Il peut se faire que le nombre donné ait déjà des décimales. S'il n'en a pas deux fois autant qu'on en veut à la racine, on complète ce nombre par des zéros; et, s'il en a plus, on supprime les décimales excédantes. Du reste, on extrait la racine sans faire attention à la virgule, mais on y a égard à la fin de l'opération.

S'il s'agissait d'un nombre fractionnaire, tel que $\frac{5}{7}$ ou $3\frac{5}{7}$, on réduirait la fraction $\frac{5}{7}$ en décimales, en ayant soin d'en prendre deux fois autant que la racine doit en contenir.

303. Quand on extrait, à une unité près, la racine carrée d'un nombre entier, on trouve ordinairement le plus grand nombre

entier contenu dans cette racine. Mais le nombre qui a une unité de plus, quoique trop grand, approche aussi à une unité près, et même il peut se faire qu'il soit plus approché que le premier : or, il y a une règle très-simple pour le reconnaître.

Soient a le nombre entier contenu dans la racine, et R le reste de l'opération. Si a est plus approché que $a+1$, le carré de $a+\frac{1}{2}$ surpassera le nombre donné, et par conséquent on devra avoir $R<(a+\frac{1}{2})^2-a^2$; ou $R<a+\frac{1}{4}$; donc alors le reste R est tout au plus égal à a. Ainsi quand le reste ne surpasse pas le nombre trouvé à la racine, ce nombre est le plus approché de la racine. Dans le cas contraire, c'est ce nombre augmenté d'une unité.

304. Les approximations relatives aux racines se ramènent toujours à extraire la racine d'un nombre entier à une unité près. Quand il s'agit d'une racine carrée qui doit avoir beaucoup de chiffres, et qu'on a trouvé plus de la moitié de ces chiffres, je vais montrer comment on obtient les autres d'une manière abrégée, au moyen d'une simple division.

Supposons donc que N soit un nombre entier, et qu'on ait calculé plus de la moitié des chiffres de la racine. Pour leur donner le rang qu'ils doivent avoir, mettons à leur droite autant de zéros qu'il y a encore de chiffres à connaître. Désignons par a le nombre ainsi formé, par R le reste complet qu'on trouve en abaissant toutes les tranches dont on n'a point fait usage, et enfin par x ce qu'il faut ajouter à a pour obtenir $\sqrt{N}$.

On devra avoir $(a+x)^2-a^2=R$, ou, en développant le carré, $2ax+x^2=R$; et de là on tire

$$x=\frac{R}{2a}-\frac{x^2}{2a}.$$

Soient q le quotient de la division de R par $2a$, et R′ le reste : cette égalité devient

$$[1] \qquad x=q+\frac{R'}{2a}-\frac{x^2}{2a}.$$

Supposons qu'il y ait encore n chiffres à trouver à la racine, le carré x^2 sera $<10^{2n}$. Par hypothèse, a renferme au moins $2n+1$ chiffres, donc $a>10^{2n}$; donc $\frac{x^2}{2a}<1$. D'ailleurs $\frac{R'}{2a}$ est <1; donc la différence des deux fractions est <1; donc, en prenant $x=q$, l'erreur est <1, et l'on aura, à une unité près, $\sqrt{N}=a+q$.

Remarque. Il peut se faire que le quotient q soit la valeur exacte

de x, ou qu'il soit moindre, ou bien qu'il soit plus grand.

Si $q=x$, l'équation [1] donne $x^2=R'$; donc $q^2=R'$.

Si $q<x$, l'équation [1] donne $x^2<R'$; donc $q^2<R'$.

Si $q>x$, l'équation [1] donne $x^2>R'$; donc $q^2>R'$.

Ainsi, suivant qu'on a $q^2=R'$, $q^2<R'$, $q^2>R'$, la racine $a+q$ est exacte, ou approchée par défaut, ou approchée par excès.

Progressions arithmétiques.

305. On appelle *progression arithmétique ou par différence une suite de termes tels qu'en retranchant chacun du suivant on obtient toujours la même différence.* Cette différence est *la raison* de la progression.

Voici deux progressions arithmétiques, écrites selon l'usage adopté, $\div 3.7.11.15.$etc. $\div 45.41.37.33.$etc. Dans la première, la raison est 4; dans la seconde, elle est -4. L'une est croissante et l'autre est décroissante.

306. Soit une progression arithmétique quelconque

$$\div a.b.c.d.e.f.\text{etc.},$$

et soit δ la raison. D'après la définition même, chaque terme étant égal au précédent plus la raison, on a $b=a+\delta$, $c=a+2\delta$, $d=a+3\delta$, etc. Donc, en général, l étant un terme dont le rang est marqué par n, on doit avoir

$$[1] \qquad l=a+(n-1)\delta:$$

c'est-à-dire qu'*un terme quelconque est égal au premier, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

307. Considérée sous un point de vue général, cette formule exprime une relation entre a, δ, n et l; et elle servira à résoudre les questions dans lesquelles, trois de ces quantités étant données, il s'agira de déterminer la quatrième.

Par exemple, proposons-nous d'*insérer* m *moyens arithmétiques entre deux nombres donnés* a *et* l.

On entend par là qu'il faut trouver m quantités comprises entre a et l, et formant avec ces nombres une progression arithmétique commençant à a et finissant à l. Ici c'est la raison δ qui est à chercher; car, dès qu'elle sera connue, on pourra former tous les termes de la progression par des additions successives. Or, l'éq. [1] donne

$$\delta=\frac{l-a}{n-1};$$

mais le nombre des moyens étant m, celui de tous les termes, en y comprenant a et l, est $m+2$; en conséquence je fais $n=m+2$, et il vient

$$\delta=\frac{l-a}{m+1}.$$

Donc, *pour avoir la raison, on retranche le premier terme du dernier, et on divise le reste par le nombre des moyens plus* 1.

308. On peut conclure de là qu'*une progression arithmétique étant donnée, si on insère un même nombre de moyens arithmétiques entre chaque terme et le suivant, la nouvelle suite sera encore une progression arithmétique.*

En effet, on formera ainsi des progressions partielles qui auront toutes la même raison ; et comme le dernier terme de chacune est le premier de la suivante, leur ensemble forme encore une progression arithmétique.

309. Maintenant je vais montrer comment *on trouve la somme des termes d'une progression arithmétique.*

Soit une progression arithmétique

$$\div a.b.c.d.\ldots\ldots.h.i.k.l,$$

dont la raison est δ. Par la nature même de la progression, on a, en partant du premier terme,

$$a+\delta=b,\quad b+\delta=c,\quad c+\delta=d,\quad \text{etc.},$$

et, en partant du dernier,

$$l-\delta=k,\quad k-\delta=i,\quad i-\delta=h,\quad \text{etc.};$$

donc, en ajoutant les égalités correspondantes, on aura

$$a+l=b+k,\quad b+k=c+i,\quad c+i=d+h,\quad \text{etc.}:$$

c'est-à-dire que la somme de deux termes quelconques, également éloignés des extrêmes, est égale à la somme des extrêmes.

Cela posé, nommons S la somme des termes de la progression ; en les prenant d'abord dans l'ordre même de la progression, et ensuite dans un ordre inverse, on aura

$$S=a+b+c\ldots.+i+k+l,$$
$$S=l+k+i\ldots.+c+b+a.$$

Donc, en ajoutant ces égalités, si on observe que la somme de deux termes correspondants est toujours égale à la somme des extrêmes $a+l$, et si on appelle n le nombre des termes de la progression, il viendra $2S=(a+l)n$, d'où

[2] $$S=\frac{(a+l)n}{2}.$$

Donc *la somme des termes d'une progression arithmétique est égale à la demi-somme des termes extrêmes, multipliée par le nombres des termes.*

310. Les relations [1] et [2], dans lesquelles il entre cinq quantités a, δ, n, l, S, pourront servir en général à trouver deux quelconques de ces quantités, quand les trois autres seront données. Ainsi, elles fournissent la solution d'autant de problèmes distincts qu'il y a de manières de prendre deux quantités sur cinq; et par conséquent le nombre de ces problèmes sera de $\frac{5.4}{2}$ ou 10. Pour qu'ils soient possibles, il faudra toujours que la valeur de n soit non-seulement réelle, mais encore entière et positive. Sans entrer dans le détail des calculs, je placerai ici les solutions de ces dix problèmes.

I. Données a, δ, n. Inconnues l, S.
$$l = a + (n-1)\delta, \quad S = \tfrac{1}{2}n[2a + (n-1)\delta].$$

II. Données l, δ, n. Inconnues a, S.
$$a = l - (n-1)\delta, \quad S = \tfrac{1}{2}n[2l - (n-1)\delta].$$

III. Données a, n, l. Inconnues δ, S.
$$\delta = \frac{l-a}{n-1}, \quad S = \tfrac{1}{2}n(a+l).$$

IV. Données δ, n, S. Inconnues a, l.
$$a = \frac{2S - n(n-1)\delta}{2n}, \quad l = \frac{2S + n(n-1)\delta}{2n}.$$

V. Données a, n, S. Inconnues δ, l.
$$l = \frac{2S}{n} - a, \quad \delta = \frac{2(S - an)}{n(n-1)}.$$

VI. Données l, n, S. Inconnues a, δ.
$$a = \frac{2S}{n} - l, \quad \delta = \frac{2(nl - S)}{n(n-1)}.$$

VII. Données a, δ, l. Inconnues n, S.
$$n = \frac{l-a}{\delta} + 1, \quad S = \frac{(l+a)(l-a+\delta)}{2\delta}.$$

VIII. Données a, l, S. Inconnues n, δ.
$$n = \frac{2S}{a+l}, \quad \delta = \frac{(l+a)(l-a)}{2S-(l+a)}.$$

IX. Données a, δ, S. Inconnues l, n.
$$n = \frac{\delta - 2a \pm \sqrt{(\delta-2a)^2 + 8\delta S}}{2\delta}, \quad l = a + (n-1)\delta.$$

X. Données l, δ, S. Inconnues a, n.
$$n = \frac{\delta + 2l \pm \sqrt{(\delta+2l)^2 - 8\delta S}}{2\delta}, \quad a = l - (n-1)\delta.$$

Progressions géométriques.

311. *La progression géométrique ou par quotient est une suite de termes tels qu'en divisant chaque terme par celui qui le précède*

le quotient demeure constant. Ce quotient est la *raison* de la progression.

Voici deux exemples où l'on voit comment on écrit ces progressions ∺ 2 : 6 : 18 : 54 : etc., ∺ 60 : 20 : $\frac{20}{3}$: $\frac{20}{9}$: etc. La première est croissante et a pour raison 3 ; la seconde est décroissante et a pour raison $\frac{1}{3}$.

312. Considérons une progression géométrique quelconque

$$∺ a : b : c : d : e : \ldots\ldots k : l.$$

En désignant la raison par q, on doit avoir $b=aq$, $c=aq^2$, $d=aq^3$, et en général, n étant le rang du terme l,

$$[1] \qquad l=aq^{n-1} :$$

c'est-à-dire qu'*un terme quelconque est égal au premier multiplié par la raison élevée à la puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent.*

313. *Si l'on veut insérer* m *moyens géométriques entre* a *et* l, on remarquera que le nombre des termes de la progreesion sera $m+2$; en conséquence on fait $n=m+2$ dans l'équation [1], puis on en tire la raison

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}.$$

On voit qu'il y aura à extraire une racine, opération qui est, en général, assez laborieuse, et qu'on facilitera beaucoup par l'emploi des logarithmes.

314. De cette formule on conclut que *si on insère un même nombre de moyens géométriques entre chaque terme d'une progression géométrique et le suivant, la nouvelle suite sera encore une progression de même espèce.*

En effet, si on met dans la formule, à la place de a et de l, deux termes consécutifs quelconques, le quotient qui est sous le radical sera constant; par suite la raison de toutes les progressions partielles sera la même; et, comme le terme qui finit chacune d'elles commence la suivante, il en résulte que l'ensemble de ces progressions est aussi une progression géométrique.

315. Appelons S la somme des termes : on aura

$$S=a+b+c+d\ldots.+k+l.$$

Si on multiplie cette somme par la raison q, et si on remarque que

le produit de chaque terme par q est égal au terme suivant, il vient

$$qS = b + c + d.... + l + ql.$$

De cette égalité retranchez la précédente, il vient $(q-1)S = ql - a$, d'où l'on tire

[2] $$S = \frac{ql - a}{q - 1}.$$

Donc, *la somme des termes d'une progression géométrique s'obtient en multipliant le dernier terme par la raison, en retranchant du produit le premier terme, et en divisant le reste par la raison moins un.*

316. Remplaçons l par sa valeur aq^{n-1}, la formule [2] devient

[3] $$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1};$$

et je vais examiner les conséquences qu'on en tire dans les hypothèses $q > 1$, $q < 1$, $q = 1$.

1° Soit $q > 1$, ce qui est le cas des progressions croissantes. Alors la quantité q^n est d'autant plus grande que n est plus grand; et même il n'y a aucune limite qu'elle ne puisse surpasser, en donnant à n une valeur assez considérable.

En effet, si on pose la raison $q = 1 + \alpha$, on a $q^n = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \text{etc.}$; donc $q^n > 1 + n\alpha$. Or, quelque petit que soit α, il est clair qu'en prenant n assez grand, $1 + n\alpha$ peut surpasser telle grandeur qu'on voudra; donc, à plus forte raison, en est-il ainsi de q^n.

De là on conclut, ce qui est d'ailleurs évident par soi-même, que la somme S peut devenir aussi grande qu'on voudra en prenant un nombre suffisant de termes dans la progression.

2° Soit $q < 1$, ce qui est le cas des progressions décroissantes. Après avoir changé les signes du numérateur et du dénominateur, la formule [3] peut s'écrire de cette manière $S = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$.

Ici, la quantité q^n sera d'autant moindre que n sera plus grand, et même elle peut devenir aussi petite qu'on veut. Pour s'en convaincre, on posera $q = \frac{1}{\beta}$, β étant > 1. On aura $q^n = \frac{1}{\beta^n}$: or, d'après ce qui a été dit ci-dessus, en prenant n de plus en plus grand, β^n augmentera jusqu'à l'infini; donc q^n diminuera jusqu'à zéro, et par suite $\frac{aq^n}{1 - q}$ décroîtra aussi jusqu'à zéro. On voit ainsi que la somme S doit encore augmenter, ce qui est évident sans

calcul ; et de plus, qu'elle ne surpassera jamais la limite $\frac{a}{1-q}$, dont elle peut d'ailleurs approcher autant qu'on voudra.

Donc, en faisant $n = \infty$, on aura en toute rigueur

$$[4] \qquad S = \frac{a}{1-q}:$$

c'est-à-dire que, *si on prolonge à l'infini une progression géométrique décroissante, la somme des termes est égale au quotient du premier, divisé par l'unité moins la raison.*

Avec cette règle, pour avoir la somme $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} +$ etc., on fera $a = 1$, $q = \frac{1}{3}$; et il viendra $S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

3° Soit $q = 1$. La formule [3] donne $S = \frac{0}{0}$, mais l'indétermination n'est ici qu'apparente : car, en divisant $q^n - 1$ par $q - 1$ (55), la formule devient

$$S = a(q^{n-1} + q^{n-2} \ldots\ldots + q + 1);$$

et alors l'hypothèse $q = 1$ donne $S = an$. Cette conséquence est évidente *a priori* : car, la raison étant 1, tous les termes de la progression sont égaux à a.

317. *Remarques.* La division de $q^n - 1$ par $q - 1$ ne fait que reproduire, dans un ordre inverse, la progression dont la formule [3] représente la somme. Il est clair, en effet, que cette progression peut se représenter ainsi $\div\!\div a : aq : aq^2 : \ldots\ldots aq^{n-1}$. Pour la retrouver sans inversion, il suffirait d'écrire la formule comme il suit :

$$S = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Il y a plus, la formule [4], qui exprime la somme de tous les termes d'une progression décroissante prolongée à l'infini, peut aussi reproduire cette progression. Effectuons, suivant la règle ordinaire, la division de a par $1 - q$.

	a	$1 - q$
1[er] reste	$+ aq$	$a + aq + aq^2 +$ etc.
2[e]	$+ aq^2$	
3[e]	$+ aq^3$	
etc.	etc.	

Si on arrête la division successivement au 1[er] reste, au 2[e], au 3[e], etc.,

il faudra, pour compléter les quotients correspondants, leur ajouter les fractions

$$\frac{aq}{1-q}, \quad \frac{aq^2}{1-q}, \quad \frac{aq^3}{1-q}, \text{ etc.}$$

Or, q étant <1, ces fractions ont des valeurs décroissantes; et comme on peut pousser la division jusqu'à avoir au reste un exposant de q aussi grand qu'on voudra, il s'ensuit qu'en supposant les termes du quotient prolongés indéfiniment, la fraction complémentaire doit être regardée comme zéro. Donc la suite de tous ces termes, continuée à l'infini, est la valeur exacte du quotient.

Il est très-important de ne point perdre de vue que cette conclusion n'est légitime que dans l'hypothèse $q<1$. Si l'on avait $q>1$, les fractions complémentaires, bien loin de tendre vers zéro, iraient en augmentant jusqu'à l'infini négatif.

318. De même que pour les progressions arithmétiques, toutes les questions qu'on peut proposer sur les progressions géométriques peuvent se réduire à dix, dont les solutions se déduisent des deux équations

$$[1] \quad l = aq^{n-1}, \qquad [2] \quad S = \frac{ql-a}{q-1}.$$

Je me bornerai à placer ici le tableau de ces solutions :

I. Données a, q, n. Inconnues l, S.
$$l = aq^{n-1}, \qquad S = \frac{ql-a}{q-1} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

II. Données l, q, n. Inconnues a, S.
$$a = \frac{l}{q^{n-1}}, \qquad S = \frac{l(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}.$$

III. Données a, n, l. Inconnues q, S.
$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}, \qquad S = \frac{\sqrt[n-1]{l^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

IV. Données q, n, S. Inconnues a, l.
$$a = \frac{S(q-1)}{q^n-1}, \qquad l = \frac{Sq^{n-1}(q-1)}{q^n-1}.$$

V. Données a, n, S. Inconnues q, l.
$$q^{n-1} + q^{n-2} \ldots\ldots + 1 = \frac{S}{a}, \qquad l = aq^{n-2}.$$

VI. Données l, n, S. Inconnues q, a,
$$\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{q}\right)^{n-2} \ldots\ldots + 1 = \frac{S}{l},$$
$$a = l\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}.$$

VII. Données a, q, l. Inconnues n, S. $\left\{ S = \dfrac{ql - a}{q - 1}, \quad n = 1 + \dfrac{\log l - \log a}{\log q}. \right.$

VIII. Données a, l, S. Inconnues q, n. $\left\{ q = \dfrac{S - a}{S - l}, \quad n = 1 + \dfrac{\log l - \log a}{\log q}. \right.$

IX. Données a, q, S. Inconnues l, n. $\left\{ l = \dfrac{a + S(q-1)}{q}, \quad n = 1 + \dfrac{\log l - \log a}{\log q}. \right.$

X. Données l, q, S. Inconnues a, n. $\left\{ a = lq - S(q-1), \quad n = 1 + \dfrac{\log l - \log a}{\log q}. \right.$

Dans le V[e] cas, il faut observer qu'en éliminant l entre les équations [1] et [2], il en résulte une équation en q qui sera du degré $n - 1$; et, à moins qu'on n'ait $n = 3$, ce qui la réduirait au second degré, elle ne peut être résolue que par des méthodes qui seront exposées plus tard. D'ailleurs, dès que la raison q est connue, on trouve l par l'équation [1]. La même observation doit être faite à l'égard du VI[e] cas : on y a pris pour inconnue $\dfrac{1}{q}$ au lieu de q.

Enfin, dans les quatre derniers cas, on remarquera que l'équation [2] donne sur-le-champ chacune des quantités a, l, q, S, au moyen des trois autres : de sorte que toute la difficulté est de résoudre l'équation [1], dans laquelle l'inconnue n est en exposant. Cette résolution a été effectuée par logarithmes, d'après les règles qui seront exposées dans le chapitre suivant.

Sommes des puissances semblables et entières de plusieurs quantités en progression arithmétique. — Piles de boulets.

319. Si on élève à la même puissance tous les termes d'une progression géométrique, il en résultera une autre progression géométrique; mais l'observation analogue ne serait point vraie à l'égard d'une progression arithmétique. Cependant, lorsqu'on élève les termes d'une telle progression à une puissance positive et entière, on va voir qu'on peut encore trouver facilement la somme de la nouvelle suite.

Soit une progression arithmétique quelconque,

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots . k \,.\, l\,;$$

en nommant δ la raison, on a $b = a + \delta$, $c = b + \delta$, $\ldots l = k + \delta$;

puis, en élevant toutes ces égalités à la puissance $m+1$, il vient

$$b^{m+1} = a^{m+1} + \frac{m+1}{1} a^m \delta + \frac{(m+1)m}{1.2} a^{m-1}\delta^2 + \text{etc.},$$

$$c^{m+1} = b^{m+1} + \frac{m+1}{1} b^m \delta + \frac{(m+1)m}{1.2} b^{m-1}\delta^2 + \text{etc.},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l^{m+1} = k^{m+1} + \frac{m+1}{1} k^m \delta + \frac{(m+1)m}{1.2} k^{m-1}\delta^2 + \text{etc.}$$

Ajoutons ces dernières égalités membre à membre, supprimons les termes b^{m+1}, c^{m+1}, ... k^{m+1}, communs aux deux sommes, puis transportons a^{m+1} dans le premier membre. On aura

$$l^{m+1} - a^{m+1} = \frac{m+1}{1} \delta(a^m + b^m \ldots + k^m)$$
$$+ \frac{(m+1)m}{1.2} \delta^2(a^{m-1} + b^{m-1} \ldots + k^{m-1}) + \text{etc.}$$

Pour abréger, posons

$$a + b + c \ldots + k + l = S_1,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 \ldots + k^2 + l^2 = S_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^m + b^m + c^m \ldots + k^m + l^m = S_m.$$

avec cette notation, il viendra

$$l^{m+1} - a^{m+1} = \frac{m+1}{1} \delta(S_m - l^m) + \frac{(m+1)m}{1.2} \delta^2(S_{m-1} - l^{m-1}) + \ldots,$$

et de là on tirera, pour S_m, la formule

$$S_m = l^m + \frac{l^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)\delta} - \frac{m}{2} \delta(S_{m-1} - l^{m-1})$$
$$- \frac{m(m-1)}{2.3} \delta^2(S_{m-2} - l^{m-2}) - \text{etc.}$$

La loi des termes qu'on n'écrit pas est assez évidente; et d'ailleurs il est clair que la suite de ces termes s'arrêtera d'elle-même lorsqu'on arrivera à celui qui renferme le facteur $m - m$ ou zéro.

Par cette formule, on trouvera la somme S_m quand les sommes inférieures seront connues. En posant d'abord $m = 0$, elle donnera S_0; en faisant ensuite $m = 1$, elle donnera S_1; puis en faisant $m = 2$, on aura S_2; et ainsi de suite jusqu'à telle somme qu'on voudra.

320. Comme application, considérons la suite naturelle des

nombres ÷ 1 . 2 . 3 . . . N. Dans cette progression, on a $a = 1$, $\delta = 1$, $l = N$; par conséquent la valeur générale de S_m devient

$$S_m = N^m + \frac{N^{m+1} - 1}{m+1} - \frac{m}{2}(S_{m-1} - N^{m-1})$$
$$- \frac{m(m-1)}{2.3}(S_{m-2} - N^{m-2}) - \text{etc.};$$

et en y faisant successivement $m = 0, 1, 2, 3, 4$, on trouvera facilement les valeurs suivantes :

$$S_0 = N,$$
$$S_1 = \frac{N^2 + N}{2} = \frac{N(N+1)}{2},$$
$$S_2 = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$
$$S_3 = \frac{N^4 + 2N^3 + N^2}{4} = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$

321. Dans les arsenaux, les boulets de même calibre sont rangés par piles, et quand on veut calculer le nombre qu'une pile en contient, on a recours aux formules précédentes. Ces piles peuvent être ou *triangulaires*, ou *quadrangulaires*, ou *rectangulaires*.

Piles triangulaires. On dispose sur le sol une tranche de boulets de manière que les centres de ceux qui sont sur les bords forment un triangle équilatéral. Sur cette tranche on en construit une seconde, en plaçant des boulets au-dessus des vides de la première. Cette nouvelle tranche aura encore la forme d'un triangle équilatéral; mais son côté aura un boulet de moins. On continue de s'élever ainsi, par tranches successives, jusqu'à ce qu'on ne puisse placer qu'un seul boulet.

Désignons par N le côté de la base, c'est-à-dire le nombre des boulets contenus dans un côté de la tranche qui touche le sol; et appelons Y le nombre des boulets renfermés dans cette tranche. D'après ce qui vient d'être dit, on a $Y = 1 + 2 + 3 \ldots + N$: or, cette somme n'est autre que la somme S_1 du numéro précédent; donc

$$Y = \frac{N^2 + N}{2}.$$

Si dans cette expression on remplace N successivement par les nombres 1, 2, 3, etc., on aura les différentes tranches à partir du

sommet, savoir : $\frac{1^2+1}{2}$, $\frac{2^2+2}{2}$, $\frac{3^2+3}{2}$, etc. Donc la somme Z des boulets de toute la pile sera

$$Z=\frac{1^2+1}{2}+\frac{2^2+2}{2}+\frac{3^2+3}{2}\ldots+\frac{N^2+N}{2}.$$

Cette somme peut s'écrire ainsi :

$$Z=\frac{1^2+2^2+3^2\ldots+N^2}{2}+\frac{1+2+3\ldots+N}{2}.$$

Ici se retrouvent les sommes S_2 et S_1 du numéro précédent ; en conséquence, on aura

$$Z=\frac{N(N+1)(2N+1)}{12}+\frac{N(N+1)}{4}.$$

En réduisant, on trouve, pour les piles triangulaires, la formule

$$Z=\frac{N(N+1)(N+2)}{6}.$$

Supposons que le côté de la base contienne 35 boulets : on fera $N=35$, et on aura, pour la pile entière, $Z=\frac{35\times 36\times 37}{6}=7770$.

Piles quadrangulaires. Elles ont pour base une tranche de boulets rangés en carré. Les autres tranches sont aussi des carrés dont chacun a sur son côté un boulet de moins que la tranche immédiatement inférieure, de telle sorte que la plus élevée n'a plus qu'un seul boulet, qui est le sommet de la pile.

Désignons encore par N le côté de la base, et par Z le nombre de boulets de toute la pile. L'addition de toutes les tranches, en commençant par le sommet, donne $Z=1^2+2^2+3^2\ldots+N^2$. Or, cette somme est précisément la quantité S_2 du n° **320** ; donc

$$Z=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Par exemple, supposons qu'il y ait 35 boulets sur le côté de la base, on aura $N=35$, et alors il viendra, pour la pile entière, $Z=\frac{35\times 36\times 71}{6}=14910$.

Piles rectangulaires. Dans ces piles, la base est un rectangle au lieu d'un carré, la tranche placée au-dessus est aussi un rectangle qui a un boulet de moins sur chacun de ses côtés, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à une simple file de boulets.

Représentons par $p+1$ le nombre des boulets de la file supérieure. La tranche placée au-dessous contiendra deux files de $p+2$ boulets; la suivante en renfermera trois de $p+3$ boulets, et ainsi de suite. Si donc n désigne le nombre des boulets du petit côté de la base, et Z celui des boulets de toute la pile, on aura

$$\begin{aligned} Z &= (p+1)+2(p+2)+3(p+3)\ldots+n(p+n) \\ &= p(1+2+3\ldots+n)+(1^2+2^2+3^2\ldots+n^2) \\ &= \frac{pn(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

En réduisant au même dénominateur et faisant attention aux facteurs communs, il vient

$$Z=\frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6}.$$

Dans cette formule, p est le nombre des boulets, moins un, de la file supérieure. Si on veut y introduire le nombre des boulets du grand côté de la base, il faut observer qu'il est égal à $p+n$, de sorte qu'en le désignant par N, on aura $p+n=N$, d'où $p=N-n$. Par suite la formule Z devient, en fonction des côtés N et n,

$$Z=\frac{n(n+1)(3N-n+1)}{6}.$$

Pour exemple, soit une pile dont la base ait 50 boulets sur son grand côté, et 35 sur le petit : on fera $N=50$, $n=35$; et la formule donnera $Z=\dfrac{35\times36\times(150-35+1)}{6}=24360.$

Chaque espèce de pile pourrait être tronquée, c'est-à-dire terminée à une tranche composée de plusieurs files. Dans ce cas, la pile est encore facile à calculer; car elle est la différence de deux piles complètes.

Ce serait ici le lieu de parler des *nombres figurés*, *des nombres polygones*; mais ils ne sont qu'un simple objet de curiosité, et je me contenterai de renvoyer à l'*Algèbre* d'EULER.

Fractions continues.

322. *Définitions.* On désigne sous le nom de *fractions continues* des expressions de la forme

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.},}}}$$

dans lesquelles a, b, c, d,.... sont des nombres entiers positifs. La suite de ces nombres peut d'ailleurs être limitée ou illimitée.

Pour plus de généralité, au lieu de l'unité, on pourrait prendre des numérateurs quelconques, et regarder les dénominateurs a, b, c,.... comme représentant telles quantités qu'on voudra; mais les fractions continues, telles que nous les avons définies, sont les seules qui méritent quelque attention.

Je nommerai *quotients incomplets* ou simplement *quotients* les nombres a, b, c,... qui entrent dans la fraction continue, sans supposer pour cela qu'ils doivent toujours provenir d'une division. Les *quotients complets* s'obtiennent en prenant chaque quotient incomplet avec toute la quantité qui lui est jointe par le signe $+$. Tel serait $b+\frac{1}{c+\text{etc.}}$. Les fractions $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, etc., sont souvent appelées *fractions partielles* ou *fractions intégrantes.*

Si on prend successivement, dans la fraction continue, d'abord le premier terme, puis les deux premiers, puis les trois premiers, etc., on aura différentes expressions qu'on pourra réduire à la forme de fractions ordinaires. Ces fractions sont désignées sous le nom de *réduites* ou de *fractions convergentes.*

323. *Loi de formation des réduites.* Pour les deux premières, on a immédiatement

$$a=\frac{a}{1},\qquad a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}.$$

On passera à la 3ᵉ réduite en changeant dans la 2ᵉ b en $b+\frac{1}{c}$, ce qui donne

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}.$$

On obtiendrait semblablement la 4ᵉ réduite en changeant, dans la 3ᵉ, c en $c+\frac{1}{d}$; et ainsi des suivantes.

Mais déjà on aperçoit que la troisième peut se former en multipliant les deux termes de la seconde par le quotient c, et en ajoutant respectivement à ces produits les deux termes de la première; il s'agit donc de reconnaître si cette loi est générale. Or, cette question revient à examiner si cette loi, étant vraie jusqu'à une

certaine réduite, subsiste encore à l'égard de la suivante; car alors il est clair qu'elle devra s'étendre de la 3e à la 4e, de celle-ci à la 5e, et ainsi de suite indéfiniment.

Soient donc trois réduites consécutives quelconques $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}, \frac{P''}{Q''}$; nommons m le dernier quotient employé dans la composition de $\frac{P''}{Q''}$, et supposons qu'on ait

$$P'' = P'm + P. \qquad Q'' = Q'm + Q.$$

Nommons $\frac{1}{n}$ la fraction intégrante qui, dans la fraction continue, vient après le quotient m : on aura la réduite qui succède à $\frac{P''}{Q''}$, en remplaçant m par $m+\frac{1}{n}$ dans l'expression de $\frac{P''}{Q''}$: et comme P, Q, P', Q', ne contiennent point m, il est clair qu'on aura, pour la nouvelle réduite,

$$\frac{P'\left(m+\frac{1}{n}\right)+P}{Q'\left(m+\frac{1}{n}\right)+Q} = \frac{(P'm+P)n+P'}{(Q'm+Q)n+Q'} = \frac{P''n+P'}{Q''n+Q'}.$$

Cette réduite est évidemment formée d'après la même loi que la précédente; donc la loi est générale. Donc *chaque réduite, à partir de la troisième, se formera en multipliant les deux termes de la réduite précédente par le nouveau quotient, et en ajoutant respectivement à ces produits les deux termes de l'avant-précédente.*

Quand on applique cette règle, il est commode de disposer tous les quotients a, b, c,.... sur une ligne horizontale, et de placer au-dessous d'eux les réduites correspondantes à mesure qu'on les forme. Par exemple, si l'on donnait

$$x = 3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7}}},$$

la disposition serait celle-ci :

Quotients...	3,	5,	2,	7.
Réduites....	$\frac{3}{1}$,	$\frac{16}{5}$,	$\frac{35}{11}$,	$\frac{261}{82}$.

Lorsque la fraction continue n'est pas terminée, la loi d'après laquelle se forment les réduites prouve que les numérateurs et les dénominateurs forment deux suites croissantes jusqu'à l'infini.

324. *Les réduites sont alternativement plus petites et plus grandes que la fraction continue.*

La 1[re] réduite est égale à a, et comme on néglige la partie fractionnaire qui lui est ajoutée, elle est évidemment $< x$.

La 2[e] est égale à $a + \frac{1}{b}$; et comme on y donne à l'unité un diviseur b moindre que dans la fraction continue, il s'ensuit que cette 2[e] réduite est $> x$.

La 3[e] est égale à $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$: ici le diviseur $b + \frac{1}{c}$, d'après ce qui vient d'être dit pour la 2[e], est une quantité trop forte; donc la 3[e] réduite est $< x$. Le même raisonnement se continue indéfiniment.

325. *La différence entre deux réduites consécutives quelconques est égale à l'unité divisée par le produit des dénominateurs des deux réduites.*

Supposons que $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$, soient trois réduites successives; d'après la loi démontrée (323), si on nomme m le dernier quotient, on doit avoir

$$P'' = P'm + P, \qquad Q'' = Q'm + Q.$$

Cela posé, les réductions ordinaires donnent

$$\frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q} = \frac{QP' - PQ'}{QQ'},$$

$$\frac{P''}{Q''} - \frac{P'}{Q'} = \frac{P'm + P}{Q'm + Q} - \frac{P'}{Q'} = \frac{PQ' - QP'}{Q'Q''}.$$

Ces deux différences ont des numérateurs égaux et des signes contraires. Ainsi, on peut déjà conclure que la différence entre deux réduites consécutives quelconques est égale, abstraction faite du signe, à un nombre constant divisé par le produit des dénominateurs de ces deux réduites. Or, si l'on considère les deux premières réduites, on trouve

$$\frac{ab + 1}{b} - \frac{a}{1} = \frac{1}{b};$$

donc le numérateur constant de toutes les différences est égal à 1, et l'on a

$$QP' - PQ' = \pm 1.$$

Le signe sera + ou —, selon qu'on retranchera une réduite de rang impair d'une réduite de rang pair, ou *vice versâ*.

Les dénominateurs croissant jusqu'à l'infini, il est évident qu'on peut assigner deux réduites consécutives dont la différence soit aussi petite qu'on voudra ; et comme elles comprendront entre elles la valeur totale de x, il y a, dès à présent, lieu de conclure qu'on peut trouver une réduite aussi approchée qu'on voudra.

Par exemple, si l'approximation doit être à $\frac{1}{1000}$ près, on poussera le calcul des réduites jusqu'à ce que le produit des dénominateurs des deux dernières soit au moins égal à 1000, et alors l'avant-dernière réduite aura l'approximation requise.

326. *Les réduites, formées d'après la règle* (**323**), *sont toujours des fractions irréductibles.*

Si une réduite $\frac{P}{Q}$ pouvait se simplifier, il y aurait un facteur k commun à P et à Q, et k devrait aussi diviser $QP' - PQ'$: or cela est impossible, car $QP' - PQ' = \pm 1$.

327. *Chaque réduite est plus approchée de la vraie valeur que la réduite précédente.*

Pour le démontrer, j'observerai d'abord que si on complète dans chaque réduite le dernier quotient employé à la former, on aura des expressions égales à la valeur totale de x, et qu'il sera facile de comparer avec celles des réduites. Par exemple, soit la réduite

$$\frac{P''}{Q''} = \frac{P'm + P}{Q'm + Q},$$

dans laquelle m est le dernier quotient employé. Si on pose le quotient complet $m + \text{etc.} = y$, et si on remplace m par y dans cette réduite, il est évident qu'on aura une expression égale à x,

$$x = \frac{P'y + P}{Q'y + Q},$$

et que la composition de cette expression la rend facilement comparable avec les deux réduites $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$.

Cela posé, prenons les différences entre x et ces réduites, il vient

$$x - \frac{P}{Q} = \frac{P'y + P}{Q'y + Q} - \frac{P}{Q} = \frac{(QP' - PQ')y}{Q(Q'y + Q)},$$

$$x - \frac{P'}{Q'} = \frac{P'y + P}{Q'y + Q} - \frac{P'}{Q'} = \frac{PQ' - QP'}{Q'(Q'y + Q)}.$$

Quelle que soit la valeur de la quantité $QP' - PQ'$, ces diffé-

rences sont de signes contraires ; et de là on conclut, comme au n° 324, que la valeur de x est toujours comprise entre deux réduites consécutives.

Mais si on se rappelle que $QP'-PQ'=\pm 1$ (325), les différences ci-dessus se réduiront à

$$x-\frac{P}{Q}=\frac{\pm y}{Q(Q'y+Q)},\quad x-\frac{P'}{Q'}=\frac{\mp 1}{Q'(Q'y+Q)}.$$

Or, y étant un quotient complet, et Q' étant un dénominateur qui vient après Q, on doit avoir $y>1$ et $Q'>Q$; donc la deuxième différence, abstraction faite du signe, est moindre que la précédente. C'est cette propriété qui a fait donner aux réduites le nom de *fractions convergentes*.

328. *Remarque*. Le quotient complet y est compris entre m et $m+1$: donc si, dans le dénominateur de la deuxième différence, on remplace y par m, on aura une fraction trop grande ; et si on y remplace y par $m+1$, on aura une fraction trop petite. Donc, abstraction faite du signe, on a

$$x-\frac{P'}{Q'}<\frac{1}{Q'(Q'm+Q)}\quad \text{et}\quad x-\frac{P'}{Q'}>\frac{1}{Q'(Q'm+Q'+Q)},$$

ou bien, puisque $Q'm+Q=Q''$,

$$x-\frac{P'}{Q'}<\frac{1}{Q'Q''}\quad \text{et}\quad x-\frac{P'}{Q'}>\frac{1}{Q'(Q'+Q'')}.$$

On obtient ainsi deux limites de la différence $x-\frac{P'}{Q'}$. La première limite revient à cette règle déjà connue (325), qu'*en prenant une réduite pour valeur approchée de* X, *l'erreur est moindre que l'unité divisée par le produit des dénominateurs de cette réduite et de la suivante*. Mais la seconde limite montre en outre que *l'erreur est plus grande que l'unité divisée par le produit du premier dénominateur multiplié par la somme de ce dénominateur et du suivant*.

329. *Chaque réduite approche de* X, *non-seulement plus qu'aucune réduite précédente, mais encore plus que toute autre fraction qui aurait un dénominateur moindre que celui de cette réduite*.

Nous venons de reconnaître que chaque réduite approche plus de x que les réduites précédentes ; mais aussi elle a l'inconvénient d'être exprimée en termes plus grands, et l'on sait d'ailleurs qu'elle n'est point simplifiable. Il est donc naturel de rechercher

s'il existe une fraction conçue en termes plus simples qu'une réduite, et qui cependant ne soit pas moins approchée de x.

Reprenons les réduites $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$; et supposons qu'une fraction $\frac{\alpha}{\beta}$, qu'on peut toujours regarder comme irréductible, soit plus près de x que $\frac{P'}{Q'}$. Puisque x est entre ces réduites, mais plus près de la 2[e] que de la 1[re], il faudrait que $\frac{\alpha}{\beta}$ fût aussi entre ces réduites. Donc, abstraction faite du signe des différences, on aurait

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{P}{Q}<\frac{P'}{Q'}-\frac{P}{Q}, \quad \text{ou} \quad \frac{Q\alpha-P\beta}{Q\beta}<\frac{1}{QQ'}.$$

Mais le numérateur $Q\alpha - P\beta$ est un nombre au moins égal à 1; donc il faudrait qu'on eût le dénominateur $Q\beta > QQ'$, ou $\beta > Q'$. Ainsi une fraction, pour être plus près de x que la réduite $\frac{P'}{Q'}$, doit avoir un dénominateur plus grand (*).

Cette propriété imprime aux réduites un caractère qu'il importe de bien saisir. En général, quand on emploie des fractions dans les approximations, il ne faut pas croire qu'en prenant des dénominateurs plus grands on obtienne toujours un plus grand degré d'exactitude. Pour mieux me faire comprendre, soient les trois fractions $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$. Si on les réduit au même dénominateur, elles deviennent $\frac{20}{28}$, $\frac{21}{28}$, $\frac{24}{28}$; et par là on reconnaît qu'elles sont rangées par ordre de grandeur. Or, il peut se faire qu'une inconnue x tombe entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{6}{7}$, mais plus près de $\frac{3}{4}$ que des deux autres, et alors il est clair qu'il sera impossible, avec des septièmes d'unité, d'obtenir pour x une approximation aussi grande que $\frac{3}{4}$. Cet exemple montre qu'en cherchant des valeurs approchées parmi les fractions qui ont un dénominateur donné, on peut quelquefois avoir un moindre degré de précision qu'avec des dénominateurs plus petits. Mais il est très-remarquable que cela ne doive jamais arriver quand les valeurs approchées seront choisies parmi les réduites qui se déduisent de la fraction continue égale à l'inconnue; et c'est sur cette propriété que je voulais fixer l'attention.

(*) Il y a plus : si on ne considère que des valeurs approchées qui soient toutes moindres, ou toutes plus grandes que x, on peut facilement prouver qu'une fraction, pour approcher plus de x qu'une réduite, mais dans le même sens, doit avoir un dénominateur plus grand que celui de la réduite suivante.

330. *Toute fraction continue périodique est égale à l'une des racines d'une équation du 2e degré à coefficients rationnels.*

Soient a, b,.... les premiers quotients, qui forment la partie non périodique; et soient p, q,.... les quotients suivants, qui reviennent périodiquement. Posons

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cdots + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}} \qquad y = p + \cfrac{1}{q + \cdots + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}$$

Il est clair que dans ces deux expressions on pourrra remplacer par y la suite $p +$ etc. : de sorte qu'on aura

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cdots + \cfrac{1}{y}}, \qquad y = p + \cfrac{1}{q + \cdots + \cfrac{1}{y}}.$$

En considérant ainsi ces deux suites comme terminées à y, et en leur appliquant les règles relatives à la composition des réduites, on arrivera à deux équations de cette forme :

$$x = \frac{P'y + P}{Q'y + Q}, \qquad y = \frac{R'y + R}{S'y + S}.$$

Or, si de la première on tire la valeur de y en x, et si on la substitue dans la deuxième, il est facile de voir que l'équation résultante sera du 2e degré en x. Donc, etc.

La proposition inverse est également vraie : mais la démonstration en est assez difficultueuse; et je la renvoie plus loin, à la fin de cet article (**337**).

331. *Développer une quantité quelconque en fraction continue.*

Représentons cette quantité par x; la règle générale consiste à faire successivement

$$x = a + \frac{1}{x'}, \quad x' = b + \frac{1}{x''}, \quad x'' = c + \frac{1}{x'''}, \text{ etc.}$$

a étant le plus grand nombre entier contenu dans x, b le plus grand nombre entier contenu dans x', et ainsi de suite. Quand on saura trouver ces nombres, en remplaçant successivement x', x'',... par leurs valeurs, on aura le développement demandé,

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \text{etc.}}}$$

Lorsque x est une quantité incommensurable, la fraction continue devra se prolonger indéfiniment : car si elle se terminait, les réduites seraient en nombre limité et la dernière serait la valeur exacte de x; donc x ne serait pas incommensurable. Au contraire lorsque x est commensurable la fraction continue s'arrêtera toujours, ainsi qu'on va le voir tout à l'heure.

332. *Convertir une fraction ordinaire en fraction continue, et former ensuite les fractions convergentes.*

Soit une fraction

$$x = \frac{M}{N}.$$

Divisons M par N; nommons a le quotient et R le reste : on aura

$$\frac{M}{N} = a + \frac{R}{N}.$$

Divisons N par R : en nommant b le quotient et R$'$ le reste, on aura

$$\frac{N}{R} = b + \frac{R'}{R}, \quad \text{d'où} \quad \frac{R}{N} = \cfrac{1}{b + \cfrac{R'}{R}}.$$

Divisons encore R par R$'$: en nommant c le quotient et R$''$ le reste, on a pareillement

$$\frac{R}{R'} = c + \frac{R''}{R'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{R'}{R} = \cfrac{1}{c + \cfrac{R''}{R'}}.$$

En continuant ainsi ces opérations, qui sont les mêmes que si on cherchait le plus grand commun diviseur de M et de N, on arrivera nécessairement à un reste nul, puisque les restes successifs sont des nombres entiers décroissants. Supposons, pour fixer les idées, qu'on trouve, sans reste,

$$\frac{R'}{R''} = d, \quad \text{d'où} \quad \frac{R''}{R'} = \frac{1}{d}.$$

Alors il est facile de voir qu'on aura successivement

$$\frac{M}{N} = a + \frac{R}{N} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{R'}{R}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{R''}{R'}}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}.$$

Au moyen des quotients a, b, c,.... les réduites ou fractions convergentes se calculeront comme il a été expliqué au n° 323.

Par exemple, soit la fraction $x=\frac{86400}{20929}$. Voici le tableau des calculs :

		4	7	1	3	1	16	1	1	15
Divisions. . . .	86400	20929	2684	2141	543	512	31	16	15	1
	2684	2141	543	512	31	16	15	1	0	

Quotients. . . . 4, 7, 1, 3, 1, 16, 1, 1, 15.

Réduites. . . . $\frac{4}{1}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8}, \frac{128}{31}, \frac{161}{39}, \frac{2704}{655}, \frac{2865}{694}, \frac{5569}{1349}, \frac{86400}{20929}.$

La fraction donnée étant conçue en nombres assez considérables, on pourra, si on le juge convenable, la remplacer par une de ces réduites ; et alors on sera assuré qu'aucune fraction plus simple ne pourra en approcher davantage. En prenant la réduite $\frac{161}{39}$, l'erreur serait $< \frac{1}{39 \times 655}$, ou $< \frac{1}{25545}$.

333. *Réduire en fraction continue la quantité irrationnelle* $\sqrt{a^2+1}$, *dans laquelle* a *est un nombre entier quelconque.*

Le plus grand nombre entier contenu dans $\sqrt{a^2+1}$ est évidemment a. En conséquence on posera

$$\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{x'}, \quad \text{d'où} \quad x'=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}.$$

Pour extraire les entiers contenus dans x', on multiplie d'abord les deux termes de cette valeur par $a+\sqrt{a^2+1}$, et on lui donne cette forme plus simple

$$x'=a+\sqrt{a^2+1}.$$

Alors il est clair que $2a$ est la partie entière de x'; on fera donc

$$x'=a+\sqrt{a^2+1}=2a+\frac{1}{x''}, \quad \text{d'où} \quad x''=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}.$$

Cette valeur de x'' étant la même que celle de x', il s'ensuit que $\sqrt{a^2+1}$ sera exprimé par la fraction continue périodique

$$\sqrt{a^2+1}=a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\text{etc.}}}$$

En traitant de la même manière la racine carrée d'un nombre entier quelconque qui n'est pas un carré exact, on trouvera toujours une fraction continue périodique, mais il pourra se faire que la période se manifeste plus tard. Cette proposition rentre dans celle dont j'ai déjà renvoyé la démonstration au n° 337.

334. *On propose d'évaluer le rapport approché de la circonférence au diamètre en fractions, dont chacune soit telle qu'aucune fraction plus simple ne puisse être plus approchée.*

D'après la propriété démontrée n° **329**, cette question revient à développer en fraction continue le rapport de la circonférence au diamètre, et à calculer ensuite les réduites. Il n'existe point de méthode directe pour opérer ce développement, mais on y supplée en se servant de la valeur approchée, en décimales, du rapport dont il s'agit. Si on désigne par π ce rapport et qu'on se borne aux dix premières décimales, on a

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots..$$

Si on ajoute une unité à la dernière décimale, la valeur exacte de π sera comprise entre les deux fractions

$$\frac{31\,415\,926\,535}{10\,000\,000\,000},\quad \frac{31\,415\,926\,536}{10\,000\,000\,000}.$$

En conséquence, on les réduira toutes deux en fraction continue; et en ne prenant que la partie commune aux deux développements, on sera assuré qu'elle doit appartenir aussi à celui du rapport π. Pour ne point perdre de vue l'objet principal, j'admettrai ici cette assertion comme démontrée (voy. le n° **335**).

Si on effectue pour chaque fraction les divisions successives, comme au n° **332**, on trouve ces deux séries de quotients :

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 6, 2, 13, 3, 1, 12, 3,

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 45, 1, 1, 8.

Ne considérons donc que ceux qui sont communs à ces deux suites, à partir du premier sans interruption; puis formons les réduites correspondantes : on aura ainsi les valeurs cherchées.

Quotients... 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1.

Réduites... $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{103\,993}{33\,102}$, $\frac{104\,348}{33\,215}$, $\frac{208\,341}{66\,317}$.

La 1re réduite n'est autre chose que le quotient 3, auquel on donne l'unité pour dénominateur; et la 2e est égale à $3+\frac{1}{7}$.

La 3e réduite $\frac{333}{106}$ est formée en multipliant les deux termes de la précédente par le 3e quotient 15, et en ajoutant respectivement aux produits les termes de l'avant-précédente. Calcul analogue pour la 4e réduite et les suivantes (**323**).

Ces fractions sont alternativement plus petites et plus grandes

que la vraie valeur de π. Ainsi la fraction $\frac{22}{7}$ sera trop grande; c'est le rapport trouvé par ARCHIMÈDE. D'après le n° **328**, l'erreur qu'il comporte est entre $\frac{1}{7\times 106}$ et $\frac{1}{7(7+106)}$, c'est-à-dire entre $\frac{1}{742}$ et $\frac{1}{791}$.

La fraction $\frac{355}{113}$ est le rapport d'ADRIEN MÉTIUS. Il est encore plus grand que le rapport exact, mais il est beaucoup plus approché que celui d'ARCHIMÈDE : car il ne laisse qu'une erreur comprise entre $\frac{1}{113\times 33102}$ et $\frac{1}{113(113+33102)}$, c'est-à-dire entre $\frac{1}{3740526}$ et $\frac{1}{3753295}$.

Le rapport $\frac{333}{106}$ placé entre celui d'ARCHIMÈDE et celui de MÉTIUS, paraît avoir été connu des Indiens; il n'est guère plus simple que $\frac{355}{113}$, mais il est beaucoup moins approché : car l'erreur est entre $\frac{1}{106\times 113}$ et $\frac{1}{106(106+113)}$, c'est-à-dire entre $\frac{1}{11978}$ et $\frac{1}{23214}$.

Si on veut comparer ces rapports avec la valeur de π rapportée au commencement de ce numéro, ce qu'il y a de mieux, c'est de les réduire en décimales. On trouve

$$\frac{22}{7}=3,142\ldots,\quad \frac{333}{106}=3,141\,50\ldots,\quad \frac{355}{113}=3,141\,592\,9\ldots$$

On voit donc que le rapport d'ARCHIMÈDE est en erreur à la 3[e] décimale, celui de MÉTIUS à la 7[e], et le rapport intermédiaire à la 5[e].

D'un autre côté, si on cherche les valeurs approchées de π par des polygones inscrits et circonscrits en prenant le carré pour point de départ, on reconnaîtra qu'il faut s'élever aux polygones de 128 côtés pour avoir deux décimales exactes, à ceux de 2048 côtés pour en avoir quatre, et à ceux de 8192 pour en avoir six. Par là on voit de quels polygones dépendent les trois rapports ci-dessus. Je n'ai rien dit des autres rapports parce qu'ils sont beaucoup plus compliqués, et qu'ils n'ont d'ailleurs aucune célébrité.

335. Je me suis appuyé, dans le n° **334**, sur une assertion qui a besoin de démonstration, et je proposerai la suivante.

Supposons que x soit une quantité comprise entre u et v, et qu'en développant u, v, x, en fractions continues, on ait

$$u=a+\frac{1}{u'},\quad u'=b+\frac{1}{u''},\quad u''=c+\frac{1}{u'''},\ \text{etc.}$$

$$v=a+\frac{1}{v'},\quad v'=b+\frac{1}{v''},\quad v''=c+\frac{1}{v'''},\ \text{etc.}$$

$$x=a'+\frac{1}{x'},\quad x'=b'+\frac{1}{x''},\quad x''=c'+\frac{1}{x'''},\ \text{etc.}$$

Puisque x est entre u et v, et que la même partie entière a se trouve

dans u et v, cette partie entière doit aussi se trouver dans x; donc $a' = a$. De plus, il est clair que $\frac{1}{x'}$ doit être entre $\frac{1}{u'}$ et $\frac{1}{v'}$, et que par suite x' est entre u' et v' : ainsi on peut raisonner sur u', v', x', comme sur u, v, x, et on conclura que $b' = b$. Ensuite on conclura encore que $c' = c$. On poursuivra de même; et tant qu'il y aura des termes communs aux deux premières fractions continues, on reconnaîtra que ces termes doivent également se trouver dans la troisième : c'est ce qu'il fallait démontrer.

336. Les fractions continues fournissent un procédé *pour résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée*

$$[1] \qquad ax + by = c.$$

Dans cette équation, les nombres a, b, c sont entiers, et les deux premiers sont supposés n'avoir aucun facteur commun. Concevons qu'on ait développé le rapport $\frac{a}{b}$ en fraction continue, et qu'on ait calculé toutes les réduites : la dernière ne sera autre que ce rapport même. Retranchons-en l'avant-dernière que je représenterai par $\frac{a'}{b'}$.

Le numérateur de la différence sera $ab' - ba'$, et par la propriété du n° 325, on a $ab' - ba' = \pm 1$. On doit prendre $+$ ou -1 selon que la dernière réduite est de rang pair ou impair.

Multipliée par $\pm c$, cette égalité devient $a \times \pm b'c + b \times \mp a'c = c$; donc on satisfait à l'éq. [1] en prenant $x = \pm b'c$, $y = \mp a'c$. Cette solution étant connue, on peut écrire les formules qui donnent toutes les autres. En désignant par t un nombre entier quelconque (137), ces formules sont

$$x = \pm b'c - bt, \quad y = \mp a'c + at,$$

Exemple. Soit l'équation $\qquad [3] \qquad 261x - 82y = 117.$

Si on réduit $\frac{261}{82}$ en fraction continue, on trouve

Quotients.......	3,	5,	2,	7.
Réduites........	$\frac{3}{1}$,	$\frac{16}{5}$,	$\frac{35}{11}$,	$\frac{261}{82}$.

Si on prend le numérateur de la différence $\frac{261}{82} - \frac{35}{11}$, et si on fait

attention que la fraction $\frac{261}{32}$ est une réduite de rang pair, on aura $261 \times 11 - 82 \times 35 = +1$. Donc, en multipliant par 117,

$$261 \times 11 \times 117 - 82 \times 35 \times 117 = 117,$$

donc on satisfait à l'équation [3] en faisant $x = 11 \times 117 = 1287$ et $y = 35 \times 117 = 4095$; donc les valeurs générales de x et y sont

$$x = 1287 + 82t, \quad y = 4095 + 261t.$$

Si on fait la division de 1287 par 82, et celle de 4095 par 261, on trouve $1287 = 82 \times 15 + 57$ et $4095 = 261 \times 15 + 180$. Alors, en remarquant que t est un nombre entier quelconque, on pourra écrire plus simplement

$$x = 57 + 82t, \quad y = 180 + 261t.$$

*337. Je place ici cette proposition : *Que toute racine irrationnelle d'une équation du 2e degré, dont les coefficients sont rationnels, se développe en une fraction continue périodique.*

En chassant les dénominateurs, et en multipliant tous les termes par 2, si cela est nécessaire pour que le coefficient du second terme soit pair, on mettra l'équation du 2e degré sous la forme

[1] $$a'x^2 - 2bx - a = 0$$

a, a', b étant des nombres entiers, positifs ou négatifs. Prenons l'une des deux racines de cette équation, par exemple,

[2] $$x = \frac{b + \sqrt{b^2 + aa'}}{a'};$$

supposons-la positive et incommensurable : je dis qu'elle doit se développer en fraction continue périodique.

Soit m la partie entière de x : posons $x = m + \frac{1}{x'}$, et cherchons la partie entière de x'. On a d'abord

$$\frac{1}{x'} = \frac{b + \sqrt{b^2 + aa'}}{a'} - m = \frac{b - a'm + \sqrt{b^2 + aa'}}{a'};$$

donc

$$x' = \frac{a'}{b - a'm + \sqrt{b^2 + aa'}}.$$

Pour remettre le radical au numérateur, multiplions les deux termes de cette fraction par $-(b - a'm) + \sqrt{b^2 + aa'}$; il viendra, réductions faites,

$$x' = \frac{a'm - b + \sqrt{b^2 + aa'}}{-a'm^2 + 2bm + a}.$$

Pour simplifier, faisons $b' = a'm - b$, $a'' = -a'm^2 + 2bm + a$; et la valeur de x' sera

$$x' = \frac{b' + \sqrt{b^2 + aa'}}{a''}.$$

Remarquons que les valeurs de b' et a'' donnent $b'^2 + a'a'' = b^2 + aa'$. Ainsi on peut, sous le radical de x', remplacer $b^2 + aa'$ par $b'^2 + a'a''$. Dès lors il est évident que si m' est la partie entière de x', et que l'on pose $x' = m' + \frac{1}{x''}$, on trouvera, en répétant les calculs précédents,

$$x'' = \frac{b'' + \sqrt{b'^2 + a'a''}}{a'''}.$$

Ici les valeurs de b'' et a''' sont $b'' = a''m' - b'$, $a''' = -a''m'^2 + 2b'm' + a'$; et l'on doit encore avoir $b''^2 + a''a''' = b'^2 + a'a''$.

Soit m'' la partie entière de x'' : en continuant comme on vient de faire, on aura la valeur de x en fraction continue,

$$x = m + \cfrac{1}{m' + \cfrac{1}{m'' + \text{etc.}}}$$

Remarquez surtout que dans la suite des valeurs analogues à x, x', x'', le radical est constamment égal à $\sqrt{b^2 + aa'}$: c'est là un premier point qu'il était essentiel d'établir.

Au commencement de la série des quantités a, a', a'', etc., il peut se faire qu'il y en ait de positives et de négatives; mais au delà d'un certain terme, elles devront toutes avoir le même signe; et c'est là un second point qu'il importe d'établir. Pour y parvenir, au lieu de calculer successivement chacune des expressions x', x'', etc., au moyen de la précédente, je vais montrer comment on peut les déduire toutes de la première.

Imaginons, pour un moment, que x, x', x'', soient trois expressions consécutives quelconques, qui se rencontrent dans la série de nos calculs, et dont les parties entières soient m, m', m''. Dans cette supposition, ces nombres seront trois dénominateurs consécutifs, pris d'une manière quelconque dans la fraction continue égale à l'expression [2]. En conséquence, si on désigne par $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$, les réduites correspondantes à m et m', et si on fait attention qu'alors x'' représente le quotient complet $m'' +$ etc.,

la valeur exacte de la fraction continue sera égale à $\frac{P'x''+P}{Q'x''+Q}$: donc on doit avoir

$$\frac{P'x''+P}{Q'x''+Q}=\frac{b+\sqrt{b^2+aa'}}{a'}.$$

Cette équation doit donner, pour x'', la valeur $\frac{b''+\sqrt{b^2+aa'}}{a'''}$: effectuons les calculs. On a successivement

$$a'P'x''+a'P=Q'x''(b+\sqrt{b^2+aa'})+Q(b+\sqrt{b^2+aa'}),$$

$$x''=\frac{a'P-bQ-Q\sqrt{b^2+aa'}}{bQ'-a'P'+Q'\sqrt{b^2+aa'}}$$

$$=\frac{(a'P-bQ-Q\sqrt{b^2+aa'})(bQ'-a'P'-Q'\sqrt{b^2+aa'})}{(bQ'-a'P')^2-Q'^2(b^2+aa')}$$

$$=\frac{b(PQ'+QP')+aQQ'-a'PP'+(P'Q-Q'P)\sqrt{b^2+aa'}}{a'P'^2-2bP'Q'-aQ'^2}.$$

Par la théorie des fractions continues, on sait que $P'Q-Q'P=\pm 1$, selon que la réduite $\frac{P'}{Q'}$ est de rang pair ou impair. Si l'on avait -1, il faudrait changer les signes au numérateur et au dénominateur de x'', afin de ramener la partie irrationnelle à être $+\sqrt{b^2+aa'}$. Pour fixer les idées, je supposerai qu'on ait $+1$. Alors, la valeur trouvée ci-dessus, pour x'', devant être la même que $\frac{b''+\sqrt{b^2+aa'}}{a'''}$, on doit avoir

$$a'''=a'P'^2-2bP'Q'-aQ'^2.$$

On pourrait de nouveau vérifier ici que $b''^2+a''a'''=b^2+aa'$, mais cette vérification est superflue.

Si l'on avait calculé de la même manière, au moyen des réduites, la valeur de x', le multiplicateur de $\sqrt{b^2+aa'}$ eût été de signe contraire à celui qui se trouve dans x'' : pour cette raison, on aurait changé les signes du numérateur et du dénominateur, et alors on aurait eu

$$a''=-a'P^2+2bP'Q'+aQ'^2.$$

Rappelons que les deux réduites $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ comprennent entre elles la vraie valeur de x, que plus elles sont avancées, plus leur différence est petite, et que même cette différence peut devenir aussi petite qu'on voudra (**325**). Cela posé, les deux racines de

l'équation [1] étant inégales (sans quoi elles ne seraient pas incommensurables), il est permis de supposer que les réduites $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ aient été choisies de telle sorte qu'elles ne comprennent point entre elles la seconde racine de l'équation [1].

Nommons x_1 la racine dont il s'est agi jusqu'à présent, et x_2 l'autre racine. Par ce qui a été dit en traitant de l'équation du 2e degré (**185**), le 1er membre de l'équation [1] peut se décomposer comme il suit :

$$a'(x - x_1)(x - x_2).$$

L'une des réduites est $> x_1$, et l'autre est $< x_1$; mais elles sont toutes deux plus grandes que x_2, ou toutes deux moindres. Donc, si on les substitue successivement à la place de x, dans le produit ci-dessus, on devra trouver deux résultats de signes contraires ; donc il en devra encore être ainsi en les substituant dans le 1er membre de l'équation : c'est-à-dire que les deux quantités

$$\frac{a'P^2}{Q^2} - \frac{2bP}{Q} - a, \quad \frac{a'P'^2}{Q'^2} - \frac{2bP'}{Q'} - a,$$

doivent être de signes contraires. Changeons les signes de la première, et ensuite multiplions les deux quantités respectivement par Q^2 et Q'^2, on pourra dire encore que

$$-a'P^2 + 2bPQ + aQ^2 \quad \text{et} \quad a'P'^2 - 2bP'Q' - aQ'^2$$

sont deux quantités de même signe. Ces deux quantités ne sont autres que a'' et a''' ; donc a'' et a''' sont de même signe. La même conclusion s'applique aux quantités analogues qui viennent après a''' ; car, dans nos suppositions, toutes les réduites qui viennent après $\frac{P}{Q}$ sont telles que deux quelconques d'entre elles, placées consécutivement, comprennent toujours x_1 et ne comprennent point x_2. Donc, dans la suite des quantités $a, a', a'', \ldots,$ on est assuré d'en trouver une à partir de laquelle elles seront toutes de même signe.

Ce second point étant établi, faisons $b^2 + aa' = R$, et rappelons que dans la série des valeurs de x', x'', etc., on a toujours

$$b'^2 + a'a'' = R, \quad b''^2 + a''a''' = R, \text{ etc.}$$

Or, les quantités a, a', a'', etc., à partir d'un certain rang, devant toutes avoir le même signe, il s'ensuit que les produits $a'a''$, $a''a'''$, etc., doivent alors être constamment positifs ; donc aussi, au delà d'un certain rang, en vertu des égalités précédentes, les

nombres b', b'', etc., a', a'', etc., abstraction faite de leurs signes, devront rester compris entre certaines limites.

De là il suit qu'en mettant, dans les expressions de x, x', x'', etc., en dehors du radical $\sqrt{R}$, au numérateur et au dénominateur, des quantités comprises entre ces limites, on ne pourra avoir qu'un nombre limité de valeurs. Donc, parmi les valeurs de x, x', x'', etc., il doit s'en trouver qui se répètent. Si, par exemple, on suppose qu'au delà de x'' on retrouve une valeur égale à x'', on sera certain de retrouver encore, les mêmes et dans le même ordre, les valeurs qui ont succédé à x''. Donc aussi les termes de la fraction continue qui ont été déduits de x'' et des valeurs suivantes devront se reproduire. Il est évident d'ailleurs que ces termes doivent se reproduire périodiquement jusqu'à l'infini; donc enfin la fraction continue égale à la racine [2] doit être périodique. C'est ce qu'il fallait démontrer.

CHAPITRE XIII.

THÉORIE DES LOGARITHMES. — QUESTIONS SUR LES INTÉRÊTS COMPOSÉS.

Définition des logarithmes. — Leurs propriétés. — Utilité des tables.

338. Soient deux progressions, l'une géométrique, commençant par 1, et l'autre arithmétique, commençant par 0 : telles que celles-ci, par exemple,

$$\div\!\div\; 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : \text{etc.}$$
$$\div\; 0 . 3 . 6 . 9 . 12 . 15 . 18 . 21 . \text{etc.}$$

Si on les compare entre elles, on aperçoit facilement qu'en multipliant l'un par l'autre deux termes quelconques de la première, et en ajoutant ensemble les termes correspondants de la seconde, on trouve encore deux termes correspondants de ces mêmes progressions. Ainsi, $4 \times 16 = 64$, $6 + 12 = 18$; et l'on voit qu'en effet 18 répond à 64. De cette manière, une multiplication se trouve effectuée au moyen d'une addition.

Cette remarque si simple est ancienne, sans doute; mais c'est le génie de NEPER, baron d'Écosse, qui en a fait sortir la théorie des logarithmes, une des plus utiles découvertes modernes. Elle

fut publiée en 1644, sous le titre de *Mirifici Logarithmorum canonis Descriptio*. Je vais l'exposer ici avec tous les développements convenables, en me tenant le plus près possible des idées de l'inventeur, sans toutefois employer la considération du mouvement dont il faisait usage.

Le savant écossais commence par observer que les nombres, dans tous les nuances de grandeur, peuvent être regardés comme les termes d'une progression géométrique; et c'est là un point qu'il importe de bien comprendre. Considérons la progression

$$\div\!\!\div\, 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \text{etc.}$$

Si on suppose que α soit une très-petite quantité, les termes croîtront par degrés très-rapprochés; et comme on peut diminuer α indéfiniment, on doit regarder, à la limite, les termes comme variant d'une manière continue. A la vérité, on ne peut point écrire une progression dans laquelle cette continuité existe; mais l'esprit la conçoit, et cela suffit : en conséquence, on pourra considérer tous les nombres plus grands que 1 comme compris dans la progression géométrique. Je laisse de côté ceux qui sont moindres, pour y revenir tout à l'heure.

En même temps, NEPER prend une progression arithmétique

$$\div\, 0 \,.\, \beta \,.\, 2\beta \,.\, 3\beta \text{ etc.}$$

dont les termes croissent, à partir de 0, par différences aussi faibles qu'on voudra; et alors, envisageant les termes de cette suite dans leur liaison avec ceux de la première, il les désigne sous le nom de *logarithmes*.

Ainsi, *les logarithmes des nombres sont les termes d'une progression arithmétique commençant par zéro, qui correspondent à ces nombres considérés comme faisant partie d'une progression géométrique commençant par l'unité.*

339. Cette définition semble ne point attribuer de logarithmes aux nombres <1; et si au lieu de prendre la progression géométrique croissante, on la supposait décroissante, ce serait les nombres >1 qui n'auraient point de logarithmes. Pour fixer les idées, je raisonnerai toujours dans la première hypothèse; et alors, pour que la progression géométrique embrasse aussi les nombres <1, il suffit de la prolonger au-dessous de l'unité, ce qui revient à diviser l'unité par les puissances successives de la raison $1+\alpha$.

Mais quels seront les logarithmes de ces nombres, et comment continuer la progression arithmétique au-dessous de zéro? On peut bien former les termes de cette progression dans un ordre rétrograde, en retranchant la raison de chacun d'eux; mais quand on est arrivé à zéro, la soustraction n'est plus possible, et il semble que la progression doive s'arrêter à ce terme. Cette difficulté disparaît sur-le-champ par l'emploi des quantités négatives, qui s'introduiraient ici naturellement si elles n'étaient déjà connues : c'est-à-dire qu'on mettra le signe — devant les multiples de la raison qui devraient être retranchés de zéro, si cela était possible. On engendre ainsi des *termes négatifs*, au moyen desquels on fait descendre la progression arithmétique au-dessous de zéro, et qui sont les logarithmes des nombres moindres que l'unité.

En conséquence, si on écrit à la gauche des deux suites leurs termes descendants, ces suites pourront se présenter ainsi

$$[1] \quad \div\!\div \dots \frac{1}{(1+\alpha)^3} : \frac{1}{(1+\alpha)^2} : \frac{1}{1+\alpha} : 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 \dots,$$

$$[2] \quad \div \dots \; -3\beta \;.\; -2\beta \;.\; -\beta \;.\; 0 \;.\; \beta \;.\; 2\beta \;.\; 3\beta \; \dots;$$

et alors la seconde donne les logarithmes de tous les termes de la première. Il ne faut pas oublier qu'il entre dans la définition des logarithmes, comme condition essentielle, que les termes 1 et 0 doivent toujours se correspondre, ce qui revient à dire que $\log 1 = 0$.

Dans les deux suites, la partie ascendante augmente jusqu'à l'infini; mais, dans la première, la partie descendante tend indéfiniment vers zéro, tandis que, dans la seconde, elle croît jusqu'à l'infini négatif. Donc $\log \infty = \infty$, et $\log 0 = -\infty$.

Ces deux suites mettent encore en évidence cette remarque que si un nombre quelconque n est placé à une certaine distance de l'unité dans la partie ascendante de la première, le nombre $\frac{1}{n}$ doit occuper le même rang dans la partie descendante. Donc ce dernier nombre a le même logarithme, mais pris négativement; donc $\log \frac{1}{n} = -\log n$.

340. Passons aux propriétés des logarithmes. La propriété fondamentale est celle qui a été remarquée n° 338, et que je vais dé-

montrer généralement. Elle s'énonce ainsi : *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

1° Supposons que a et b soient deux nombres appartenant à la partie ascendante de la progression [1]. Par exemple, prenons $a=(1+\alpha)^2$, $b=(1+\alpha)^5$: on aura

$$ab=(1+\alpha)^{5+2}.$$

Dans la progression [2], les logarithmes de a et b sont 2β et 5β ; donc $\log a+\log b=(5+2)\beta$. Or $(5+2)\beta$ est le logarithme de $(1+\alpha)^{5+2}$; donc

$$\log ab=\log a+\log b.$$

2° Supposons que a soit dans la partie descendante, et b dans la partie ascendante, mais plus loin de l'unité que a. Soient $a=\frac{1}{(1+\alpha)^2}$, $b=(1+\alpha)^5$: on aura

$$ab=(1+\alpha)^{5-2}.$$

Mais $\log a=-2\beta$, $\log b=5\beta$; donc $\log a+\log b=(5-2)\beta$: et comme $(5-2)\beta$ est évidemment le logarithme de $(1+\alpha)^{5-2}$, on conclut encore $\log ab=\log a+\log b$.

3° Supposons a dans la partie descendante, et b dans la partie ascendante, mais plus près de 1 : $a=\frac{1}{(1+\alpha)^5}$, $b=(1+\alpha)^2$. Alors

$$ab=\frac{1}{(1+\alpha)^{5-2}}.$$

Or $\log a=-5\beta$, $\log b=2\beta$; donc $\log a+\log b=-(5-2)\beta$, ce qui est le logarithme de $\frac{1}{(1+\alpha)^{5-2}}$; donc $\log ab=\log a+\log b$.

4° Enfin, prenons les deux nombres a et b dans la partie descendante, et soient $a=\frac{1}{(1+\alpha)^2}$, $b=\frac{1}{(1+\alpha)^5}$: on aura

$$ab=\frac{1}{(1+\alpha)^{5+2}}.$$

Ici $\log a=-2\beta$, $\log b=-5\beta$; par suite on a $\log a+\log b=-(2+5)\beta$, ce qui est le logarithme du produit ci-dessus; donc encore $\log ab=\log a+\log b$.

Cette égalité étant vraie dans tous les cas, changeons-y b en bc; elle devient

$$\log abc=\log a+\log bc=\log a+\log b+\log c.$$

On peut continuer ainsi, quel que soit le nombre des facteurs; donc *le logarithme d'un produit*, etc.

341. Posons $\frac{a}{b}=q$, on aura $bq=a$; donc $\log b+\log q=\log a$, d'où $\log q=\log a-\log b$. Donc *le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende, mois celui du diviseur.*.

342. Si un produit est composé de n facteurs égaux à a, on doit avoir $\log a^n=\log a+\log a+\ldots=n\log a$.

Pour étendre cette formule aux exposants fractionnaires, on posera $x=a^{\frac{m}{n}}$, d'où $x^n=a^m$. Par suite $\log x^n=\log a^m$: donc, en vertu de la formule ci-dessus, $n\log x=m\log a$, et de là on tire $\log x=\frac{m}{n}\log a$.

Si a est affecté d'un exposant négatif $-n$, on remarquera que $a^{-n}\times a^n=1$; donc $\log a^{-n}+\log a^n=\log 1$. Or $\log 1=0$; donc $\log a^{-n}=-\log a^n=-n\log a$.

Donc *le logarithme d'une puissance quelconque d'un nombre est égal au produit du logarithme de ce nombre par l'exposant de la puissance.*

343. Soit $r=\sqrt[n]{a}$, on a $r^n=a$; donc, par la règle précédente $n\log r=\log a$. De là on tire $\log r=\log\sqrt[n]{a}=\frac{\log a}{n}$. Donc *le logarithme de la racine d'un nombre s'obtient en divisant le logarithme du nombre par l'indice de la racine.*

344. Ces propriétés montrent clairement que si l'on avait des tables où l'on pût trouver tous les nombres, et à côté leurs logarithmes, il serait facile de ramener la multiplication à l'addition, la division à la soustraction, la formation des puissances à la multiplication, et l'extraction des racines à la division. Par exemple, qu'on ait à calculer $\sqrt[7]{837}$: on prendrait dans les tables le log. de 837, on le diviserait par 7, et on aurait ainsi le log de $\sqrt[7]{837}$; donc, en cherchant dans les tables le nombre correspondant, on aurait la racine demandée.

Table des logarithmes. — Des différents systèmes considérés d'après leurs MODULES. — Système Népérien.

345. On comprend bien que les tables ne peuvent pas renfermer les logarithmes correspondant à toutes les nuances de grandeur que peuvent avoir les nombres : car ces nuances sont infinies, même entre deux limites très-rapprochées. Elles ne peuvent pas non plus contenir les logarithmes de tous les nombres entiers :

car la suite de ces nombres est illimitée. Mais on y mettra ceux des nombres entiers depuis 1 jusqu'à une certaine limite, jusqu'à 100 000, par exemple; et comme toutes les opérations numériques se ramènent à des calculs de nombres entiers, ces tables seront encore d'une immense utilité. Je vais exposer leur construction, en suivant toujours les idées de NEPER.

Pour que la progression géométrique embrasse les nombres plus grands que 1, dans tous les états de grandeur, il faut la concevoir comme formée de termes qui croissent d'une manière insensible à partir de 1; et, pour avoir leurs logarithmes, il faut aussi concevoir la progression arithmétique comme composée de termes qui varient par degrés insensibles, à partir de zéro. Cette dernière condition est nécessaire, sans quoi des nombres finis auraient des logarithmes infinis.

A leur origine, les accroissements simultanés que peuvent recevoir les termes 1 et 0 sont d'une petitesse inappréciable; mais, quelque petits qu'ils soient, on conçoit qu'on peut établir entre eux un certain rapport, lequel est entièrement arbitraire. Ainsi, lorsque ces accroissements commencent à naître, on pourra supposer que celui du logarithme 0 est double, triple, etc., de celui du nombre 1. Ce rapport est appelé, d'une manière générale, le *Module* des logarithmes, et je le désignerai par M.

Cela posé, donnons au terme 1 de la progression géométrique, un accroissement très-petit ω, mais cependant appréciable en nombres. L'accroissement correspondant du terme zéro de la progression arithmétique sera à fort peu près égal à $M\omega$; et l'on pourra prendre pour les deux progressions, celles-ci :

$$[1] \quad \div\!\div\ 1 : 1+\omega : (1+\omega)^2 : (1+\omega)^3 : (1+\omega)^4 : \text{etc.}$$

$$[2] \quad \div\ 0\ .\ M\omega\ .\ 2M\omega\ .\ 3M\omega\ .\ 4M\omega\ .\ \text{etc.}$$

Nous avons dit que le rapport ou module M peut être pris à volonté : par conséquent, selon les valeurs particulières qu'on lui attribuera, on aura différents *systèmes* de logarithmes.

Les logarithmes que NEPER a publiés étaient tirés des progressions

$$[3] \quad \div\!\div\ 1 : 1+\omega : (1+\omega)^2 : (1+\omega)^3 : \text{etc.}$$

$$[4] \quad 0\ .\ \omega\ .\ 2\omega\ .\ 3\omega\ .\ \text{etc.}$$

Cela revient à supposer $M = 1$, et cette hypothèse se présentait d'elle-même comme moyen d'éviter les multiplications par M.

Les termes de ces deux suites varient très-peu rapidement; de sorte qu'en les prolongeant l'une et l'autre aussi loin qu'on voudra, on est sûr de trouver, dans la première, des termes égaux aux nombres entiers 2, 3, etc., ou si approchants que la différence sera négligeable. Les termes correspondants de la seconde pourront donc être pris pour les logarithmes de ces nombres, et ce sont eux qu'on devrait écrire dans les tables.

Par là, on voit que ces logarithmes ne sont pas exactement ceux des nombres à côté desquels ils seraient inscrits. Mais il existe d'ailleurs une autre cause d'inexactitude, laquelle résulte de ce que ω ne représente qu'approximativement l'accroissement que doit prendre le logarithme 0, lorsque ω est celui du nombre 1. Toutefois, cette supposition approchera d'autant plus de la vérité que ω sera une quantité plus petite.

Les logarithmes dont je viens de parler, qui répondent au module $M = 1$, se nomment *Népériens;* on les appelle aussi *hyperboliques*, pour une raison qui ne peut point se placer ici. La comparaison des deux suites [2] et [4] démontre sur-le-champ que, *pour transporter les logarithmes népériens dans un système quelconque, il suffira de les multiplier par le module de ce système.*

346. Je placerai ici deux valeurs assez souvent employées. L'une est le logarithme népérien de 10; et l'autre, qu'on représente ordinairement par e, est le nombre dont le logarithme népérien est 1. Ces valeurs sont :

$$\text{Log. nép. de } 10 = 2{,}302\,585\,092\ldots,$$
$$e = 2{,}718\,281\,828\ldots.$$

D'après ce qui a été dit plus haut sur les suites [3] et [4], il n'y a aucune difficulté à concevoir comment on a pu les calculer.

347. On a fréquemment à multiplier et à diviser par 10, 100, 1000, etc.; par conséquent, en construisant des tables dans lesquelles 10 aurait 1 pour logarithme, ces opérations se réduiraient à une addition ou à une soustraction de quelques unités entières. Cette remarque n'avait point échappé à NEPER; mais la mort l'empêcha de construire ces nouvelles tables, et ce fut BRIGGS, professeur d'Oxford, à qui il en avait recommandé instamment l'exécution, qui publia les premières en 1624, sous le titre de *Arithmetica logarithmica*. Ces logarithmes sont ceux dont on fait usage dans les calculs numériques : on les appelle indifféremment *logarithmes de Briggs* ou *logarithmes vulgaires*.

D'après la remarque du nº 345, on voit que les logarithmes népériens une fois calculés, on les fera passer dans le nouveau système, en les multipliant tous par un module convenable M. Ce module est facile à trouver; car, puisque dans ce système le logarithme de 10 est 1, on doit avoir $M \times$ log. nép. de $10 = 1$; donc, en divisant 1 par log. nép. de 10, rapporté plus haut, on connaîtra le module M; savoir :

$$M = 0,434\ 294\ 481\ldots$$

Des différents systèmes de logarithmes, considérés d'après leurs bases. — Système de Briggs.

348. Si l'on suppose toujours qu'on s'élève ou qu'on s'abaisse à partir de 1, en suivant une progression dont les termes varient géométriquement d'une manière continue, on peut lui adjoindre une infinité de progressions dont les termes croissent, à partir de zéro, arithmétiquement et aussi d'une manière continue. C'est pour cette raison qu'il peut exister une infinité de systèmes de logarithmes, mais toute indétermination disparaît dès qu'on fixe le nombre auquel correspond un certain logarithme, qu'on peut d'ailleurs choisir arbitrairement. Par exemple, on peut donner le nombre auquel on attribue l'unité pour logarithme, et c'est ce nombre qu'on nomme la *base* du système.

Sous ce point de vue, le système qui se présente tout d'abord, comme le plus simple, est celui dont la base est 10, et je vais m'en occuper spécialement.

Dans ce système, les logarithmes de 10, 100, 1000, etc., sont 1, 2, 3, etc., et en général $\log 10^k = k$; de sorte que ces logarithmes, qui doivent revenir si souvent dans les calculs, sont toujours connus sans aucune peine.

De 1 à 10, les nombres ont leurs logarithmes compris entre 0 et 1; de 10 à 100, entre 1 et 2; de 100 à 1000, entre 2 et 3; etc. Or, la partie entière d'un logarithme se nomme *caractéristique* : on peut donc conclure que, dans le système dont la base est 10, *la caractéristique du logarithme d'un nombre a autant d'unités, moins une, qu'il y a de chiffres dans le nombre.*

349. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise un nombre par 10, 100, 1000, etc., son logarithme doit augmenter ou diminuer du logarithme de 10, 100, 1000, etc., c'est-à-dire, de 1, 2, 3, etc. Donc, tant que le nombre restera plus grand que 1, la partie décimale

du logarithme sera toujours la même, et il n'y aura que la caractéristique qui changera.

Ainsi, en prenant pour point de départ le nombre 658, on aurait

$$\log 658 = 2{,}818\,225\,9,$$
$$\log 65{,}8 = 1{,}818\,225\,9,$$
$$\log 6{,}58 = 0{,}818\,225\,9.$$

Si on continue la division par 10, il vient

$$\log 0{,}658 = 0{,}818\,225\,9 - 1 = -0{,}181\,7741,$$
$$\log 0{,}0658 = 0{,}818\,225\,9 - 2 = -1{,}181\,7741,$$
etc.

Mais on a trouvé plus commode de ne point effectuer les soustractions, et de donner à la partie décimale une caractéristique négative qu'on écrit ainsi : $\bar{1}$, $\bar{2}$,.... Par exemple, $\bar{2}$, 818 225 9 ne sera qu'une abréviation de $-2 + 0{,}\,818\,225\,9$.

En admettant ainsi des logarithmes dont la caractéristique seule est négative, il sera permis de dire qu'un nombre décimal étant donné, on peut y changer à volonté la place de la virgule, sans que la partie décimale de son logarithme soit altérée; et en même temps on voit qu'il sera toujours facile de rétablir la caractéristique à la simple inspection du nombre donné.

350. Expliquons maintenant comment on peut calculer les logarithmes des différents nombres, depuis 1 jusqu'à 100 000, par exemple. Dans le système que nous considérons, 1 et 10 sont deux termes de la progression géométrique auxquels répondent les termes 0 et 1 de la progression arithmétique. Pour avoir des termes qui varient par degrés très-rapprochés, insérons un très-grand nombre de moyens géométriques entre 1 et 10, tout autant de moyens arithmétiques entre 0 et 1, et prolongeons les deux progressions jusqu'à ce que la première atteigne 100 000. Dans cette progression, on trouvera des termes qui différeront si peu des nombres entiers 2, 3, 4, etc., qu'on pourra négliger la différence, et prendre les termes correspondants de la seconde pour les logarithmes de ces nombres.

Soit un nombre n qui tombe entre deux termes de la première, auxquels correspondent l et l' dans la seconde. On peut concevoir par la pensée qu'en augmentant de plus en plus le nombre des moyen insérés, on s'élève dans les deux progressions par toutes les nuances possibles de grandeur. Il est clair qu'alors, dans la

seconde, le terme correspondant à n serait entre l et l', et par conséquent, en prenant $\log n = l$, l'erreur sera $< l' - l$. Par exemple, en admettant que les termes de la progression arithmétique croissent de millionième en millionième, elle fournirait les logarithmes avec six décimales exactes.

Pour réaliser cette supposition il faut que 10 ait 1 000 000 termes avant lui dans la progression géométrique; par conséquent, pour avoir la raison de cette progression, il faudrait extraire la racine 1 000 000ᵉ de 10. Comme on a $1\,000\,000 = 2^6 \times 5^6$, cette opération peut se faire par des racines carrées et des racines cinquièmes; mais ces dernières exigeant des calculs laborieux, NEPER a pris soin d'indiquer lui-même la manière de trouver les logarithmes des nombres en n'employant que des racines carrées.

Nommons n le nombre dont on veut le logarithme, et que je suppose compris entre 1 et 10. On calculera le moyen géométrique entre 1 et 10, ce qui se fait par une simple racine carrée, et aussi le moyen arithmétique entre 0 et 1. Désignons le premier par A et le second par a. Supposons que n tombe entre 1 et A : on cherchera le moyen géométrique B entre 1 et A, et le moyen arithmétique b entre 0 et a. Supposons que n tombe entre A et B; on cherchera encore le moyen géométrique entre A et B, et aussi le moyen arithmétique entre a et b. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait resserré n entre deux moyens géométriques auxquels correspondent deux moyens arithmétiques dont les six premières décimales soient les mêmes : alors en rejetant les décimales ultérieures, on sera sûr que l'un de ces moyens est le logarithme de n avec l'approximation demandée. Pour atteindre la plus grande approximation possible avec six décimales, on aura soin de calculer la 7ᵉ décimale; et, dans le cas où elle serait 5 ou > 5, on ajoutera 1 à la 6ᵉ.

351. Les nombres premiers sont les seuls dont on ait besoin de calculer les logarithmes par cette voie : car, d'après ce qui a été démontré (**340**), les logarithmes des autres nombres s'obtiendront en ajoutant entre eux les logarithmes des facteurs premiers dont ces nombres sont composés.

Ces additions pourront élever l'erreur à plus d'un demi-millionième, mais il est facile de fixer un *maximum* qu'elle ne dépassera jamais. Observons que dans notre hypothèse les tables doivent s'arrêter à 100 000, que le plus petit nombre premier est 2,

et que $2^{17} = 131072$. Donc un nombre $< 100\,000$ ne renferme pas plus de 17 facteurs; par conséquent, l'erreur de chaque logarithme étant moindre qu'un demi-millionième, la somme des erreurs, même quand elles seraient toutes dans le même sens, sera moindre que 17 demi-millionièmes.

Toutefois on conçoit qu'elle peut approcher assez près de cette limite; et, pour obvier à cet inconvénient, on calculera les logarithmes des nombres premiers avec 8 décimales. Alors, en les ajoutant pour avoir ceux des nombres composés, l'erreur ne surpassera point 2 unités du 7e ordre, et par conséquent elle ne sera point d'une unité sur la 6e décimale (*).

352. Quand on détermine les systèmes de logarithmes par leurs bases, le passage d'un système à un autre est toujours facile. En désignant par α une quantité aussi petite qu'on voudra, tous les nombres se tireront de la progression géométrique.

$$\because 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \text{etc.}$$

Supposons que, β et γ étant aussi des quantités de tel degré de petitesse qu'on voudra, les logarithmes des deux systèmes que l'on compare soient pris dans les deux progressions arithmétiques

$$\div\, 0 \,.\, \beta \,.\, 2\beta \,.\, 3\beta \,.\, \text{etc.}$$
$$\div\, 0 \,.\, \gamma \,.\, 2\gamma \,.\, 3\gamma \,.\, \text{etc.}$$

On voit sur-le-champ que les logarithmes d'un même nombre, dans le second système et dans le premier, ont entre eux un rapport constant : de sorte qu'en appelant x' et x ces deux logarithmes, et K ce rapport constant, on aura $x' = Kx$.

Quant au rapport K, il suffit, pour l'obtenir, que les logarithmes d'un seul nombre soient connus dans les deux systèmes. Or, dans le premier, le logarithme de la seconde base est censé connu; et, dans le second, il est égal à 1 : donc, en appelant a et a' les deux bases, et désignant par $\log a'$ le logarithme de a' dans le premier système, on aura $1 = K \log a'$ d'où $K = \frac{1}{\log a'}$.

(*) On ne peut point affirmer qu'elle sera moindre qu'un demi-millionième. Par exemple, supposons qu'après l'addition les huit décimales soient 0 472 321 49. La partie négligée pouvant s'élever presqu'à 2 unités du 7e ordre, l'erreur commise, en prenant les six premiers chiffres 0,472 321, atteindrait presque 7 unités du 7e ordre; mais, comme on l'ignore, on n'est point autorisé à augmenter d'une unité le 6e chiffre.

Des logarithmes considérés comme exposants.

353. Reprenons, n° **339**, les deux progressions

$$\div\!\div \dots \frac{1}{(1+\alpha)^3} : \frac{1}{(1+\alpha)^2} : \frac{1}{1+\alpha} : 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 \dots,$$

$$\div \dots -3\beta \,.\, -2\beta \,.\, -\beta \,.\, 0 \,.\, \beta \,.\, 2\beta \,.\, 3\beta \dots,$$

dans lesquelles α et β sont des quantités aussi petites qu'on voudra, de telle sorte qu'on puisse regarder leurs termes comme variant d'une manière continue. La seconde suite renfermera un multiple de β égal à 1 : soit $\mu\beta$ ce multiple, et soit a le terme correspondant de la première suite ; on devra avoir à la fois

$$\mu\beta = 1, \quad (1+\alpha)^\mu = a.$$

De là on tire

$$\beta = \frac{1}{\mu}, \qquad 1+\alpha = a^{\frac{1}{\mu}} = a^\beta.$$

Par conséquent, en faisant usage des exposants négatifs, les deux progressions peuvent s'écrire ainsi

$$\div\!\div \dots a^{-3\beta} : a^{-2\beta} : a^{-\beta} : 1 : a^\beta : a^{2\beta} : a^{3\beta} \dots,$$

$$\div \dots -3\beta \,.\, -2\beta \,.\, -\beta : 0 \,.\, \beta \,.\, 2\beta \,.\, 3\beta \dots;$$

et alors on voit que si on appelle x un terme quelconque de la seconde, et y le terme correspondant de la première, on doit toujours avoir la relation $y = a^x$.

Donc on peut encore définir *les logarithmes des nombres comme les exposants des puissances auxquelles il faut élever une quantité constante qu'on appelle* BASE, *pour en déduire tous ces nombres.*

Quand on adopte cette définition, on sous-entend toujours que la base doit être une quantité réelle et positive. Il est d'ailleurs facile de prouver qu'on peut lui donner telle grandeur qu'on voudra, autre que l'unité.

354. Cela revient à montrer que si, dans l'équation *exponentielle*

$$[1] \qquad y = a^x,$$

on donne à l'exposant x toutes les valeurs possibles, tant négatives que positives, les valeurs correspondantes de y comprendront toutes les nuances de grandeur entre zéro et l'infini.

En premier lieu, soit $a>1$. Si l'on donne à x des valeurs positives croissantes à partir de zéro, telles que $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots$ il vient

$$y=a^0,\quad a^{\frac{1}{10}},\quad a^{\frac{2}{10}},\quad a^{\frac{3}{10}},\quad \text{etc.},$$

ou en faisant $\sqrt[10]{a}=a'$

$$y=1,\quad a',\quad a'^2,\quad a'^3,\quad \text{etc.},$$

a' est ici une quantité plus grande que 1, et par conséquent cette suite est croissante jusqu'à l'infini. De plus, il est clair qu'en faisant augmenter x par différences plus petites que $\frac{1}{10}$, on peut rapprocher autant qu'on voudra les valeurs de y.

Posons $x=-z$, on aura $y=a^{-z}=\frac{1}{a^z}$. Or, d'après ce qui vient d'être dit, si on fait passer z par toutes les valeurs positives à partir de zéro, a^z croîtra d'une manière continue depuis 1 jusqu'à l'infini; donc le quotient de 1 par a^z décroîtra depuis 1 jusqu'à zéro. De là on conclut que les valeurs négatives de x, entre zéro et l'infini, font prendre à y toutes les grandeurs descendantes depuis 1 jusqu'à zéro.

En second lieu, soit $a<1$, et faisons $a=\frac{1}{a'}$ on aura

$$y=\frac{1}{a'^x}.$$

Ici a' est >1 : donc, selon qu'on fera croître x positivement ou négativement, a'^x augmentera à partir de 1 jusqu'à l'infini ou diminuera à partir de 1 jusqu'à zéro ; et par suite y devra décroître depuis 1 jusqu'à zéro, ou croître depuis 1 jusqu'à l'infini.

Concluons donc que tout nombre, autre que l'unité, peut être pris pour base d'un système de logarithmes.

La discussion précédente fait voir en outre : 1° que, dans tous les systèmes, le logarithme de 1 est égal à zéro, et celui de la base est égal à 1 ; 2° que, dans les systèmes dont la base est >1, on a $\log\infty=\infty$, et $\log 0=-\infty$; 3° que, dans ceux dont la base est <1, on doit, au contraire, avoir $\log\infty=-\infty$ et $\log 0=\infty$.

355. Par la nouvelle définition (353), les propriétés des logarithmes se tirent immédiatement de celles des exposants. En effet, soient $y, y', y'', \ldots$ des nombres dont les logarithmes sont $x, x', x'', \ldots$: par cette définition on doit avoir

$$y=a^x,\quad y'=a^{x'},\quad y''=a^{x''},\ldots$$

donc, par les règles relatives aux exposants, il viendra

$$yy'y''\ldots = a^x a^{x'} a^{x''}\ldots = a^{x+x'+x''}\ldots,$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'},$$

$$y^n = (a^x)^n = a^{nx},$$

$$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}.$$

Mais, d'après la définition, les exposants de a, dans les derniers membres, sont les logarithmes des quantités qui sont dans les premiers; on retrouve donc ainsi les propriétés connues.

356. Les logarithmes étant toujours considérés comme des exposants, proposons-nous de calculer le logarithme d'un nombre donné b. Ce problème, sur lequel repose la construction des tables, revient à résoudre l'équation

$$a^x = b.$$

L'inconnue est en exposant, et les méthodes expliquées jusqu'ici ne sont point applicables à ce cas. Voici celle qu'il faut suivre.

Supposons les nombres a et b tous deux >1. En donnant à x successivement les valeurs 0, 1, 2, etc., on arrivera à deux puissances a^n et a^{n+1}, entre lesquelles b sera compris, et alors on saura que x est entre n et $n+1$. En conséquence on posera $x = n + \frac{1}{x'}$: par suite, l'équation $a^x = b$ devient

$$a^{n+\frac{1}{x'}} = b, \quad \text{d'où} \quad a^{\frac{1}{x'}} = \frac{b}{a^n}.$$

Faisons, pour abréger, $\frac{b}{a^n} = c$, et élevons la dernière égalité à la puissance x', elle devient

$$c^{x'} = a.$$

Ici c est >1 et $<a$; car b est $>a^n$ et $<a^{n+1}$. Donc, en formant les puissances c^1, c^2, c^3,... on reconnaîtra que a est compris entre deux puissances consécutives $c^{n'}$ et $c^{n'+1}$, et par suite que x' est entre n' et $n'+1$. On posera donc $x' = n' + \frac{1}{x''}$; il viendra

$$c^{n'+\frac{1}{x''}} = a, \quad \text{d'où} \quad c^{\frac{1}{x''}} = \frac{a}{c^{n'}};$$

puis, en élevant à la puissance x'' et faisant $\frac{a}{c^{n'}} = d$,

$$d^{x''} = c.$$

En opérant semblablement sur cette équation, on trouvera entre quels nombres entiers, n'' et $n''+1$, doit être x''. On fera encore $x''=n''+\frac{1}{x'''}$; et on continuera le même procédé aussi loin qu'il sera convenable.

Rapprochons présentement les relations trouvées ci-dessus,

$$x=n+\frac{1}{x'},\quad x'=n'+\frac{1}{x''},\quad x''=n''+\frac{1}{x'''},\quad \text{etc.};$$

et on pourra exprimer x par cette fraction continue

$$x=n+\cfrac{1}{n'+\cfrac{1}{n''+\text{etc.}}}$$

Par la théorie de cette sorte de fractions, on sait que plus on prendra de termes, plus on approchera de la valeur de x, et que même on pourra rendre l'erreur aussi petite qu'on voudra.

357. Lorsqu'on prend 10 pour base, on a évidemment $10^1=10$, $10^2=100$, etc.; donc les logarithmes des nombres 1, 10, 100, etc., sont 0, 1, 2, etc., et en général $\log 10^k=k$. Ici viennent naturellement se reproduire les remarques déjà faites sur la caractéristique, nos **348** et **349**, et auxquelles je renvoie.

Pour avoir les logarithmes des autres nombres, on devra résoudre successivement les équations $10^x=2$, $10^x=3$, $10^x=4$, etc., ce qui ne peut plus offrir de difficulté. Il ne faut pas oublier qu'il suffit de chercher les logarithmes des nombres premiers; car de simples additions feront connaître ceux des nombres composés.

358. Dans les tables, les logarithmes sont toujours exprimés en décimales, et par conséquent il importe peu de savoir s'il existe d'autres nombres que les puissances de 10, qui aient des logarithmes commensurables; cependant, pour satisfaire le lecteur, je traiterai ici cette question.

Pour plus de généralité, je chercherai d'abord *à quelles conditions on peut reconnaître que* x *est commensurable dans l'équation* $a^x=b$, a *et* b *étant des nombres entiers positifs.*

Soit donc $x=\frac{m}{n}$, m et n étant des nombres entiers. Il vient

$$a^{\frac{m}{n}}=b,\quad \text{d'où}\quad a^m=b^n.$$

Dans a^m, il ne peut pas y avoir d'autres facteurs premiers que

dans a, ni dans b^n d'autres facteurs premiers que dans b; donc la dernière égalité exige que les facteurs premiers de b soient les mêmes que ceux de a. Supposons $a = \alpha^p\beta^q\gamma^r$ et $b = \alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'}$: on aura

$$(\alpha^p\beta^q\gamma^r)^m = (\alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'})^n \quad \text{ou} \quad \alpha^{mp}\beta^{mq}\gamma^{mr} = \alpha^{np'}\beta^{nq'}\gamma^{nr'}.$$

Mais, pour que cette égalité subsiste, il faut que chaque facteur premier entre le même nombre de fois dans les deux membres ; donc $mp = np'$, $mq = nq'$, $mr = nr'$. De là on tire

$$\frac{m}{n} = \frac{p'}{p}, \quad \frac{m}{n} = \frac{q'}{q}, \quad \frac{m}{n} = \frac{r'}{r};$$

par conséquent on a ces conditions

$$\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r}.$$

Réciproquement, admettons qu'on ait $a = \alpha^q\beta^q\gamma^r$, $b = \alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'}$, $\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r}$. Si on prend $x = \frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r}$, on aura $px = p'$, $qx = q'$, $rx = r'$, et par suite

$$a^x = \alpha^{px}\beta^{qx}\gamma^{rx} = \alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'} = b.$$

Donc, *pour que* x *soit commensurable, il faut et il suffit que* a *et* b *soient composés des mêmes facteurs premiers, et que les rapports des exposants de* b *aux exposants de* a *soient égaux* (*).

Lorsque $a = 10 = 2 \times 5$, on devra avoir $b = 2^{p'} \times 5^{q'}$ et $p' = q'$; donc $b = 2^{p'} \times 5^{p'} = 10^{p'}$, c'est-à-dire qu'*il n'y a que les puissances de* 10 *qui aient des logarithmes commensurables.*

359. Quand on définit les logarithmes par les exposants, et qu'on les a calculés pour une base particulière, il n'y a aucune difficulté à les transporter dans un autre système. En effet, si a' est la nouvelle base, et que, pour cette base, x' représente le logarithme d'un nombre quelconque y, on doit avoir

$$a'^{x'} = y.$$

Or, en prenant les logarithmes des deux membres dans le premier système, et observant (355) que $\log a'^{x'} = x' \log a'$, il viendra

$$x' \log a' = \log y, \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{\log y}{\log a'}.$$

(*) Les cas où, a et b étant des fractions ou des radicaux, on voudrait encore que x fût commensurable, se traiteront d'une manière analogue.

Remarque. De là on tire aussi $\frac{x'}{\log y} = \frac{1}{\log a'}$; donc, quel que soit le nombre y, il existe un rapport constant entre ses logarithmes, pris dans les deux systèmes. Quand les logarithmes ont été tirés des progressions, cette conséquence s'est présentée tout d'abord (352), puis on en a déduit la valeur de x'; mais ici c'est le contraire.

360. Soit une progression géométrique quelconque

$$\div\!\div\, h : hq : hq^2 : hq^3 : \text{etc.},$$

les logarithmes des différents termes seront

$$\log h,\quad \log h + \log q,\quad \log h + 2\log q,\quad \text{etc.}$$

Donc *les logarithmes des nombres en progression géométrique sont en progression arithmétique.*

Si l'on suppose $h = 1$, les deux progressions seront

$$\div\!\div\, 1 : q : q^2 : q^3 : \text{etc.},$$
$$\div\, 0 \,.\, \log q \,.\, 2\log q \,.\, 3\log q \,.\, \text{etc.},$$

ce qui ramène à la définition des logarithmes, tels qu'on les a considérés d'abord.

Deux questions principales que les tables de logarithmes servent à résoudre.

361. La première de ces questions est celle-ci : *un nombre quelconque* N *étant donné, trouver son logarithme.*

Les tables de Callet, qui sont les plus répandues en France, contiennent les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 108000. Elles sont dites à sept décimales, parce qu'en effet elles donnent les logarithmes avec sept décimales. Cependant on doit observer que dans quelques parties il y en a huit. Pour réduire ces tables à un format commode, la caractéristique a été partout supprimée, comme étant connue d'avance (357); et en outre une disposition particulière a été adoptée, que je vais expliquer en parcourant les différents cas de la question dont il s'agit ici.

Ier cas. *On suppose le nombre* N *entier et* < 108000.

De 1 à 1200, il ne faut aucune explication. Par exemple, veut-on le log de 652? on cherche ce nombre dans la colonne N; on trouve à côté les huit décimales 81424760, et en rétablissant la caractéristique on a log 652 = 2,81424760.

Au delà de 1200, la disposition est moins simple. Dans la

colonne N, les nombres se suivent sans interruption depuis 1020 jusqu'à 10800, et leurs logarithmes se trouvent encore dans la colonne immédiatement à droite. Je suppose qu'on demande le log. de 3456. Après avoir trouvé le nombre 3456 dans la colonne N, on remarquera que dans la colonne à droite les trois chiffres 538 sont censés se répéter dans l'espace vide qui est au-dessous d'eux; par conséquent on aura, en restituant la caractéristique, log 3456 = 3,5385737.

Jusqu'ici il semblerait que les tables s'arrêtent à 10800. Mais à l'aide des colonnes 1, 2, 3,... 9, elles vont réellement jusqu'à 108000. D'abord, si un nombre est décuple d'un autre, la partie décimale de son logarithme est la même; et de là il suit que la colonne marquée 0 donne aussi de 10 en 10 les logarithmes des nombres jusqu'à 108000. Pour les nombres intermédiaires, il faut se servir des colonnes 1, 2, 3... 9, ainsi qu'il va être dit.

Au delà de 10200, les logarithmes des nombres qui ne diffèrent que par les unités ayant les trois premières décimales communes, on s'est contenté d'écrire ces décimales une seule fois dans la colonne 0, et on n'a placé dans les colonnes suivantes que les quatre dernières décimales. Ainsi, veut-on le log. de 34567? on fera abstraction des unités 7, on cherchera 3456 dans la colonne N, puis on s'avancera horizontalement, à partir de ce nombre jusqu'à la colonne 7, pour y prendre les derniers chiffres 6617 du logarithme demandé; quant aux premiers, ils sont donnés par le nombre isolé 538 qui se trouve dans la colonne 0, le plus proche en montant. En rétablissant la caractéristique, on a log 34567 = 4,5386617.

IIe CAS. *On suppose le nombre* N *entier et* $>$ 108000.

Soit N = 3456789. Je sépare sur la droite assez de chiffres pour que la partie restante à gauche ne surpasse point 108000; et j'ai ainsi le nombre $N' = 34567,89$, qui est 100 fois $< N$, mais dont le logarithme a la même partie décimale que celui de N (349).

Ne considérant que la partie entière de N', je cherche log 34567 comme dans le Ier cas, et je trouve, abstraction faite de la caractéristique, log 34567 = 0,5386617.

Mais N' surpassant 34567 de 0,89, le logarithme de N' doit surpasser le précédent d'une certaine quantité que je vais chercher. Admettons pour un moment que les accroissements des nombres soient proportionnels aux accroissements de leurs logarithmes; on remarquera alors que les tables contiennent, dans la dernière co-

lonne à droite, les différences, toutes calculées, entre les logarithmes des nombres consécutifs; et que, pour les nombres 34567 et 34568, cette *différence tabulaire* est de 126 unités décimales du dernier ordre. C'est donc là ce qu'il faut ajouter au log. de 34567, lorsque ce nombre augmente d'une unité; et par conséquent, lorsqu'il augmente de 0,89, on aura ce qu'il faut ajouter à son logarithme en faisant la proportion

$$1 : 0,89 :: 126 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 126 \times 0,89 = 112,14.$$

On doit négliger la fraction 0,14 qui est moindre que l'unité décimale du 7e ordre, et l'on a simplement $x = 112$. On peut aussi s'épargner la multiplication $126 \times 0,89$. En effet, dans les tables on voit au-dessous de 126 une petite colonne de *parties proportionnelles,* qui renferme les produits de cette différence par $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, etc., et qui donne immédiatement $126 \times 0,8 = 101$, $126 \times 0,09 = 11,3$; donc $126 \times 0,89 = 101 + 11 = 112$.

De quelque manière que ce produit soit trouvé, en l'ajoutant au log. de 34567, et en rétablissant la caractéristique, on aura le logarithme cherché, savoir : log 3456789 = 6,5386729.

Les calculs que je viens d'expliquer sont réunis dans le type suivant :

N = 3456789		
log 34567	....	0,5386617
pour 0,8	....	101
pour 0,09	....	11
log 3456789	....	6,5386729.

Remarques. La proportion entre les accroissements des nombres et ceux des logarithmes n'est point rigoureusement exacte. Seulement elle fournit une approximation suffisante, quand les nombres sont grands et leurs accroissements peu considérables. C'est pourquoi il est essentiel de ne séparer sur la droite du nombre donné que le moins de chiffres possible.

Si on avait à trouver log 345678987, il faudrait séparer quatre chiffres; et, en calculant la différence correspondante à 0,8987, on aurait $126 \times 0,8 = 101$, $126 \times 0,09 = 11,3$; $126 \times 0,008 = 1,01$, $126 \times 0,0007 = 0,088$. Or, si on ajoute ces produits partiels, on voit que le dernier, celui qui résulte du chiffre 7, n'a aucune influence sur la 7e décimale du logarithme. Cet exemple montre qu'en général, lorsqu'il faudra séparer plus de trois chiffres pour que la

partie restante à gauche ne surpasse point 108000, on pourra compter comme zéro le 4e chiffre et les suivants (*).

IIIe CAS. *On suppose que* N *renferme des parties décimales.*

Soit N = 34,56789. On fait abstraction de la virgule, et on opère comme si N était entier. La partie décimale du logarithme ne sera pas altérée, et en lui donnant la caractéristique convenable, qui est toujours connue d'avance, et qui dans l'exemple est égale à 1, on aura le logarithme cherché, savoir : log 34,56789 = 1,5386729.

Soit encore N = 0,003456789. En opérant sans faire attention à la virgule, et en laissant toujours la caractéristique de côté, on trouverait 0,5386729. Ce serait là précisément le logarithme du nombre donné, si la virgule était placée à la droite du premier chiffre significatif 3. Mais par là le nombre serait multiplié par 1000; donc il faudra retrancher 3 du logarithme ci-dessus, et l'on aura log 0,003456789 = 0,5386729 — 3 = — 2,4613271.

Ce logarithme est entièrement négatif; mais, d'après ce qui a été dit dans le n° **349**, on pourra, en employant la caractéristique négative $\bar{3}$, se dispenser de faire la soustraction, et écrire simplement log 0,003456789 = $\bar{3}$,5386729.

IVe CAS. *Supposons que* N *soit un nombre fractionnaire.*

Si des entiers sont joints à une fraction, on convertit le tout en une expression fractionnaire que l'on considérera comme un quotient; et en conséquence on retranchera le log. du dénominateur du log. du numérateur. On trouve ainsi

$$\log\frac{47}{3} = \begin{cases} 1{,}67209786 \\ -0{,}47712125 \end{cases}$$
$$\overline{1{,}19497661.}$$

Quand il s'agit d'une fraction proprement dite, on retranche encore le log. du dénominateur de celui du numérateur; et alors il vient un logarithme négatif. Par exemple,

$$\log\frac{3}{47} = \begin{cases} 0{,}47712125 \\ -1{,}67209786 \end{cases}$$
$$\overline{-1{,}19497661.}$$

(*) Si on voulait apprécier l'approximation sur laquelle on peut compter en faisant usage des tables logarithmiques, on ne saurait mieux faire que de consulter la note de M. VINCENT, insérée dans l'Algèbre de M. BOURDON.

Mais on peut facilement avoir, si on veut, un logarithme dont la caractéristique soit seule négative. Pour cela, il suffit d'ajouter au premier logarithme assez d'unités pour que la soustraction puisse se faire, et de donner ensuite au reste, pour caractéristique, ce nombre d'unités pris négativement. En effet, si, dans l'exemple ci-dessus, on ajoute 2 au logarithme de 3, on a

$$\log \frac{3}{47} = \begin{cases} -2 + 2{,}47712125 \\ \qquad\; - 1{,}67209786 \end{cases}$$
$$\overline{2}{,}80502339.$$

Pour plus d'uniformité, on peut convenir d'ajouter toujours 10 à la caractéristique du numérateur. Alors il faudra ôter 10 à celle du reste, ce qui ramènera à une caractéristique négative.

362. La seconde question que les tables doivent servir à résoudre est celle-ci : *Un logarithme* L *étant donné, trouver le nombre correspondant.*

Ier CAS. *On suppose que la partie décimale de* L *est positive, et qu'elle se trouve dans les tables.*

Soit L = 5,5386617. Dans la partie des tables qui s'étend au delà de 10800, on cherche à la colonne marquée 0 le logarithme qui approche le plus de la partie décimale de L; puis on avance dans la ligne horizontale jusqu'à la colonne marquée 7, où l'on trouve les quatre dernières décimales 6617 de L. Alors on se transporte dans la colonne N, pour y prendre le nombre 3456, à la suite duquel on placera le chiffre 7 ; et on obtient ainsi le nombre 34567, lequel serait le nombre cherché si la caractéristique donnée était 4. Mais la caractéristique étant 5, il faut multiplier 34567 par 10, et on aura le nombre cherché = 345670.

Soit L = 2,5386617. Après avoir trouvé, comme ci-dessus, le nombre 34567, on remarquera que la caractéristique donnée étant seulement 2, ce nombre doit être divisé par 100, donc le nombre cherché = 345,67.

Soit encore L = $\overline{2}$,5386617. Le signe —, placé au-dessus de 2, indique que cette caractéristique est seule négative. Après avoir trouvé le nombre 34567, comme si la caractéristique était 4, on remarquera que, pour passer à la caractéristique $\overline{2}$, il faudrait retrancher 6 de 4; donc le nombre 34567 doit être divisé par 10^6; donc le nombre cherché = 0,034567.

Il faut avoir bien soin, en ajoutant des zéros ou en plaçant la

virgule, que le chiffre de l'ordre le plus élevé soit toujours tel que la caractéristique donnée lui convienne.

IIe CAS. *On suppose que la partie décimale de* L *est positive, et qu'elle ne se trouve point dans les tables.*

Soit L = 2,4971499. En cherchant, comme plus haut, si la partie décimale se trouve dans les tables, on reconnaît qu'elle est comprise entre 0,4971371 et 0,4971509. Si cette partie était exactement 0,4971371, le nombre correspondant, tel qu'il est donné par les tables, abstraction faite de l'ordre des unités, serait 31415.

Mais elle surpasse 0,4971371 de 128, ce qui doit produire une augmentation dans le nombre 31415. Or, la différence tabulaire la plus voisine est 138, et elle répond à une unité d'augmentation dans le nombre 31415; donc, en admettant toujours qu'il y ait proportion entre les accroissements des nombres et ceux des logarithmes, l'augmentation cherchée se connaîtra en posant

$$138 : 128 :: 1 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{128}{138} = 0,93.$$

Par suite, le nombre cherché, abstraction faite de l'ordre des unités, serait composé des chiffres 3141593. Mais comme la caractéristique donnée est 2, ce nombre ne doit avoir que trois chiffres à sa partie entière; donc enfin le nombre cherché = 314,1593.

Les *parties proportionnelles* de la différence tabulaire peuvent épargner la division de 128 par 138. La partie moindre que 128 et qui en approche le plus est 124, cette partie répond à 0,9, et il y a 4 de reste. Si on met un zéro à droite de 4, on a 40 qui diffère très-peu de la partie 41, et comme le nombre 3 est à côté, on conclut que 40 répondrait à 0,3; donc 4 répond à 0,03. En conséquence, le nombre cherché se compose des chiffres 3141593; donc, en tenant compte de la caractéristique 2, ce nombre = 314,1593.

On pourra disposer les calculs comme on le voit ci-dessous :

L	= 2,4971499	
Pour	0,4971371.......	31415
1er reste	128.......	09
2e reste	4.......	003
Nombre cherché..........		314,1593.

Quand la caractéristique est négative, cela ne change rien aux calculs. On n'y fait d'abord aucune attention, mais on y a égard à la fin pour déterminer le rang des plus hautes unités.

IIIe cas. *On suppose que le logarithme donné* L *est entièrement négatif.*

Soit L $=-1{,}8753145$. Prenons ce logarithme positivement, et cherchons le nombre correspondant N. En divisant l'unité par N, on aura le nombre cherché : car le logarithme de 1 étant 0, il est clair que le logarithme de ce quotient sera égal à — log N ou L.

Mais il vaut mieux éviter la division de 1 par N, en ramenant le logarithme donné à un autre dont la caractéristique soit seule négative : or, c'est ce qu'on fera en ajoutant 2 à L, et en prenant ensuite $\bar{2}$ pour caractéristique. En effet, on a

$$L=-2+(2-1{,}8753145)=\bar{2}{,}1246855.$$

Alors on opère comme dans le second cas, et on trouve le nombre cherché $=0{,}01332556$.

Compléments arithmétiques. — Exemple de calculs effectués par logarithmes. — Résolution des équations exponentielles.

363. Souvent dans les calculs on doit ajouter les logarithmes, et de leur somme retrancher d'autres logarithmes. Je vais expliquer comment on peut réduire toutes ces opérations à une seule addition, au moyen des *compléments arithmétiques.*

Soient p, q, r, s, plusieurs logarithmes, lesquels sont presque toujours moindres que 10, et supposons qu'on ait à effectuer les calculs indiqués dans l'expression

$$z=p+q-r-s.$$

D'abord on peut écrire $z=p+q+(10-r)+(10-s)-10-10$; puis, en faisant $10-r=r'$ et $10-s=s'$, on aura

$$z=p+q+r'+s'-10-10.$$

Ainsi, z se calculera en ajoutant p, q, r', s', et en ôtant 2 dizaines de la somme. Or, cette soustraction ne coûte aucune peine; et quant à celles qui sont nécessaires pour évaluer r' et s', elles sont toujours très-faciles; car, pour r', par exemple, il n'y a qu'à *retrancher de* 10 *le premier chiffre significatif de* r, *sur la droite, et de* 9 *tous les autres chiffres à gauche.* Le reste est ce qu'on nomme le *complément arithmétique.*

On peut donc poser en règle qu'*au lieu de soustraire des logarithmes, on peut ajouter leurs compléments arithmétiques*, *pourvu*

qu'on ait soin d'ôter à la somme autant de dizaines qu'on aura pris de ces compléments.

364. Soit proposé d'évaluer à 0,01 près l'expression

$$x = \frac{7340 \times 3549}{681,8 \times 593,1}.$$

Par les propriétés des logarithmes, on a

$$\log x = \log 7340 + \log 3549 - \log 681,8 - \log 593,1.$$

Si on opère sans compléments, on a les calculs suivants :

$$\begin{array}{rlrl} \log 7340 = & 3,8656961 & \log 681,8 = & 2,8336570 \\ \log 3549 = & 3,5501060 & \log 593,1 = & 2,7731279 \\ \hline \text{somme} = & 7,4158021. & \text{somme} = & 5,6067849 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 1^{\text{re}} \text{ somme} = & 7,4158021 \\ 2^{\text{e}} \text{ somme} = & 5,6067849 \\ \hline \text{diff. ou } \log x = & 1,8090172. \end{array}$$

Mais il est plus simple d'employer les compléments, comme on le voit ci-après :

$$\begin{array}{rl} \log 7340 = & 3,8656961 \\ \log 3549 = & 3,5501060 \\ \text{comp. } \log 681,8 = & 7,1663430 \\ \text{comp. } \log 593,1 = & 7,2268721 \\ \hline \text{Som.—20 ou } \log x = & 1,8090172 \\ \log 100x = & 3,8090172 \\ 100x = & 6442 \\ x = & 64,42. \end{array}$$

On a retranché 20 à cause des deux compléments ; et ensuite, comme on voulait connaître x à 0,01 près, on a ajouté 2 à la caractéristique de $\log x$. Alors on a eu le log. de $100x$, et par conséquent il a suffi de chercher le nombre entier le plus approchant auquel ce dernier logarithme correspond. On a trouvé ainsi, avec un léger excès, $x = 64,42$.

365. Soit proposé d'évaluer à 0,00001 près le quotient

$$x = \frac{\left(\sqrt[5]{146298}\right)^4}{\left(\sqrt[6]{988789}\right)^5}.$$

En prenant, d'après les règles, le log. du numérateur et celui du dénominateur, puis retranchant l'un de l'autre, il vient

$$\log x = \tfrac{4}{5} \log 146298 - \tfrac{5}{6} \log 988789.$$

Voici le tableau des calculs :

$\frac{4}{5}\log 146298$			$\frac{5}{6}\log 988789$		
log	14629	0,1652146	log	98878	0,9950997
pour	0,8	238	pour	0,9	40
log	146298	5,1652384	log	988789	5,9951037
produit par 4		20,6609536	produit par 5		29,9755185
quotient par 5		4,1321907	quotient par 6		4,9959197

$$\frac{4}{5}\log 146298 = 4,1321907$$

$$\text{comp. } \frac{5}{6}\log 988789 = 5,0040803$$

$$\text{som.} - 10 \text{ ou } \log x = \bar{1},1362710$$

$$\log 100000x = 4,1362710$$

$$100000x = 13686$$

$$x = 0,13686.$$

366. Soit proposé de résoudre l'équation exponentielle

$$\left(\frac{117}{337}\right)^x = \frac{8493}{73}.$$

En prenant les logarithmes, il viendra

$$x(\log 117 - \log 337) = \log 8493 - \log 73,$$

d'où

$$x = -\frac{\log 8493 - \log 73}{\log 337 - \log 117}.$$

$\log 8493 = 3,9290611$	$\log 337 = 2,5276299$
$\log 73 = 1,8633229$	$\log 117 = 2,0681859$
différence $= 2,0657382$	différence $= 0,4594440$

$$x = -\frac{20657382}{4594440}.$$

Je désignerai par x' la valeur de x, abstraction faite du signe —, et je vais chercher x' par le moyen des logarithmes.

log 20657	...	0,3150672	log	45944	0,6622288
pour	0,3 ...	63	pour	0,40	38
pour	0,08 ...	168	log	4594440 =	6,6622326
pour	0,002 ...	42			
log 20657382 =		7,3150752			
log 4594440 =		6,6622326			
diff. ou log x =		0,6528426			

Arrivé à ce point, je dois chercher le nombre correspondant au logarithme trouvé, comme il a été expliqué n° **362** (IIe CAS).

$\log x' = 0{,}6528426$			
pour	0,6528360	...	44961
1er reste	66	...	06
2e reste	80	...	008
3e reste	20	...	0002
	$x' =$		4,4961682
	$x =$		$-$ 4,49616.

Je n'ai mis qu'un seul chiffre à la partie entière, parce que la caractéristique de $\log x'$ était zéro. Dans les calculs de cette espèce, quand on revient des logarithmes aux nombres, on ne peut guère compter sur l'exactitude du 7e chiffre. C'est pourquoi j'ai pris simplement $x = -4{,}49616$.

367. Les logarithmes sont d'un grand secours dans les questions relatives aux progressions géométriques. Par exemple, prenons dans le tableau n° **318**, la formule

$$S = \frac{\sqrt[n-1]{l^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

On commencera par l'écrire ainsi

$$S = a \times \frac{\sqrt[n-1]{\left(\frac{l}{a}\right)^n} - 1}{\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} - 1},$$

puis on calculera les deux racines par logarithmes. En nommant x et y ces deux racines, on aura

$$S = \frac{a(x-1)}{y-1},$$

expression qu'on pourra aussi calculer par logarithmes, si on le juge convenable.

Mais surtout c'est lorsque le nombre des termes de la progression géométrique est inconnu, que les logarithmes paraissent indispensables. Alors l'équation à résoudre est celle-ci :

$$aq^{n-1} = l,$$

dans laquelle l'inconnue n est en exposant. On prendra donc les

log. des deux membres, ce qui donne $\log a + (n-1)\log q = \log l$; et de là on tire la valeur de n, telle qu'elle se trouve au n° **318**,

$$n = 1 + \frac{\log l - \log a}{\log q}.$$

Questions sur les intérêts composés.

368. L'homme industrieux qui conçoit un projet dont l'exécution serait profitable à sa fortune, manque souvent des *capitaux* nécessaires pour le réaliser, tandis qu'au contraire celui qui les possède ignore les moyens d'en tirer d'utiles résultats. Que celui-ci *prête* des capitaux au premier, et alors la difficulté disparaît. Toutefois, comme il renonce à s'en servir lui-même pendant un temps déterminé, il exigera non-seulement qu'ils lui soient remboursés au bout de ce temps, mais encore qu'un certain *profit* ou *intérêt* lui soit accordé, en proportion de ces mêmes capitaux et du temps pendant lequel il en aura cédé l'usage. Telle est en peu de mots l'origine et la nature du *prêt à intérêt*. Pour régler toutes les stipulations de ce genre, on convient ordinairement de l'intérêt qu'une somme fixe de 100 francs doit rapporter en un an, et c'est là ce qui s'appelle le *taux* de l'intérêt.

L'intérêt peut être *simple* ou *composé*. Il est simple quand on le reçoit à la fin de chaque année : il est composé lorsqu'on le laisse chaque année entre les mains de l'emprunteur pour augmenter le capital qui doit porter intérêt pendant l'année suivante. Les questions d'intérêt simple sont sans difficulté, et je ne m'occuperai ici que des questions d'intérêt composé.

369. *Une somme quelconque étant placée à intérêt composé, que doit devenir cette somme, par l'accumulation des intérêts, au bout d'un certain nombre d'années?*

Nommons a la somme placée, r l'intérêt que rapporte 1 fr. par an, et n le nombre des années.

Il est clair que la somme a doit rapporter $r \times a$ ou ar pendant un an; et si on réunit cet intérêt au capital a, on aura $a + ar$ ou $a(1+r)$. Donc, pour obtenir ce que devient un capital pendant un an, il faut multiplier ce capital par $1+r$.

Au bout de la 1re année le capital étant $a(1+r)$, il sera donc $a(1+r)^2$ au bout de 2 ans; $a(1+r)^3$ au bout de 3 ans; et en

général $a(1+r)^n$ au bout de n années. Ainsi, en nommant A cette valeur, on a

[1] $$A = a(1+r)^n.$$

Supposons, par exemple, qu'on demande la valeur de 1 fr. au bout de 10 ans, l'intérêt étant de 5 pour 100. On fera $a = 1$, $n = 10$, $r = 0{,}05$, et par suite il viendra

$$A = (1{,}05)^{10}.$$

En employant les logarithmes, on trouve log A = 10 log, 1,05 = 0,2118930, ce qui donne à peu près A = 1,6289.

Veut-on savoir en combien d'années un capital est doublé par l'accumulation des intérêts à 5 p. 100? on fera $A = 2a$, $1+r = 1{,}05$, et la formule [1] deviendra, en divisant par a, $(1{,}05)^n = 2$. Ici c'est l'exposant n qui est inconnu, et en se servant des logarithmes on trouvera

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}30103000}{0{,}02118930} = 14{,}2.$$

Ainsi, telle est la puissance de l'intérêt composé, qu'un capital placé à 5 pour 100 est doublé dans l'intervalle de 14 à 15 ans.

La formule [1], considérée d'une manière générale, exprime une relation au moyen de laquelle on peut trouver une quelconque des quatre quantités a, r, n, A, quand les trois autres sont données.

370. *Quelle valeur produira-t-on au bout d'un certain nombre d'années, si on ajoute chaque année au capital primitif un capital égal, et si on accumule avec toutes ces sommes leurs intérêts composés?*

Soient a le capital placé chaque année, n le nombre des années, et r l'intérêt de 1 fr. La première somme a s'ajoutera avec ses intérêts composés pendant n années, ce qui produira $a(1+r)^n$; la deuxième somme a à ses intérêts pendant $n-1$ années, ce qui produira $a(1+r)^{n-1}$; ainsi de suite jusqu'à la dernière somme a qui, n'étant placée que pendant un an, produira seulement $a(1+r)$. La valeur demandée n'est autre chose que la réunion de toutes ces valeurs, ainsi accumulées avec leurs intérêts; de sorte qu'en désignant le total par S, on aura

$$S = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} \ldots + a(1+r),$$

ou, sous une autre forme,

$$S = a(1+r)[1 + (1+r) + (1+r)^2 \ldots + (1+r)^{n-1}].$$

La suite $1+(1+r)+$ etc. est une progression géométrique; donc, par la règle connue (308), il viendra

$$[2] \qquad S=\frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}.$$

Cette relation servira à déterminer une quelconque des quantités a, r, n, S, au moyen des trois autres.

Soient $a=1$, $r=0{,}05$, $n=10$: alors $S=\dfrac{1{,}05\times[(1{,}05)^{10}-1]}{0{,}05}$ $=21[(1{,}05)^{10}-1]=13{,}2069$. Ainsi, 1 fr. placé chaque année à 5 pour 100 produit, au bout de 10 ans, une valeur de plus de 13 fr. Cet exemple prouve combien s'accroît la puissance des intérêts composés, quand on y joint celle d'une économie soutenue.

371. *Un emprunt est fait sous la condition d'être remboursé au moyen d'un certain nombre d'*ANNUITÉS, *c'est-à-dire, par sommes égales qu'on payera d'année en année. On demande la quotité de l'annuité, calculée d'après le taux d'un intérêt convenu.*

Cette quotité doit être telle qu'en tenant compte de chaque annuité et de ses intérêts composés jusqu'au moment du dernier payement, on ait précisément la valeur que doit acquérir à cette époque le capital emprunté.

Appelons C ce capital, a la quotité de l'annuité, n le nombre des annuités, et r l'intérêt de 1 fr. par an. Le payement de la 1re annuité devant se faire un an après le jour de l'emprunt, la valeur qu'elle acquerrait, si on reportait le payement à la $n^{ième}$ année, serait $a(1+r)^{n-1}$. A cette époque, la valeur de la 2e annuité serait $a(1+r)^{n-2}$; celle de la 3e serait $a(1+r)^{n-3}$; etc. Donc l'ensemble de toutes ces valeurs, y compris la dernière annuité a, serait

$$a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}a+(1+r)^{n-3}\ldots+a,$$

progression géométrique dont la somme est $\dfrac{a[(1+r)^n-1]}{r}$. Mais à cette même époque, c'est-à-dire, au bout de n années, le capital emprunté C vaudrait $C(1+r)^n$; donc on doit avoir

$$\frac{a[(1+r)^n-1]}{r}=C(1+r)^n.$$

De cette équation l'on tire immédiatement la valeur de a,

$$[3] \qquad a=\frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

Ici encore il faut observer que cette relation peut servir à calculer une quelconque des quatre quantités a, r, C, n, quand les trois autres sont connues.

Par exemple, soit fait $C=1$, $r=0,05$, $n=10$, la formule ci-dessus donne $a=\frac{0,05\times(1,05)^{10}}{(1,05)^{10}-1}=\frac{81445}{628894}=0,1295$. Cette annuité est celle qu'il faut payer pour éteindre en 10 ans une dette de 1 fr. Pour une dette de 10000 fr., l'annuité serait donc de 1295 fr.

372. *Plusieurs sommes sont payables à des échéances différentes, et on veut les fondre en une seule, payable à une époque déterminée. Quel sera le montant de cette somme?*

L'objet principal de cette question est de bien faire remarquer que, pour comparer entre elles des sommes payables à des échéances différentes, il faut toujours les ramener à une même époque, laquelle peut d'ailleurs être choisie comme on voudra. C'est ainsi que dans le problème précédent elles ont toutes été rapportées au terme du dernier payement.

Soient a une dette payable au bout de m années, b une autre dette payable dans n années, et c la somme inconnue, qu'on doit payer au bout de p années pour acquitter ces deux dettes. Prenons arbitrairement un nombre d'années s plus grand que chacun des nombres m, n, p, et rapportons les trois sommes a, b, c, à l'expiration de ce nombre d'années.

Pour arriver à ce terme, la somme a devrait rester placée pendant $s-m$ années, la somme b pendant $s-n$, et la somme c pendant $s-p$. Par là elles acquerraient les valeurs

$$a(1+r)^{s-m},\quad b(1+r)^{s-n},\quad c(1+r)^{s-p};$$

donc, d'après l'énoncé de la question, on doit avoir

$$c(1+r)^{s-p}=a(1+r)^{s-m}+b(1+r)^{s-n}.$$

En divisant par $(1+r)^{s}$, cette équation devient

$$c(1+r)^{-p}=a(1+r)^{-m}+b(1+r)^{-n},$$

et l'on en tire l'inconnue

$$c=a(1+r)^{p-m}+b(1+r)^{p-n}.$$

On aurait pu réduire les trois sommes a, b, c, à l'époque où l'on veut fondre les deux dettes en une seule. Alors on observera que la valeur actuelle de la somme a doit être $\frac{a}{(1+r)^{m}}$, car cette

somme n'est payable qu'après m années; et, semblablement, que la valeur actuelle de b est $\frac{b}{(1+r)^n}$, et que celle de c est $\frac{c}{(1+r)^p}$: donc on doit avoir l'équation

$$\frac{c}{(1+r)^p}=\frac{a}{(1+r)^m}+\frac{b}{(1+r)^n},$$

laquelle revient à celle qu'on a trouvée plus haut avec des exposants négatifs.

CHAPITRE XIV.

THÉORIE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE.

Théorèmes fondamentaux.

373. J'ai tardé jusqu'à présent à exposer la théorie du plus grand commun diviseur des quantités littérales, parce qu'elle ne rencontre guère d'application que dans les parties élevées de l'algèbre. Pendant longtemps elle est restée sujette à des difficultés que j'ai essayé de résoudre en démontrant, sur la décomposition des polynomes en facteurs, deux théorèmes, qui sans doute étaient admis des analystes, mais que les auteurs avaient toujours éludés. Je vais les reproduire ici après avoir rappelé quelques définitions.

On a dit (**14**) que les *quantités rationnelles* sont celles dont l'expression ne renferme point de radical, et que les *quantités entières* sont celles qui réunissent la double condition d'être rationnelles et de ne contenir aucun dénominateur. De plus, j'appellerai *quantité première* toute quantité entière qui n'est divisible que par elle-même et par l'unité : de sorte qu'en la divisant par toute autre quantité entière, le quotient ne sera point entier. Ainsi $a-b^2$ est une quantité première; mais a^2-b^2 n'en est point une, car en divisant a^2-b^2 par $a+b$ on trouve $a-b$ pour quotient.

374. THÉORÈME. *Toute quantité première* P, *qui divise un produit* AB *de deux quantités entières, doit diviser l'une d'elles.*

Lorsque A, B, P sont des nombres, la proposition est connue (**281**). Considérons successivement les quatre cas où ces quantités ne contiennent pas plus d'une lettre.

Ier CAS. *L'une des quantités* A *et* B *est fonction de* x, *l'autre est numérique, et* P *est aussi numérique.*

Soit un polynome

$$A = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + \text{etc.},$$

dans lequel les lettres a, b,... représentent des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs, et α, β,... des exposants entiers positifs. En multipliant A par le nombre B, on a

$$AB = Bax^{\alpha} + Bbx^{\beta} + \text{etc.}$$

Puisque ce produit est supposé divisible par le nombre P, il faut que les coefficients des diverses puissances de x soient divisibles par P. Ainsi, P doit diviser Ba, Bb,...; donc, en vertu du théorème connu (**281**), s'il ne divise point B, il devra diviser tous les nombres a, b,... Or, s'il divise ces nombres, il divise évidemment le polynome A; donc P doit diviser B ou A.

IIe CAS. *Les deux quantités* A *et* B *sont fonctions de* x, *et* P *est encore numérique.*

Admettons pour un moment que le nombre P ne divise ni A ni B. Nommons A' l'ensemble de tous les termes de A dont les coefficients sont des multiples de P, et A'' l'ensemble de tous les autres; on aura $A = A' + A''$. Décomposons B de la même manière, et soit $B = B' + B''$; il viendra

$$AB = (A' + A'')(B' + B'') = A'B' + A'B'' + A''B' + A''B''.$$

Les trois premières parties sont divisibles par P, car dans A' et B' tous les coefficients sont divisibles par P; et, pour que $A''B''$ le fût aussi, il faudrait que les coefficients de tous les termes de ce produit le fussent eux-mêmes.

Soient ax^{α} et bx^{β} les termes de A'' et de B'' où la lettre x a le plus haut exposant; le terme $abx^{\alpha+\beta}$ fera partie du produit $A''B''$ et ne se réduira avec aucun autre. Or, ni a ni b n'est divisible par P, puisque P est un nombre premier qui ne divise aucun des coefficients de A'' et de B''; donc ab n'est point divisible par P, et par conséquent $A''B''$ ne l'est pas. Ainsi, les trois premières parties du produit AB seraient divisibles par P, et la quatrième ne le serait point; donc AB ne pourrait pas l'être, ce qui serait contraire aux conditions de l'énoncé. Il est donc impossible d'admettre que ni A ni B ne soit divisible par P.

IIIe CAS. *L'une des quantités* A *et* B *est numérique, l'autre est fonction de* x, *et* P *est aussi fonction de* x.

Soient A le facteur fonction de x, et Q le quotient entier de AB par P : on aura $AB = PQ$, ou, en représentant par F, F', F'',... les facteurs premiers du nombre B,

$$AFF'F''.... = PQ.$$

Le premier membre étant divisible par F, PQ doit l'être aussi : or F est un nombre premier; donc, en vertu des cas précédents, P ou Q sera divisible par F. Mais P est une quantité première qui contient x; donc elle n'est divisible par aucun nombre; donc Q est divisible par F; donc, en désignant par Q' le quotient de Q par F, et en divisant par F les deux membres de l'égalité, on aura

$$AF'F''.... = PQ'.$$

On prouvera de la même manière que Q' doit être divisible par F'; et en nommant Q'' le quotient, on aurait

$$AF''..... = PQ''.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce que le premier membre ne renferme plus que A, on arrivera à une égalité telle que

$$A = PQ_1,$$

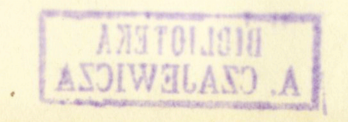
dans laquelle Q_1 serait encore une quantité entière, et de là on conclut sur-le-champ que A est divisible par P.

IVe CAS. A, B *et* P *sont trois fonctions de* x.

Supposons la quantité A non divisible par P, et d'un degré plus élevé que P. Ordonnons A et P de manière que les exposants de x aillent en décroissant, et poussons la division de A par P jusqu'à ce qu'on trouve un reste de degré moindre que P.

Avant d'amener la division à ce point, on peut trouver des restes dont le 1er terme ait un coefficient qui ne soit pas divisible par celui du 1er terme du diviseur. Alors, poursuivons l'opération en prenant des coefficients fractionnaires, et concevons qu'à la fin tous les termes du quotient et du reste soient réduits au même dénominateur : on pourra représenter ce quotient et ce reste sous la forme $\frac{Q}{M}$ et $\frac{A'}{M}$, en désignant par Q et A' deux quantités entières, et par M le dénominateur commun. Or, on doit toujours avoir

$$A = P\frac{Q}{M} + \frac{A'}{M}; \text{ donc } MA = PQ + A'.$$



On voit par là qu'en multipliant le dividende par M avant de faire la division, le calcul se ferait sans fractions. Et remarquez bien que A' ne peut pas être zéro, autrement le produit MA serait divisible par le polynome premier P, et dès lors P devrait diviser A (3e cas), ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, multiplions les deux membres de la dernière égalité par B et divisons-les ensuite par P, il vient

$$M\frac{AB}{P} = BQ + \frac{A'B}{P};$$

donc, puisque AB est divisible par P, le produit A'B l'est aussi.

Supposons que A' soit algébrique, et divisons P par A'. Soit M' le nombre par lequel il faut multiplier P pour arriver, sans fractions à un reste de degré moindre que A'. En nommant Q' le quotient, et A'' le reste, on aura

$$M'P = A'Q' + A'';$$

et A'' ne pourra pas non plus être zéro : car, pour que cela fût, il faudrait que M'P fût divisible par chaque facteur algébrique premier de A'. Donc, en vertu du 3e cas, P devrait l'être aussi, et dès lors P ne serait plus une quantité première.

Si on multiplie par B et si on divise par P les deux membres de cette égalité, elle devient

$$M'B = \frac{A'B}{P}Q' + \frac{A''B}{P};$$

donc la divisibilité de A'B par P entraîne celle de A''B.

Divisons encore P par A''. Soit M'' le nouveau nombre par lequel on multiplie P pour éviter les coefficients fractionnaires, soient Q'' le quotient et A''' le reste, il viendra

$$M''P = A''Q'' + A''',$$

d'où l'on tire, comme plus haut,

$$M''B = \frac{A''B}{P}Q'' + \frac{A'''B}{P};$$

donc A'''B est aussi divisible par P.

En continuant ainsi, on obtient des restes successifs A', A'', A''',... dont le degré va en décroissant, et comme aucun reste algébrique ne pourra diviser exactement P, on est sûr d'arriver à un reste numérique A_1. Or, les raisonnements précédents prouvent



que tous les produits $A'B$, $A''B$, $A'''B$, etc., sont divisibles par P; donc A_1B doit l'être; donc, par le 3e cas, il est divisible par P.

Les quatre cas qu'on vient d'examiner sont les seuls qui soient à considérer lorsque les quantités A, B, P ne sont pas numériques à la fois, et qu'elles ne contiennent pas plus d'une lettre. Passons aux cas où il y a deux lettres x et y dans l'une de ces quantités, ou dans deux d'entre elles, ou dans toutes les trois. Ces cas sont aussi au nombre de quatre, savoir :

1° *Lorsqu'un seul des facteurs* A *et* B *contient la lettre* x *et que* P *ne la contient point.*

2° *Lorsque les deux facteurs* A *et* B *contiennent la lettre* x *et que* P *ne la contient point.*

3° *Lorsqu'un seul des facteurs* A *et* B *contient la lettre* x *et que* P *la contient aussi.*

4° *Enfin, lorsque les deux facteurs* A *et* B *contiennent la lettre* x *et que* P *la contient aussi.*

Les démonstrations sont semblables à celles qui viennent d'être exposées; la seule différence consiste en ce que les quantités qui, précédemment, étaient supposées numériques, peuvent être ici des fonctions de y.

De même que les cas où A, B, P, ne renferment pas plus d'une seule lettre, servent à démontrer la proposition pour les cas où ces quantités peuvent contenir deux lettres; de même ceux-ci serviront à s'élever aux cas où ces quantités pourraient en contenir trois; et ainsi de suite, quel que soit le nombre de lettres. Le théorème général doit donc être regardé comme démontré.

375. THÉORÈME. *Il n'existe qu'un seul système de facteurs premiers dont le produit soit égal à une quantité donnée :* ou, ce qui est la même chose, *deux produits de facteurs premiers ne peuvent être égaux que lorsqu'ils sont composés de facteurs égaux chacun à chacun.*

Cette proposition, toute semblable à celle qu'on connaît sur les nombres (285), se démontre aussi de la même manière. Soient ABCD.... et *abcd*.... les deux produits égaux. Puisque tous les facteurs sont premiers, si a n'est point égal à quelqu'un des facteurs A, B, C,... il ne pourra diviser aucun d'eux. Or, a ne divisant ni A ni B, ne divisera point AB : car, d'après le théorème précédent, si a divisait AB, il devrait diviser A ou B. Par la même raison, a ne divisant ni AB ni C ne divisera pas ABC; et ainsi

de suite. Donc a ne pourrait point diviser le produit ABCD,.... ce qui serait absurde, puisque ABCD.... $= abcd$.... Il faut donc que a soit égal à l'un des facteurs A, B, C, D, etc. Supposons $a = \text{A}$, et divisons les deux produits par a. Les produits restants BCD... et bcd... seront encore égaux, et l'on pourra leur appliquer le même raisonnement. On conclura donc que b est égal à l'un des facteurs du produit BCD..., à B, par exemple. On fera voir semblablement que c est égal à l'un des facteurs restants, et ainsi de suite. Donc les deux produits ABCD..... et $abcd$.... sont composés des mêmes facteurs premiers.

Si plusieurs facteurs du premier produit sont égaux entre eux, le second produit doit les renfermer précisément en pareil nombre.

Définition du plus grand commun diviseur. — Principes sur lesquels repose sa détermination. — Cas les plus simples.

376. En algèbre, le plus grand commun diviseur n'est point, comme en arithmétique, un diviseur qui soit réellement plus grand qu'un autre. Une nouvelle définition est nécessaire, et j'adopterai celle-ci : *Le plus grand commun diviseur de plusieurs quantités entières est le produit de tous leurs facteurs premiers communs, soit numériques, soit monomes, soit polynomes.*

On n'a besoin d'aucune méthode nouvelle pour déterminer ce produit lorsque les quantités dont il s'agit sont des monomes. Par exemple, soient les quantités

$$432a^4b^2x, \quad 270a^2b^3x^2, \quad 90a^3bx^3.$$

Je cherche, par les méthodes de l'arithmétique, le plus grand diviseur commun des coefficients 432, 270, 90, et j'obtiens le nombre 18. A la suite de ce nombre, je place chacune des lettres communes aux trois monomes, et je lui donne le plus petit exposant dont elle est affectée dans ces monomes. Je trouve ainsi $18a^2bx$ pour le plus grand commun diviseur.

377. Mais lorsque les quantités proposées sont des polynomes, leur plus grand diviseur commun ne s'obtient plus avec la même facilité : sa détermination repose alors sur deux principes.

Premier principe. Le plus grand diviseur commun à deux quantités entières n'est point altéré si l'on multiplie ou si l'on divise l'une d'elles par telle quantité entière qu'on voudra, pourvu que celle-ci n'ait aucun facteur commun avec l'autre.

En effet, les facteurs premiers, communs aux deux quan-

tités proposées, sont toujours les mêmes; et c'est le produit de ces facteurs qui est le plus grand commun diviseur des deux quantités.

Deuxième principe. Si l'on a deux polynomes A et B, si l'on divise A par B, en ayant soin de ne prendre que des termes entiers au quotient Q, et si l'on désigne par R le reste de la division, je dis que le plus grand commun diviseur de A et de B est le même que celui de B et de R.

On doit avoir, comme dans toute division,

$$A = BQ + R, \quad \text{d'où} \quad A - BQ = R.$$

Soit D le plus grand diviseur commun de A et de B : il devra diviser $A - BQ$; donc il divisera aussi R. Représentons par A', B', R', les quotients de A, B, R, par D, et divisons par D les deux membres de la première égalité, il viendra

$$A' = B'Q + R'.$$

B' et R' n'ont plus de facteur commun : car, s'ils en avaient un, il devrait diviser $B'Q + R'$, et par conséquent aussi A'. Donc A' et B' auraient encore un facteur commun; et D, qui est le plus grand diviseur commun de A et de B, ne renfermerait pas tous les facteurs communs à ces quantités, ce qui est contre la définition.

Puisque B' et R', qui sont les quotients de B et de R par D, ne peuvent plus avoir de facteur commun, il s'ensuit que le plus grand commun diviseur de B et de R est égal à D; donc il est le même que celui des quantités A et B.

378. Maintenant, passons à la recherche du plus grand commun diviseur des polynomes. Par exemple, soient les quantités

$$X = 48a^2b^3x^6 - 120a^3b^3x^5 + 12a^4b^3x^4 - 12a^6b^3x^2,$$
$$Y = 48a^3bx^7 - 88a^4bx^6 - 64a^5bx^5 - 8a^6bx^4.$$

Je cherche d'abord le plus grand commun diviseur des termes de X, ainsi que celui des termes de Y : je trouve $12a^2b^3x^2$ pour le premier, et $8a^3bx^4$ pour le second. Le plus grand commun diviseur de ces deux monomes est $4a^2bx^2$, et ce diviseur commun est le produit de tous les facteurs monomes communs à X et à Y.

Alors, je divise X par $12a^2b^3x^2$, Y par $8a^3bx^4$, et j'ai pour quotients les polynomes

$$A = 4x^4 - 10ax^3 + a^2x^2 - a^4,$$
$$B = 6x^3 - 11ax^2 - 8a^2x - a^3,$$

dans lesquels il n'y a plus que les facteurs polynomes des quantités X et Y. Par conséquent, si l'on connaissait le plus grand commun diviseur de A et B, il suffirait de le multiplier par $4a^2bx^2$, pour obtenir le plus grand commun diviseur de X et Y. Ainsi, la question est simplifiée : car elle se réduit à déterminer le plus grand commun diviseur des polynomes A et B, qui n'ont plus de facteurs monomes. C'est donc cette recherche qui doit nous occuper.

Ce diviseur doit être le produit des facteurs premiers communs à A et à B ; donc si la quantité B divise exactement A, elle sera elle-même ce diviseur ; c'est pourquoi nous essayerons cette division. Or, une difficulté se présente dès le commencement, c'est que $4x^4$, premier terme du dividende, ne peut point se diviser par $6x^3$, premier terme du diviseur. Pour rendre la division possible, on pourrait multiplier A par 6, et le diviseur cherché ne serait point altéré (**377**) ; car 6 ne contient aucun facteur qui soit commun à B, et en effet ne doit point en contenir, puisque B n'a plus de facteurs monomes. Mais il suffit de multiplier A par 3 ; car alors le premier terme du dividende devient $12x^4$, et il est divisible par $6x^3$. Pour dividende, on prendra donc $A \times 3$ ou

$$12x^4 - 30ax^3 + 3a^2x^2 - 3a^4.$$

Après avoir placé le terme $2x$ au quotient, on trouve le reste $-8ax^3+19a^2x^2+2a^3x-3a^4$, lequel, en vertu du 2e principe (**377**), doit avoir avec B les mêmes facteurs communs que A.

La division est encore arrêtée ; mais on la rend possible en multipliant aussi ce reste par 3. On trouve ainsi $-4a$ au quotient, et pour reste la quantité $13a^2x^2-26a^3x-13a^4$, qui a encore avec B les mêmes facteurs communs que A.

Ce reste contenant x à un degré moindre que le diviseur, c'est le diviseur qu'on va prendre pour dividende, tandis que le reste servira de diviseur. Mais on y supprimera préalablement les facteurs communs à tous ses termes, ce qui le réduit à $x^2-2ax-a^2$, et ce qui n'altère en rien le plus grand commun diviseur.

On a alors à diviser l'une par l'autre les deux quantités

$$B = 6x^3 - 11ax^2 - 8a^2x - a^3, \quad R = x^2 - 2ax - a^2.$$

La division se fait sans introduire aucun facteur dans les dividendes partiels ; et, comme on parvient à un reste nul, on en conclut que $x^2 - 2ax - a^2$ est le commun diviseur cherché.

On donne à l'ensemble des calculs la disposition suivante :

Première division.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & -10ax^3 & +a^2x^2 & & -a^4 & 6x^3-11ax^2-8a^2x-a^3 \\ \cline{6-6}
12x^4 & -30ax^3 & +3a^2x^2 & & -3a^4 & 2x-4a \\
-12x^4 & +22ax^3 & +16a^2x^2 & +2a^3x & & \\ \cline{1-5}
 & -8ax^3 & +19a^2x^2 & +2a^3x & -3a^4 & \\
 & -24ax^3 & +57a^2x^2 & +6a^3x & -9a^4 & \\
 & +24ax^3 & -44a^2x^2 & -32a^3x & -4a^4 & \\ \cline{2-5}
 & & 13a^2x^2 & -26a^3x & -13a^4 & \\
 & & x^2 & -2ax & -a^2. &
\end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -11ax^2 & -8a^2x & -a^3 & x^2-2ax-a^2 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & +12ax^2 & +6a^2x & & 6x+a \\ \cline{1-4}
 & ax^2 & -2a^2x & -a^3 & \\
 & -ax^2 & +2a^2x & +a^3 & \\ \cline{2-4}
 & & 0 & &
\end{array}$$

379. Les raisonnements précédents montrent comment des divisions successives conduisent au plus grand commun diviseur. Deux divisions ont suffi dans l'exemple ci-dessus ; mais si la seconde ne se fût point effectuée exactement, elle aurait mené à un autre reste de degré moindre que le diviseur; et l'on serait passé à une troisième division comme on est passé de la première à la seconde. En continuant ainsi, il est évident que si l'on parvient à un reste nul, le dernier diviseur est le commun diviseur cherché. L'exemple suivant exige trois divisions : les deux quantités sont

$$A = x^4 - ax^3 - a^2x^2 - a^3x - 2a^4, \quad B = 3x^3 - 7ax^2 + 3a^2x - 2a^3.$$

Première division.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -ax^3 & -a^2x^2 & -a^3x & -2a^4 & 3x^3-7ax^2+3a^2x-2a^3 \\ \cline{6-6}
3x^4 & -3ax^3 & -3a^2x^2 & -3a^3x & -6a^4 & x+4a \\
-3x^4 & +7ax^3 & -3a^2x^2 & +2a^3x & & \\ \cline{1-5}
 & 4ax^3 & -6a^2x^2 & -a^3x & -6a^4 & \\
 & 12ax^3 & -18a^2x^2 & -3a^3x & -18a^4 & \\
 & -12ax^3 & +28a^2x^2 & -12a^3x & +8a^4 & \\ \cline{2-5}
 & & 10a^2x^2 & -15a^3x & -10a^4 & \\
 & & 2x^2 & -3ax & -2a^2. &
\end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 - 7ax^2 + 3a^2x - 2a^3 & 2x^2 - 3ax - 2a^2 \\ 6x^3 - 14ax^2 + 6a^2x - 4a^3 & \overline{3x - 5a} \\ -6x^3 + 9ax^2 + 6a^2x & \\ \hline \quad - 5ax^2 + 12a^2x - 4a^3 & \\ \quad - 10ax^2 + 24a^2x - 8a^3 & \\ \quad + 10ax^2 - 15a^2x - 10a^3 & \\ \hline \qquad 9a^2x - 18a^3 & \\ \qquad x - 2a. & \end{array}$$

Troisième division.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 - 3ax - 2a^2 & x - 2a \\ -2x^2 + 4ax & \overline{2x + a} \\ \hline \qquad ax - 2a^2 & \\ \qquad - ax + 2a^2 & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

C'est donc $x - 2a$ qui est le plus grand commun diviseur cherché.

Dans la première division on a multiplié deux fois par 3 ; et dans la seconde, deux fois par 2. On pourrait abréger un peu en multipliant une seule fois par 9, et une seule fois par 4.

Continuation : on étend la théorie précédente à tous les cas.

380. Ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que le succès du calcul est entièrement fondé sur ce que, les quantités étant ordonnées selon les puissances décroissantes d'une lettre, chaque division amène un reste de degré inférieur au diviseur. Lorsque les polynomes contiennent plusieurs termes de même degré, une précaution est à prendre, sans laquelle cette réduction ne s'obtient pas toujours, et qui consiste à réunir tous ces termes sous un seul multiplicateur. Soient les polynomes

$$A = x^3 + yx^2 + x^2 - y^2x + 2yx - y^3 + y^2,$$
$$B = yx^2 + x^2 + y^2x + yx + x + y.$$

Je les écrirai ainsi :

$$A = x^3 + (y + 1)x^2 - (y^2 - 2y)x - y^3 + y^2,$$
$$B = (y + 1)x^2 + (y^2 + y + 1)x + y.$$

La partie x^3 ne se divisant point par $(y + 1)x^2$, à cause du facteur $y + 1$, je rappellerai qu'en général, si une quantité est ordonnée

comme les précédentes, tout diviseur de cette quantité indépendant de x doit diviser séparément le multiplicateur de chaque puissance de x. De là il suit que $y+1$ n'a aucun facteur commun avec B; car, s'il y en avait un, il devrait se trouver dans y^2+y+1 et dans y; or il est évident que y n'a aucun facteur commun avec $y+1$. On pourra donc multiplier A par $y+1$ sans altérer le commun diviseur cherché; et comme il faudrait tout à l'heure multiplier encore par $y+1$, on multipliera tout d'abord A par $(y+1)^2$ ou y^2+2y+1. De cette manière on parvient au reste R,

$$R=(-y^4-y^3+y^2)\,x-y^5-y^4+y^3.$$

Avant de passer à la 2[e] division, il faut supprimer dans R les facteurs communs aux multiplicateurs des puissances de x. Or, les deux parties de R sont évidemment divisibles par $-y^4-y^3+y^2$; et après cette simplification il reste $x+y$. On va donc prendre $x+y$ pour diviseur, et comme la division se fait exactement, il s'ensuit que le commun diviseur cherché est $x+y$.

Première division.

$$\begin{array}{l|l}
x^3+(y+1)x^2-(y^2-2y)x-y^3+y^2 & (y+1)x^2+(y^2+y+1)x+y \\
\left\{\begin{array}{l}(y+1)^2x^3+(y^3+3y^2+3y+1)x^2 \\ -(y^4-3y^2-2y)x-y^5-y^4+y^3+y^2\end{array}\right. & \overline{(y+1)\,x+y} \\
\underline{-(y+1)^2x^3+(-y^3-2y^2-2y-1)\,x^2+(-y^2-y)\,x} & \\
(y^2+y)\,x^2+(-y^4+2y^2+y)\,x-y^5-y^4+y^3+y^2 & \\
\underline{(-y^2-y)\,x^2+(-y^3-y^2-y)\,x-y^2} & \\
(-y^4-y^3+y^2)\,x-y^5-y^4+y^3 & \\
x+y &
\end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{l|l}
(y+1)\,x^2+(y^2+y+1)\,x+y & x+y \\
\underline{-(y+1)\,x^2+(-y^2-y)\,x} & \overline{(y+1)\,x+1} \\
x+y & \\
\underline{-x-y} & \\
0 &
\end{array}$$

381. Cet exemple met à découvert certaines difficultés qu'il faut encore résoudre. Dans la première division il a fallu, avant de multiplier par $y+1$, s'assurer que cette quantité n'avait point de facteur commun avec celles qui multiplient les diverses puissances de x dans le diviseur; et comme le monome y était une de

ces quantités, il a été facile de juger qu'il n'a en effet aucun facteur commun avec $y+1$. Mais en général il n'en est point ainsi, car il aurait pu se faire que toutes les puissances de x eussent été multipliées par des polynomes. Il y a plus : après la première division nous avons supprimé, dans le reste, les facteurs communs aux quantités qui multiplient les diverses puissances de x; et cela suppose qu'on sache trouver le plus grand commun diviseur de ces quantités. Cette détermination a été facile dans l'exemple précédent, mais on comprend qu'il n'en sera pas toujours ainsi. Les explications suivantes font disparaître ces difficultés.

1° Elles n'ont point lieu quand il s'agit de deux polynomes qui ne contiennent que la lettre x : les règles du n° 378 suffisent alors. Ainsi on saura toujours trouver le plus grand commun diviseur de deux polynomes qui ne renferment qu'une seule lettre; par suite je dis qu'on saura aussi trouver celui d'un plus grand nombre de quantités dans lesquelles il n'entre qu'une seule lettre. Supposons, par exemple, qu'on ait trois quantités A, B, C; soit D le plus grand commun diviseur de A et B, et D' celui de D et C. D'après la définition, D est le produit des facteurs communs à A et B, et D' est celui des facteurs communs à D et C, donc D' est le produit des facteurs communs aux trois quantités A, B, C; donc D' est leur plus grand commun diviseur.

2° Considérons des polynomes A et B qui contiennent deux lettres x et y. Prenons d'abord le plus grand commun diviseur des termes de A; soient α ce diviseur et A' le quotient de A par α : on aura $A=\alpha A'$. Ordonnons A' selon les puissances décroissantes de x, en ayant soin de réunir tous les termes qui renferment la même puissance de cette lettre; et supposons, par exemple, qu'on ait

$$A' = Lx^2 + Mx + N.$$

Tous les facteurs de A', indépendants de x, doivent être facteurs des quantités L, M, N, qui multiplient les différentes puissances de x. Ces quantités ne contenant que la seule lettre y, il sera facile d'avoir leur plus grand commun diviseur : nommons α' ce diviseur et A'' le quotient de A' par α', on aura $A' = \alpha' A''$ et par conséquent

$$A = \alpha\alpha' A''.$$

α sera le produit des facteurs monomes de A, α' le produit des facteurs polynomes qui ne contiennent point x, et A'' le produit des facteurs polynomes qui contiennent x.

Faisons la même décomposition sur le polynome B, et soit

$$B = \beta\beta' B''.$$

Alors, je détermine le plus grand commun diviseur des monomes α et β, ainsi que celui des polynomes α' et β' qui ne contiennent que la lettre y ; et si je puis aussi trouver celui des polynomes A'' et B'' qui renferment y et x, j'aurai trois quantités dont le produit sera le plus grand commun diviseur de A et de B. En effet, la première contiendra les facteurs premiers monomes communs à A et à B; la seconde, les facteurs polynomes indépendants de x; et la troisième, les facteurs polynomes dépendants de x.

Or, je dis qu'on peut trouver le plus grand diviseur commun des quantités A'' et B'' en les soumettant aux calculs des divisions successives, comme dans l'exemple du n° **380**. Il est clair, en effet, que ces quantités n'ayant plus ni facteurs monomes, ni facteurs polynomes indépendants de x, il sera permis de multiplier les dividendes partiels de la première division par le polynome qui est placé devant la plus haute puissance de x dans le diviseur, et qu'on arrivera ainsi à un reste de degré moindre en x que le diviseur. Il sera facile d'ôter de ce reste tous les facteurs monomes qu'il renferme, aussi bien que les facteurs polynomes indépendants de x; et alors on procédera à la seconde division en prenant pour diviseur ce reste ainsi simplifié. On se conduira comme dans la première; puis on passera à une troisième; et en continuant toujours de cette manière, on est sûr de parvenir enfin à un reste nul ou à un reste indépendant de x.

Dans le premier cas, les quantités A'' et B'' ont pour plus grand diviseur commun le diviseur de la dernière division. Dans le second, elles n'en ont aucun, ou, plus exactement, elles n'en ont point d'autres que l'unité. En effet, le plus grand commun diviseur de ces quantités devant être le même que celui du dernier diviseur et du reste indépendant de x, devrait être indépendant de x : mais A'' et B'' à cause des décompositions préliminaires, ne peuvent avoir aucun facteur commun indépendant de x autre que l'unité; donc l'unité est leur seul facteur commun.

Ainsi, on pourra toujours trouver le plus grand diviseur commun de deux polynomes dans lesquels il y a deux lettres; et par conséquent aussi celui de trois polynomes ou davantage.

3° De même qu'on s'est élevé du cas où les polynomes ne con-

tiennent qu'une lettre à celui où ils en contiennent deux, de même on s'élèvera de ce second cas à celui des polynomes qui en renferment trois, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des lettres. Donc enfin il n'y a aucun cas où l'on ne puisse déterminer le plus grand commun diviseur de plusieurs polynomes.

De quelques modifications nécessaires, quand les polynomes sont tels qu'on les considère dans les équations.

382. Dans la théorie générale des équations, qui va bientôt nous occuper, on considère d'une manière spéciale des polynomes de la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots . \; Gx + H,$$

dans lesquels x représente une inconnue, m un nombre entier positif, et A, B, C,.... des quantités quelconques, numériques ou littérales, qui ne contiennent point x. Or, quoique les coefficients A, B, C,.... puissent renfermer des radicaux ou des dénominateurs, comme l'inconnue x ne se trouve ni sous ces radicaux ni dans ces dénominateurs, le polynome est dit *rationnel et entier* par rapport à x; et l'on dit encore que deux polynomes de cette forme sont *divisibles* l'un par l'autre, lorsque la division donne un quotient exact, entier aussi relativement à x. Ainsi, $x^2 + \frac{3}{2}ax\sqrt{2} - 2a^2$ est divisible par $2x - a\sqrt{2}$: car on trouve le quotient exact $\frac{1}{2}x + a\sqrt{2}$. Cela posé, voici une proposition tout à fait semblable à celle du n° **374**, et dont l'application se présentera dans la théorie des équations.

Si un binome du premier degré, de la forme $\alpha x + \alpha'$, *divise un produit* AB *de deux polynomes rationnels et entiers par rapport à* x, *il devra diviser l'un de ces polynomes.*

Divisons A et B par $\alpha x + \alpha'$, et supposons que les divisions ne se fassent pas exactement, on est sûr au moins d'arriver à des restes qui ne contiendront plus x. Soient Q, Q', les deux quotients, et R, R', les deux restes ; on aura

$$A = Q(\alpha x + \alpha') + R, \quad B = Q'(\alpha x + \alpha') + R'.$$

Par suite $AB = QQ'(\alpha x + \alpha')^2 + Q'R(\alpha x + \alpha') + QR'(\alpha x + \alpha') + RR'$; et de là on tire, en divisant par $\alpha x + \alpha'$,

$$\frac{AB}{\alpha x + \alpha'} = QQ'(\alpha x + \alpha') + Q'R + QR' + \frac{RR'}{\alpha x + \alpha'}.$$

Par hypothèse AB est divisible par $\alpha x + \alpha'$, il faut donc que le

second membre se réduise à un polynome entier relativement à x : or, pour cela, il faudrait que RR′ fût divisible par $\alpha x+\alpha'$, ce qui est impossible, puisque R et R′ sont indépendants de x. Donc la division de A ou de B par $\alpha x+\alpha'$ doit se faire exactement.

Corollaire. Soit un produit ABCD de plusieurs polynomes entiers par rapport à x. S'il est divisible par $\alpha x+\alpha'$, il y aura au moins un des facteurs qui devra l'être. En effet, on peut considérer ABCD comme un produit de deux facteurs ABC $\times$ D ; donc si le binome $\alpha x+\alpha'$ ne divise pas D, il doit diviser ABC. Semblablement, on conclut que s'il ne divise point C il doit diviser AB, et que s'il ne divise point B il doit diviser A. On continuerait de la même manière, s'il y avait plus de facteurs.

383. Supposons que le polynome Ax^m+ etc., soit formé par la multiplication de m facteurs du premier degré, et qu'on ait

$$Ax^m + \text{etc.} = (\alpha x+\alpha')(\beta x+\beta')(\gamma x+\gamma'),\ldots.:$$

on pourra écrire

$$Ax^m + \text{etc.} = \alpha\beta\gamma\ldots\times\left(x+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta'}{\beta}\right)\left(x+\frac{\gamma'}{\gamma}\right)\ldots.;$$

puis, si on observe que A doit être égal au produit $\alpha\beta\gamma\ldots$, et si on pose $\frac{\alpha'}{\alpha}=a$, $\frac{\beta'}{\beta}=b$, $\frac{\gamma'}{\gamma}=c,\ldots$, on aura

$$Ax^m + \text{etc.} = A(x+a)(x+b)(x+c)\ldots..$$

On dit alors que le polynome Ax^m+ etc. est décomposé en *facteurs simples* ou *premiers*; et, sous cette dénomination, on entend ici les binomes $x+a$, $x+b$, $x+c$,... abstraction faite de A.

On peut appliquer à cette décomposition un théorème tout à fait analogue à celui du n° 375, c'est-à-dire qu'*un polynome* X *de la forme* $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+$ etc., *ne peut se décomposer que d'une seule manière en facteurs simples.*

En effet admettons qu'on ait à la fois

$$X = A(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots..$$
$$X = A(x+a')(x+b')(x+c')(x+d')\ldots..$$

Le binome $x+a'$ doit diviser le produit $A(x+a)(x+b)(x+c)\ldots.$; donc il divise l'un des facteurs, et pour cela il faut évidemment qu'il soit égal à l'un d'eux. Supposons-le égal à $x+a$, et divisons les deux produits par $x+a$, il vient $A(x+b)(x+c)(x+d)\ldots.= A(x+b')(x+c')(x+d')\ldots..$ On prouvera de la même manière

que $x+b'$ doit être égal à l'un des facteurs du premier membre Soit $x+b$ ce facteur; en divisant encore par $x+b$, on aura $A(x+c)(x+d)\ldots = A(x+c')(x+d')\ldots$; et en poursuivant le raisonnement on conclura que les m facteurs simples du second produit sont les mêmes que ceux du premier.

384. Dans la théorie des équations, quand il s'agira du *plus grand diviseur commun* à plusieurs polynomes, entiers relativement à x, il faudra toujours entendre que les facteurs simples de la forme $x+a$, $x+b$,... qui sont communs à ces polynomes, ont été multipliés entre eux pour composer le plus grand commun diviseur, lequel pourra contenir en outre un multiplicateur quelconque indépendant de x. La présence de ce multiplicateur est d'ailleurs tout à fait indifférente : car ordinairement on ne considère ce commun diviseur que pour en déduire les valeurs de x qui le rendent égal à zéro, et un multiplicateur indépendant de x ne peut en aucune façon changer ces valeurs (**69**).

La détermination de ce commun diviseur pourraît être tout à fait assimilée à celle du plus grand commun diviseur des nombres. Il sera inutile de tenir compte des facteurs communs indépendants de x, et on admettra, si on veut, des coefficients fractionnaires dans le calcul ; cependant, il sera en général plus simple d'éviter les fractions. A la vérité, les résultats qu'on obtient par ces diverses manières de procéder différeront entre eux par des multiplicateurs ou des diviseurs indépendants de x, mais on vient de dire que cette circonstance ne doit être ici d'aucune considération.

CHAPITRE XV.

COMPOSITION D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE QUELCONQUE A UNE SEULE INCONNUE.

Théorème fondamental dont l'objet est d'établir que *toute équation algébrique a une racine.*

385. Les équations algébriques à une seule inconnue sont celles qu'on peut réduire à la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Gx + H = 0,$$

x étant l'inconnue, m un nombre entier positif, et A, B, C,... des

quantités connues quelconques. L'exposant m est le degré de l'équation. Pour la simplifier encore davantage, on la divise par le premier coefficient, et on l'écrit ainsi :

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0,$$

P, Q,... T, U, étant encore des quantités connues, réelles ou imaginaires de la forme $a + b\sqrt{1}$. Je rappelle ici que la dénomination de *quantité imaginaire* ne s'appliquera plus qu'aux seules expressions de cette forme.

Il n'est pas évident *à priori* qu'il existe toujours une quantité réelle ou imaginaire, qui, mise dans cette équation à la place de x, rende le premier membre identiquement nul : ainsi, une démonstration est nécessaire pour établir que cette équation a toujours une racine. Cette proposition fondamentale est restée longtemps sans démonstration ; mais aujourd'hui l'on en possède plusieurs. MM. ARGAND et MOUREY en ont donné une dans les ouvrages déjà cités, p. 214. Celle que M. CAUCHY a publiée dans ses *Exercices de Mathématiques* a l'avantage de ne rien emprunter à la géométrie, et c'est elle que je vais exposer. Cependant, comme elle ne laisse pas que d'être assez épineuse, si on jugeait à propos de la supprimer et d'admettre le théorème comme évident, il faudrait passer immédiatement à la composition des équations, p. 320.

386. Dans la démonstration de M. CAUCHY, j'aurai besoin des deux propositions établies sur les modules (**265** et **266**), et, pour cette raison, je les rappellerai ici sous forme de *Lemmes*. A la suite, j'en placerai deux autres qui seront également nécessaires.

LEMME I. *La somme ou la différence de deux quantités quelconques a un module compris entre la somme et la différence des modules de ces deux quantités.*

LEMME II. *Le produit de deux quantités a pour module le produit des modules de ces quantités.*

COROLLAIRE. Donc *le produit d'un nombre quelconque de facteur doit avoir pour module le produit des modules de tous les facteurs.* Donc aussi *la $n^{ième}$ puissance d'une quantité a pour module la $n^{ième}$ puissance du module de cette quantité.*

387. LEMME III. *Pour qu'une quantité de la forme* $\mathrm{a} + \mathrm{b}\sqrt{-1}$ *soit nulle, il est nécessaire et il suffit que son module soit nul.*

En effet, a et b étant des quantités réelles, soit

$$a + b\sqrt{-1} = 0.$$

Comme la partie réelle a ne peut pas détruire la partie imaginaire $b\sqrt{-1}$, il faut qu'on ait séparément $a=0$ et $b=0$; donc $\sqrt{a^2+b^2}=0$, c'est-à-dire que le module de $a+b\sqrt{-1}$ doit être zéro. Cette condition suffit; car a et b étant des quantité réelles, leurs carrés sont des quantités positives, et la somme a^2+b^2 ne peut pas être zéro, à moins qu'on n'ait $a=0$ et $b=0$.

Corollaire. Il est manifeste qu'un produit de quantités réelles n'est pas nul si aucune des quantités n'est égale à zéro. Mais, quand il y a des facteurs imaginaires, il n'est pas évident qu'après la multiplication les termes du produit ne puissent pas s'entre-détruire sans que cela arrive dans l'un des facteurs. Or, on va démontrer que, dans ce cas encore, il faut qu'un facteur soit zéro.

Pour que le produit soit nul, il faut que son module le soit. Or, ce module est le produit des modules des facteurs (386); et comme ces modules sont des quantités réelles, leur produit ne peut pas devenir zéro, à moins qu'un d'eux ne le soit. Mais alors le facteur auquel correspond ce module doit lui-même être nul; donc en général le produit de plusieurs facteurs ne peut pas devenir nul, à moins qu'un des facteurs ne soit nul.

388. Lemme IV. *Soit un polynome* X *de la forme*

$$X = x^m - Px^{m-1} - Qx^{m-2} \ldots - U,$$

dans lequel tous les termes qui viennent après le premier ont des coefficients réels et négatifs. Si on fait croître x *positivement à partir d'une certaine limite, les valeurs du polynome* X *seront continuellement positives et croissantes, et pourront même devenir aussi grandes qu'on voudra*

On peut écrire X comme il suit :

$$X = x^m\left(1 - \frac{P}{x} - \frac{Q}{x^2} \ldots - \frac{U}{x^m}\right).$$

Alors, si on fait croître x positivement, les termes négatifs compris dans les parenthèses iront en décroissant, et on peut rendre leur somme aussi petite qu'on veut. Une fois que x aura atteint une valeur λ qui rendra cette somme moindre que 1, il est clair que la quantité renfermée entre les parenthèses sera positive et croissante. Elle ne peut point surpasser l'unité, mais elle en peut différer aussi peu qu'on veut. D'un autre côté, le facteur x^m va aussi en augmentant, et peut surpasser toute limite; donc, à partir de $x=\lambda$, on est sûr que X doit croître positivement jusqu'à l'infini.

Remarque. Le nombre des termes négatifs de la parenthèse est en général égal à m; mais il peut être moindre parce que quelques-uns d'entre eux peuvent être nuls. Soit n le nombre des termes restants, et posons les égalités

$$\frac{P}{x}=\frac{1}{n}, \quad \frac{Q}{x^2}=\frac{1}{n}, \quad \frac{U}{x^m}=\frac{1}{n}:$$

on en tirera les valeurs $x=nP$, $x=\sqrt{nQ}, \ldots x=\sqrt[m]{nU}$; et il est clair qu'en faisant x égal à la plus grande, le polynome X sera positif. Ainsi, on pourra prendre λ égal à cette valeur.

389. Procédons maintenant à la démonstration du théorème fondamental que nous avons en vue.

Théorème. *Une équation de degré quelconque, à coefficients réels ou imaginaires, a toujours au moins une racine.*

Première partie. La démonstration générale exige que l'on considère d'abord le cas particulier de l'équation binome. Supposons cette équation ramenée à la forme

$$x^m=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

où α et β désignent des quantités réelles qui peuvent être nulles, ensemble ou séparément. Il s'agit de prouver qu'il existe une valeur de x, de la forme $a+b\sqrt{-1}$, propre à la vérifier.

Lorsque le degré m est égal à une puissance de 2, la détermination de x revient à extraire de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ plusieurs racines carrées successives. Or, on a vu (**265**) qu'on parvient toujours à exprimer ces racines sous la forme $a+b\sqrt{-1}$.

Lorsque m est un produit de facteurs égaux à 2 par un nombre impair quelconque, la détermination de x revient à extraire de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ plusieurs racines carrées successives, puis à la fin une racine de degré impair. Les racines carrées pouvant toutes s'exprimer sous la forme $a+b\sqrt{-1}$, il faut donc démontrer que, m étant impair, il existe encore une valeur de x, de cette forme, propre à vérifier l'équation $x^m=\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

La vérité de la proposition se reconnaît facilement quand l'une des quantités α et β est zéro. D'abord, si $\beta=0$ l'équation binome se réduit à $x^m=\alpha$; et, quel que soit le signe de α, le radical d'ordre impair $\sqrt[m]{\alpha}$ doit avoir une valeur réelle, laquelle est racine de l'équation.

Si $\alpha=0$, l'équation binome se réduit à $x^m=\beta\sqrt{-1}$. Alors, en posant $x=x'\sqrt{-1}$, on aura $x^m=\pm x'^m\sqrt{-1}$ (on doit prendre +

ou — selon que m est un multiple de 4 augmenté de 1 ou de 3). Par suite, l'équation devient $x'^m = \pm \beta$: celle-ci a une racine réelle; donc l'équation $x^m = \beta\sqrt{-1}$ en aura une de la forme $x = b\sqrt{-1}$.

Considérons le cas où ni α ni β n'est égal à zéro. En mettant tous les termes dans le premier membre, l'équation sera

$$x^m - (\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 0.$$

Pour abréger, je représenterai le 1er membre par X, de sorte qu'on aura $X = x^m - (\alpha + \beta\sqrt{-1})$. Posons $x = a + b\sqrt{-1}$: X se transformera en une expression semblable

$$X = A + B\sqrt{-1},$$

A et B étant des polynomes entiers en a et b, où $\sqrt{-1}$ n'entre point. Or, je vais prouver qu'il existe des valeurs de a et b, réelles et non infinies, qui font évanouir le module $\sqrt{A^2 + B^2}$ de X.

Représentons par ρ, v, V, les modules des quantités

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad a + b\sqrt{-1}, \quad A + B\sqrt{-1},$$

de telle sorte qu'on ait

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad v = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad V = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Si on prend $b = 0$ et $a^m = \alpha$, il est évident que x^m se réduit à a^m ou α; donc alors

$$X = \alpha - (\alpha + \beta\sqrt{-1}) = -\beta\sqrt{-1};$$

donc $V^2 = \beta^2$; donc $V^2 < \alpha^2 + \beta^2$ ou $V < \rho$. Puisqu'on trouve ainsi une valeur de $V < \rho$, on peut déjà conclure avec certitude qu'en faisant varier a et b de toutes les manières possibles, la plus petite valeur que puisse prendre V sera $< \rho$. Ce qu'il faut démontrer, c'est que cette plus petite valeur de V n'est autre que zéro.

Quelle que soit cette valeur *minimum*, elle ne doit pas correspondre à la valeur de $x = 0$; car alors on aurait $a = 0$, $b = 0$, $V = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \rho$. Elle ne doit pas non plus correspondre à une valeur de x dans laquelle a ou b serait infini, car alors on aurait $v = \infty$, par suite (386) le module v^m de x^m serait infini, et par suite aussi celui de X, lequel est compris entre $v^m + \rho$ et $v^m - \rho$ (386).

Soit $x = c$ une valeur différente de zéro, réelle ou imaginaire, et dans laquelle ni a ni b n'est infini. Nommons C la valeur correspondante de X, V′ le module de C; et supposons que V′ ne soit pas zéro, ce qui exige que la valeur C elle-même ne le soit pas.

Si on pose $x = c + z$, et si on fait attention que $C = c^m - \alpha - \beta\sqrt{-1}$, X deviendra

$$X = (c + z)^m - \alpha - \beta\sqrt{-1}$$
$$= C + mc^{m-1}z + \frac{m(m-1)}{2}c^{m-2}z^2 \ldots\ldots + z^m.$$

Dans ce développement, la somme des deux premiers termes s'évanouit en prenant

$$z = \frac{-C}{mc^{m-1}}.$$

Désignons par ε une quantité réelle positive, qu'on pourra choisir aussi petite qu'on voudra, et faisons

$$z = \frac{-C}{mc^{m-1}}\varepsilon :$$

les deux premiers termes du développement deviendront $C(1-\varepsilon)$; et, en mettant C en facteur commun, on pourra écrire

$$X = C(1 - \varepsilon + f\varepsilon^2 + f'\varepsilon^3 + \text{etc.}),$$

f, f',... étant des quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Si on appelle Φ le module de la quantité qui multiplie C, on aura pour celui de X, en vertu du lemme II,

$$V = V'\Phi.$$

D'un autre côté, puisque ε est une quantité réelle, si on nomme φ, φ',.. les modules de f, f',... on aura $1-\varepsilon$, $\varphi\varepsilon^2$, $\varphi'\varepsilon^3$,... pour ceux des quantités $1-\varepsilon$, $f\varepsilon^2$, $f'\varepsilon^3$...; et, en vertu du lemme Ier, le module Φ ne devra point surpasser

$$1 - \varepsilon + \varphi\varepsilon^2 + \varphi'\varepsilon^3 + \text{etc.}$$

En mettant cette quantité sous la forme $1 - \varepsilon(1 - \varphi\varepsilon - \varphi'\varepsilon^2 - \text{etc.})$, on voit que, pour de très-petites valeurs de ε, la quantité entre parenthèses est < 1. Par suite, la quantité ci-dessus, tout entière, est elle-même < 1; donc alors on aurait $\Phi < 1$ et $V < V'$.

Ainsi, quand V' n'est point zéro, on peut choisir x de manière que le module V de X soit $< V'$. Donc la valeur *minimum* de ce module ne saurait différer de zéro. Or, la valeur de x qui donne $V = 0$ est racine de l'équation $X = 0$, donc enfin l'équation binome admet toujours une racine de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Seconde partie. Actuellement, soit l'équation générale

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} + Q^{m-2} + Rx^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

dans laquelle P, Q, R, etc., sont des quantités quelconques, réelles ou imaginaires, de la forme $a+b\sqrt{-1}$,

Faisons encore, pour abréger, $X=x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+$ etc. : puis remplaçons x par la valeur $x=a+b\sqrt{-1}$. Il viendra un résultat de la forme

$$X=A+B\sqrt{-1},$$

A et B étant des polynomes en a et b où $\sqrt{-1}$ n'entre point ; et pour que l'équation [A] soit vérifiée, il faut et il suffit que le module $\sqrt{A^2+B^2}$ de X soit zéro (387). Or, l'objet des explications suivantes est de prouver qu'il existe en effet des valeurs réelles de a et b qui doivent anéantir ce module.

Représentons par $\rho, \rho', \rho'',\ldots$ les modules des coefficients P, Q, R, etc., par v le module de l'expression $x=a+b\sqrt{-1}$, et par V celui de X. En vertu du lemme II, quand on substitue $a+b\sqrt{-1}$ à la place de x, les puissances x^m, x^{m-1}, x^{m-2},... ont pour modules v^m, v^{m-1}, v^{m-2},.... ; et les différents termes

$$x^m,\quad Px^{m-1},\quad Qx^{m-2},\quad Rx^{m-3},\quad \text{etc.},$$

qui composent X, auront pour modules

$$v^m,\quad \rho v^{m-1},\quad \rho' v^{m-2},\quad \rho'' v^{m-3},\quad \text{etc.}$$

Donc, par le lemme I[er], on est sûr que le module du polynome

$$Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+\text{etc.}$$

ne doit pas surpasser la somme $\rho v^{m-1}+\rho' v^{m-2}+\rho'' v^{m-3}+$ etc. ; et que par suite le module V du polynome ne doit point être inférieur à la différence

$$[1]\qquad v^m-\rho v^{m-1}-\rho' v^{m-2}-\rho'' v^{m-3}-\text{etc.},$$

laquelle peut être regardée comme positive, pourvu qu'on attribue à v des valeurs suffisamment grandes. On sait, en effet (388), qu'en donnant à v des valeurs de plus en plus grandes à partir d'une certaine limite, l'expression [1] sera constamment positive. On sait même qu'elle doit croître jusqu'à l'infini ; et de là on conclut que le module V peut lui-même acquérir des valeurs plus grandes que toute limite.

Si on attribuait une valeur infinie à a ou à b, le module v de x serait infini. D'après ce qui vient d'être dit, l'expression [1] le serait donc aussi, et par suite le module V. Mais tant que a et b n'auront point de valeurs infinies, il est évident, par la nature même des polynomes A et B, que ce module ne devra pas devenir

infini. De là il suit que, s'il ne peut devenir zéro par aucune valeur de x, on est au moins assuré qu'il en existe une, formée avec des valeurs finies de a et b, qui donne pour V une quantité au-dessous de laquelle il ne pourra tomber aucune autre valeur de ce module. Toute la question se réduit donc encore à prouver que ce *minimum* n'est autre que zéro.

Soit $x = c$ une valeur particulière de x, laquelle peut être réelle ou imaginaire; soit C la valeur correspondante de X, laquelle est supposée différente de zéro; et soit V′ le module de C. Si on prend pour x une valeur $x = c + z$, différente de c, il en résultera pour X un développement tel que

[2] $$X = C + C'z + C''z^2 + \text{etc.}$$

Admettons d'abord que C′ ne soit pas zéro, et prenons

$$z = -\frac{C}{C'}\varepsilon,$$

ε étant une quantité positive qui peut être choisie aussi petite qu'on veut X, pourra s'écrire ainsi $X = C(1 - \varepsilon + f\varepsilon^2 + f'\varepsilon^3 + \text{etc.})$, f, f',... étant encore des quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$. On pourra donc reconnaître ici, comme à la page 317, que des valeurs très-petites de ε rendront le module $V < V'$.

Admettons à présent que, dans l'expression [2], C′ soit zéro, et qu'à partir de ce coefficient le premier qui diffère de zéro soit celui de z^n. En le désignant par C_1, et les suivants par C_2, C_3, etc., l'expression [2] sera simplement

[3] $$X = C + C_1 z^n + C_2 z^{n+1} + \text{etc.}$$

Posons l'équation $$z^n = -\frac{C}{C_1}:$$

le second membre peut se ramener à la forme $a + b\sqrt{-1}$; et l'on sait, par ce qui a été dit pour l'équation binome, qu'il existe une valeur de z propre à vérifier cette équation. Nommons z' cette valeur et prenons $z = z'\varepsilon$, ε étant encore une quantité positive aussi petite qu'on veut. En observant que $z'^n = \frac{-C}{C_1}$, l'expression [3] se changera en celle-ci $X = C(1 - \varepsilon^n + f_1\varepsilon^{n+1} + f_2\varepsilon^{n+2} + \text{etc.})$, dans laquelle f_1, f_2, ... sont toujours des coefficients de la forme $a + b\sqrt{-1}$; et en raisonnant encore ici comme à la p. 317, on verra que les petites valeurs de ε rendront le module de l'expression ci-dessus moindre que celui de C, c'est-à-dire qu'on aura $V < V'$.

Ainsi, lorsque V' n'est point zéro, on peut toujours choisir x de manière que le module V du polynome X soit $< V'$. Donc la valeur *minimum* de V ne diffère pas de zéro ; et par conséquent la valeur de x à laquelle correspond ce *minimum* est racine de l'équation [A]. Sans assigner la valeur de cette racine, et sans examiner s'il existe plusieurs valeurs de x qui puissent donner $V = 0$, on n'en peut pas moins conclure avec certitude qu'*une équation de degré quelconque, à coefficients réels ou imaginaires, a toujours au moins une racine de la forme* $a + b\sqrt{-1}$.

Composition des équations.

390. Théorème. *Si une quantité* a *est racine d'une équation, le premier membre de cette équation est exactement divisible par le binome* $x - a$.

Dans cet énoncé, on suppose que l'équation est de la forme

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0.$$

Pour abréger, je désignerai le premier membre par X, de sorte que l'équation elle-même se désignera simplement par $X = 0$.

Divisons X par $x - a$: comme le diviseur est du premier degré, on pourra pousser l'opération jusqu'à ce qu'on trouve un reste qui ne contienne plus x. Nommons Y le quotient et Z le reste, on aura

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{etc.} = (x-a)Y + Z.$$

Si on fait $x = a$, le produit $(x-a)Y$ sera nul : car $x - a$ devient zéro, et Y ne peut pas devenir infini, attendu que x n'y entre pas en dénominateur. D'ailleurs Z ne change pas, puisque x n'y entre pas; donc l'égalité précédente se réduit à

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \text{etc.} = Z.$$

De là on tire cette conséquence que, quel que soit a, le reste Z de la division de X par $x - a$ s'obtient en changeant x en a dans X. Donc, lorsque a est racine de l'équation $X = 0$, Z sera nul ; donc alors X est exactement divisible par $x - a$.

Autre démonstration. Quelle que soit la quantité a, le polynome X peut s'écrire ainsi :

$$X = \left\{ \begin{array}{l} (x^m - a^m) + P(x^{m-1} - a^{m-1}) + Q(x^{m-2} - a^{m-2}) \ldots + T(x-a) \\ \qquad + a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots + Ta + U. \end{array} \right.$$

La 1[re] ligne contient les différences $x^m - a^m$, $x^{m-1} - a^{m-1}$, etc., lesquelles sont toutes divisibles par $x - a$; donc la seconde ligne est le reste indépendant de x qu'on doit obtenir en divisant X par $x - a$. Or, ce reste n'est autre que X où l'on aurait mis a au lieu de x; donc, lorsque a est racine de l'équation $X = 0$, le polynome X est divisible par $x - a$.

Remarque. Par cette dernière démonstration, on voit aussi que pour avoir le quotient de X par $x - a$ il n'y a qu'à diviser $x^m - a^m$, $x^{m-1} - a^{m-1}$, etc. par $x - a$, et à ajouter entre eux tous les quotients, après avoir multiplié le 2[e] par P; le 3[e] par Q; etc. Ces divers quotients sont faciles à former, et il vient

$$\frac{X}{x-a} = \begin{array}{r|r|r} x^{m-1} + a & x^{m-2} + a^2 & x^{m-3} \ldots + a^{m-1} \\ + P & + Pa & \ldots + Pa^{m-2} \\ & + Q & \ldots + Qa^{m-3} \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & + T. \end{array}$$

Au reste, tout ce qu'on vient de démontrer était déjà connu (55).

391. THÉORÈME. *Un polynome quelconque* X, *de la forme* $X^m + PX^{m-1} + \text{etc.}$ *est toujours le produit de* m *facteurs simples tels que* $X - a$, $X - b$, etc. *Par suite l'équation* $X = 0$ *peut avoir* m *racines, et jamais davantage.*

Ici on suppose admis que toute équation algébrique a au moins une racine réelle ou imaginaire. Soit donc a une racine de l'équation $X = 0$; le polynome X doit être divisible par $x - a$ (**390**), le premier terme du quotient sera évidemment x^{m-1}, et en désignant ce quotient, d'une manière abrégée, par $x^{m-1} + \text{etc.}$, on aura

$$X = (x - a)(x^{m-1} + \text{etc.}).$$

Puisque toute équation a une racine, il existe une valeur b qui, mise à la place de x, anéantit $x^{m-1} + \text{etc.}$; donc ce facteur est divisible par $x - b$; donc, si on désigne le quotient par $x^{m-2} + \text{etc.}$, on aura $x^{m-1} + \text{etc.} = (x - b)(x^{m-2} + \text{etc.})$, et par suite

$$X = (x - a)(x - b)(x^{m-2} + \text{etc.}).$$

En répétant le même raisonnement, on décompose le polynome $x^{m-2} + \text{etc.}$ comme on a décomposé le précédent $x^{m-1} + \text{etc.}$; et en continuant ainsi, chaque opération mettra en évidence un nouveau facteur du 1[er] degré en même temps qu'elle diminuera

d'une unité le degré du dernier quotient. On arrivera donc enfin à un quotient qui lui-même sera du 1[er] degré, et dont le premier terme sera x. Par conséquent, si on désigne ce quotient par $x-l$, le polynome X sera décomposé en m facteurs comme il suit :

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l).$$

A quoi il faut ajouter que les binomes $x-a$, $x-b$, etc., étant des facteurs premiers, dans le sens expliqué n° **383**, il n'y a aucun autre système de facteurs premiers qui puisse reproduire X. Ainsi, on est sûr qu'aucun binome nouveau $x-\alpha$ ne peut être un diviseur de X.

Corollaire. La possibilité de la décomposition précédente étant établie, on reconnaît sur-le-champ que l'équation $X=0$ doit avoir m racines ; car son premier membre devient nul par chacune des valeurs $x=a$, $x=b$, $x=c$, ... $x=l$. De plus, elle ne peut pas avoir d'autres racines : car s'il en existait une nouvelle, α, le binome $x-\alpha$ serait un nouveau diviseur de X, ce qui est impossible (*).

Remarque. Si quelques-unes des quantités a, b, c,... sont égales entre elles, il n'y a plus m valeurs différentes de x qui vérifient l'équation. Cependant on considère toujours le degré de l'équation comme indiquant le nombre des racines ; mais alors on sous-entend que plusieurs de ces racines peuvent être égales. Ainsi, en supposant qu'il y ait dans l'équation α facteurs égaux à $x-a$, on dira que parmi les racines il y en a α qui sont égales à a.

392. THÉORÈME. *Dans toute équation ramenée à la forme ordinaire, les coefficients sont composés avec les racines* a, b, c,... *ainsi qu'il suit. Le coefficient du* 2[e] *terme, pris avec un signe contraire,*

(*) On peut éviter la considération des facteurs premiers en observant que si on remplace x par une quantité α différente de a, de b,... de l, il n'est pas possible que X devienne zéro, puisqu'aucun de ses facteurs ne s'anéantit ; donc l'équation $X=0$ n'a point d'autres racines que a, b,... l.

Donc aussi X ne saurait être divisible par un binome $x-\alpha$, différent de $x-a$, de $x-b$, etc. Car si cela était, X deviendrait zéro en faisant $x=\alpha$, et par conséquent α serait une nouvelle racine de l'équation $X=0$.

Ce raisonnement est fondé sur ce qu'un produit ne peut pas être nul si aucun des facteurs ne l'est. Cette assertion, ainsi qu'on l'a déjà remarqué (cor. n° 387), est évidente d'elle-même quand les facteurs sont réels. Mais ici x, a, b, c,.... peuvent représenter des quantités imaginaires, et il n'est plus évident que les termes du produit ne puissent point se détruire entre eux sans que cela arrive dans l'un des facteurs. Par cette raison, la démonstration du texte doit être préférée, à moins qu'on ne s'appuie sur le corollaire qu'on vient de rappeler.

est la somme des racines; le coefficient du 3e terme est la somme des produits des racines multipliées deux à deux; le coefficient du 4e terme, pris avec un signe contraire, est la somme des produits des racines multipliées trois à trois; ainsi de suite, en ayant soin de changer les signes des coefficients des termes de rang pair; enfin, le dernier terme, pris avec son signe ou avec un signe contraire, suivant que le degré de l'équation est pair ou impair, est le produit de toutes les racines.

Dans un produit de binomes tels que $x+a$, $x+b$, $x+c,\ldots$, on sait que le coefficient du 2e terme est égal à la somme des seconds termes des binomes, que le coefficient du 3e terme est égal à la somme de leurs produits deux à deux, etc. Or, on a vu tout à l'heure que, dans une équation de la forme $x^m+Px^{m-1}+\text{etc.}=0$, le premier membre est composé de m facteurs simples $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc. et que a, b, c, etc. sont les racines de cette équation. On pourra donc appliquer ici les règles qu'on vient de rappeler, pourvu qu'on ait soin d'y remplacer a, b, $c,\ldots$ par $-a$, $-b$, $-c,\ldots$ c'est-à-dire par les racines mêmes, prises avec des signes contraires. De là résulte le théorème énoncé.

393. *Remarque.* Il semble, au premier coup d'œil, que ces relations feront connaître les racines. En effet, elles donnent sur-le-champ des équations où entrent ces racines, et en nombre égal aux coefficients de l'équation (abstraction faite du premier terme dont le coefficient est l'unité). Or, le nombre de ces coefficients est égal au degré de l'équation; ainsi on aura autant d'équations que de racines inconnues. Malheureusement, quand on cherche à les résoudre, on est ramené à l'équation proposée elle-même, de sorte que la question ne fait aucun progrès.

Pour plus de simplicité, je prendrai l'équation du 3e degré

$$[1] \qquad x^3+Px^2+Qx+R=0.$$

En désignant les trois racines par a, b, c, on aurait, pour déterminer ces racines, les trois relations

$$P=-a-b-c,$$
$$Q=ab+ac+bc,$$
$$R=-abc.$$

Pour en déduire une équation qui ne contienne plus que la seule inconnue a, le procédé le plus simple consiste à multiplier la 1re

par a^2, la 2e par a, et à les ajouter ensuite avec la 3e, membre à membre. Il vient d'abord

$$\begin{aligned}Pa^2 + Qa + R = - a^3 &- a^2b - a^2c\\ &+ a^2b + a^2c + abc\\ &- abc\,;\end{aligned}$$

puis, en effectuant les réductions et transposant le terme $-a^3$,

$$a^3 + Pa^2 + Qa + R = 0.$$

Les inconnues b et c sont ainsi éliminées, mais on arrive à une équation tout à fait semblable à la proposée, et dont la résolution doit par conséquent offrir les mêmes difficultés.

Il en serait encore de même de l'équation qui ne renferme que b ou c. En effet, si au lieu de multiplier les deux premières équations par a^2 et a, on les multipliait respectivemant par b^2 et par b, ou bien par c^2 et par c, et si ensuite on les ajoutait avec la 3e, on obtiendrait ces équations,

$$b^3 + Pb^2 + Qb + R = 0, \quad c^3 + Pc^2 + Qc + R = 0,$$

et l'on voit que l'on est toujours ramené à des équations entièrement semblables à la proposée.

On pourrait croire qu'en cherchant quelque autre procédé d'élimination, il serait possible de parvenir à une équation d'une résolution plus facile. Mais voici un raisonnement qui doit convaincre du contraire. Les trois inconnues a, b, c entrent de la même manière dans les trois équations, de telle sorte que ces équations ne changent point quand on fait entre a, b, c, telle permutation qu'on voudra. De là il suit que les mêmes calculs qui conduisent à l'équation finale en a doivent se répéter pour avoir l'équation finale en b ou en c, avec cette seule différence qu'on remplacera partout a, par b ou par c. Chacune de ces trois équations finales doit donc à elle seule déterminer les valeurs des trois racines de l'équation proposée [1], et par conséquent aucune d'elles ne saurait être différente de cette équation elle-même.

On arrive encore plus rapidement à cette conclusion en observant que chacune des lettres a, b, c, représente indifféremment telle racine qu'on voudra. Donc, lorsqu'on aura trouvé par un moyen quelconque une équation qui ne renfermera plus que a, ou b, ou c, elle devra déterminer pour valeurs de cette inconnue les racines mêmes de l'équation proposée, et par conséquent être toute semblable à cette équation.

Observations auxquelles donnent lieu les racines imaginaires.

394. On suppose ordinairement que les coefficients des équations algébriques sont réels; mais on atteindra une plus grande généralité en les considérant comme représentant des expressions de la forme $a+b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles : car cette hypothèse comprend la première en faisant $b=0$. Dans le nº **389**, c'est en donnant aux coefficients ce degré d'étendue, qu'il a été reconnu qu'une équation algébrique a toujours au moins une racine de la forme $a+b\sqrt{-1}$, réelle ou imaginaire; maintenant je veux faire remarquer qu'en admettant cette proposition comme démontrée, les m racines de l'équation $\mathrm{X}=0$ ou

[A] $$x^m+\mathrm{P}x^{m-1}+\mathrm{Q}x^{m-2}+\text{etc.}=0,$$

doivent toutes avoir la même forme $a+b\sqrt{-1}$.

En effet, soit $x=a+b\sqrt{-1}$ la racine dont l'existence est démontrée. On sait que le polynome $x^m+\text{etc.}$ est divisible par $x-(a+b\sqrt{-1})$. Or, quand on effectue cette division, les quantités $a+b\sqrt{-1}$, P, Q, etc. ne peuvent se combiner que par addition, par soustraction et par multiplication; donc les coefficients du quotient $x^{m-1}+\text{etc.}$ seront encore de la forme $a+b\sqrt{-1}$. Par suite, l'équation $x^{m-1}+\text{etc.}=0$ aura aussi au moins une racine $a'+b'\sqrt{-1}$ de cette forme, et en divisant $x^{m-1}+\text{etc.}$ par $x-(a'+b'\sqrt{-1})$, les coefficients du quotient $x^{m-2}+\text{etc.}$ seront encore de la même forme. En continuant de raisonner ainsi, il est clair que le polynome primitif X se trouvera décomposé en m facteurs tels que $x-(a+b\sqrt{-1})$, et que par conséquent les racines de l'équation seront toutes de la forme $a+b\sqrt{-1}$.

395. Si on considère deux équations conjuguées,

[1] $\mathrm{Y}+\mathrm{Z}\sqrt{-1}=0,$ [2] $\mathrm{Y}-\mathrm{Z}\sqrt{-1}=0,$

qui ne diffèrent que par le signe de $\mathrm{Z}\sqrt{-1}$, et dans lesquelles Y et Z sont des polynomes en x dont tous les coefficients sont des nombres réels, les racines de l'une seront les quantités conjuguées des racines de l'autre. En effet, soit $x=a+b\sqrt{-1}$ une racine de l'équation [1], et soit $\mathrm{Y}'+\mathrm{Z}'\sqrt{-1}$ le quotient de son 1er membre par $x-a-b\sqrt{-1}$; on aura identiquement

[3] $$(\mathrm{Y}'+\mathrm{Z}'\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})=\mathrm{Y}+\mathrm{Z}\sqrt{-1}.$$

En effectuant la multiplication indiquée dans le 1er membre, on trouve le produit $(x-a)Y'+bZ'+[(x-a)Z'-bY']\sqrt{-1}$. Or, en changeant dans les deux facteurs Z' en $-Z'$ et b en $-b$, on voit que, dans le produit, la partie qui ne contient pas $\sqrt{-1}$ reste la même, et que celle qui contient $\sqrt{-1}$ change seulement de signe; donc, par cela seul qu'on a l'égalité identique [3], on doit aussi avoir

$$[4] \qquad (Y'-X'\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})=Y-Z\sqrt{-1}.$$

De là on conclut que $x=a-b\sqrt{-1}$ est racine de l'équation [2] : c'est-à-dire qu'on obtient toutes les racines de cette équation en changeant dans celles de l'équation [1] le signe de $\sqrt{-1}$. Si on ne fait attention qu'aux racines réelles, cette conclusion montre qu'elles sont les mêmes dans les deux équations.

396. Une particularité remarquable se présente lorsque les coefficients P, Q, R,... sont réels : c'est qu'alors l'équation ne peut pas avoir une racine imaginaire $a+b\sqrt{-1}$ sans en avoir une seconde égale à $a-b\sqrt{-1}$. En effet, supposons qu'après avoir divisé X par $x-a-b\sqrt{-1}$ on réunisse tous les termes du quotient qui contiennent $\sqrt{-1}$, et que ce quotient soit représenté par $Y+Z\sqrt{-1}$, de telle sorte qu'on ait

$$[5] \qquad X=(Y+Z\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}).$$

En effectuant la multiplication, le produit pourra s'écrire ainsi :

$$[6] \qquad X=(x-a)Y+bZ+[(x-a)Z-bY]\sqrt{-1}.$$

Mais puisque X est un polynome qui ne contient pas $\sqrt{-1}$ la partie qui, dans ce produit, multiplie $\sqrt{-1}$, doit s'anéantir d'elle-même; donc on doit avoir simplement

$$X=(x-a)Y+bZ.$$

Maintenant, dans les deux facteurs de l'expression [5] changeons Z en $-Z$ et b en $-b$. Pour avoir le nouveau produit, il suffira de faire les mêmes changements dans l'expression [6], et par là elle ne subit pas d'autre altération que celle du signe de la partie affectée de $\sqrt{-1}$. Or, on vient de voir que cette partie est nulle d'elle-même; donc, on retrouve encore pour produit le polynome X. Ainsi l'on doit avoir

$$X=(Y-Z\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1});$$

donc la valeur $x=a-b\sqrt{-1}$ est racine de l'équation $X=0$.

Il suit de là que les racines imaginaires de cette équation sont en nombre pair et peuvent se grouper par couples de la forme $x = a \pm b\sqrt{-1}$. En multipliant entre eux les deux facteurs du 1[er] degré, qui correspondent à un tel couple, il vient

$$\begin{aligned}(x - a - b\sqrt{-1})(x - a + b\sqrt{-1}) &= (x - a)^2 + b^2 \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2).\end{aligned}$$

Ce produit est un trinome réel du 2[e] degré, c'est-à-dire que ses coefficients sont réels.

On peut donc regarder comme démontrée cette belle proposition : *Qu'une équation algébrique à coefficients réels est toujours composée d'autant de facteurs réels du 1[er] degré qu'elle a de racines réelles, et d'autant de facteurs réels du 2[e], qu'elle a de couples de racines imaginaires.*

CHAPITRE XVI.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS. — RECHERCHE DES DIVISEURS. — THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

Transformation des équations.

397. Considérée d'une manière générale, la transformation des équations a pour objet de déduire d'une équation donnée une nouvelle équation dont les racines aient avec celles de la première une relation connue. Les questions suivantes suffiront pour comprendre le but de cette théorie et les procédés qu'elle emploie.

Question I. *Une équation étant donnée, changer les signes de ses racines.*

Par là on veut dire qu'il faut trouver une équation dont les racines soient celles qu'on obtiendrait en changeant les signes des racines de l'équation donnée ; donc, si on appelle x l'inconnue de l'équation donnée, et y celle de l'équation transformée, on devra avoir $x = -y$. Ainsi il faut remplacer x par $-y$ dans l'équation donnée. Il est clair, en effet, que si une quantité a est racine de l'une des deux équations, la quantité $-a$ sera racine de l'autre.

Soit l'équation donnée

[A] $$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{etc.} = 0.$$

Après la substitution, les coefficients seront évidemment les mêmes, avec cette seule différence que ceux des puissances impaires de l'inconnue auront des signes contraires. Si m est pair, le premier terme de la nouvelle équation sera donc y^m, et si m est impair, il sera $-y^m$. Mais comme il est permis de changer tous les signes de l'équation, on peut dans ce dernier cas rendre le premier terme égal à y^m, et alors ce seront les coefficients des puissances paires qui prendront des signes contraires.

Par exemple, si l'équation est $x^3-5x^2-5x+1=0$, la transformée qui aura les mêmes racines, mais de signes contraires, sera $x^3+5x^2-5x-1=0$.

398. Question II. *Former l'équation dont les racines soient réciproques de celles d'une équation donnée*

$$[A] \qquad x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots.+Tx+U=0.$$

Deux quantités dont le produit est 1 sont *réciproques* l'une de l'autre. Ainsi, la transformée aura pour racines $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$,.... si celles de la proposée [A] sont a, b, c,...; par conséquent il suffira de changer dans [A] x en $\frac{1}{x}$. Par là il vient

$$\frac{1}{x^m}+\frac{P}{x^{m-1}}+\frac{Q}{x^{m-2}}\ldots+\frac{T}{x}+U=0,$$

ou bien, en multipliant par x^m, divisant par U, et renversant l'ordre des termes,

$$x^m+\frac{T}{U}x^{m-1}\ldots+\frac{Q}{U}x^2+\frac{P}{U}x+\frac{1}{U}=0.$$

399. Question III. *Multiplier par une quantité quelconque* k *les racines d'une équation donnée*

$$[A] \qquad x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0.$$

L'énoncé exige que les racines de la transformée soient les produits qu'on obtiendrait en multipliant par k toutes les racines de l'éq. [A]. Ainsi, y étant la nouvelle inconnue, on aura $y=kx$ ou $x=\frac{y}{k}$; et par suite l'éq. [A] se change en celle-ci :

$$\frac{y^m}{k^m}+\frac{Py^{m-1}}{k^{m-1}}+\frac{Qy^{m-2}}{k^{m-2}}\ldots+\frac{Ty}{k}+U=0.$$

Il est bien évident que la substitution de ka, au lieu de y dans cette équation, donne le même résultat que la substitution de a au lieu de x dans l'éq. [A]; de sorte que a ne peut pas être une racine de l'éq. en x sans que ka en soit une de l'éq. en y.

On multiplie par k^m tous les termes de cette transformée et on l'écrit ainsi :

$$[B] \qquad y^m + Pky^{m-1} + Qk^2y^{m-2} \ldots + Tk^{m-1}y + Uk^m = 0.$$

Alors on voit que ses coefficients peuvent se déduire de ceux de la proposée [A], en multipliant ces derniers respectivement par k^0, k^1, k^2, ... k^m, de telle sorte que dans chaque terme de la nouvelle équation la somme des exposants de k et y soit égale à m.

La transformation précédente comprend celle qui se proposerait de diviser les racines par un nombre k : car celle-ci revient à multiplier les racines par $\frac{1}{k}$, et par conséquent à diviser les coefficients de l'équation donnée par k^0, k^1, k^2, ...

400. Question IV. *Transformer une équation, qui a des coefficients fractionnaires, en une autre qui n'ait plus de dénominateurs, et dont le premier terme ait toujours l'unité pour coefficient.*

Laissant la quantité k tout à fait indéterminée, faisons $kx = y$, et effectuons la transformation du numéro précédent. Les coefficients P, Q, etc. étant fractionnaires, formons un nombre N qui soit divisible par chaque dénominateur, et prenons $k = N$. Il est clair que dans l'éq. [B] les coefficients Pk, Qk^2, ... deviendront entiers. Ainsi, on résout la question *en multipliant les racines de l'équation donnée* [A] *par un nombre* N, *qui soit divisible par chacun des dénominateurs.*

Quelquefois on peut prendre pour multiplicateur un nombre moindre. Par exemple, soit l'équation

$$x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{4} - \frac{2}{9} = 0.$$

En multipliant ses racines par k, la transformée sera

$$y^3 - \frac{3ky^2}{2} + \frac{5k^2y}{4} - \frac{2k^3}{9} = 0,$$

et les dénominateurs disparaîtront si on prend $k = 4 \times 9$; mais il suffira de prendre $k = 2 \times 3$. En effet, il vient

$$y^3 - 9y^2 + 45y - 48 = 0.$$

401. QUESTION V. *Augmenter ou diminuer d'une quantité* k *les racines d'une équation donnée.*

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0.$$

Posons $x = k + y$, on aura $y = x - k$; par conséquent, en substituant $y + k$ au lieu de x, on aura une transformée dont les racines seront celles de [A] diminuées de k. Pour qu'elles fussent augmentées de k il faudrait changer partout k en $-k$.

Représentons le 1[er] membre par $f(x)$ et substituons-y $k + y$ au lieu de x, il viendra d'abord $f(k + y) = 0$; puis, si on ordonne cette transformée suivant les puissances ascendantes de y, la formule de TAYLOR (**222**) donnera

$$[C] \qquad f(k) + \frac{f'(k)}{1} y + \frac{f''(k)}{1.2} y^2 \ldots + y^m = 0.$$

La composition de $f(k)$ est connue, c'est le polynome $f(x)$ où x est remplacé par k ; et quant à $f'(k)$, $f''(k)$, etc. ce sont les fonctions dérivées de $f(x)$ où l'on a fait la même substitution. Ainsi l'on a

$$f(k) = k^m + Pk^{m-1} + Qk^{m-2} \ldots + Tk + U,$$
$$f'(k) = mk^{m-1} + (m-1)Pk^{m-2} + (m-2)Qk^{m-3} \ldots + T,$$
$$f''(k) = m(m-1)k^{m-2} + (m-1)(m-2)Pk^{m-3} + (m-2)(m-3)Qk^{m-4} + \ldots,$$
etc.

Par exemple, soit l'équation $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0$. On aura

$$f(k) = k^3 - 2k^2 - 4k + 5, \quad f'(k) = 3k^2 - 4k - 4, \quad f''(k) = 6k - 4, \quad f'''(k) = 6;$$

par suite, en ayant soin de diviser $f''(k)$ par 2, et $f'''(k)$ par 2.3, la transformée sera

$$(k^3 - 2k^2 - 4k + 5 + (3k^2 - 4k - 4)y + (3k - 2)y^2 + y^3 = 0.$$

402. QUESTION VI. *Transformer une équation en une autre qui manque d'un certain terme.*

Soit toujours l'équation

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0 :$$

faisons $x = y + k$, y étant une nouvelle inconnue, et k une indéterminée dont on peut disposer à volonté. Par cette substitution, on obtient l'équation désignée plus haut par [C]. Mais ici j'ordon-

nerai cette transformée en commençant par les plus hautes puissances de y, et elle sera

$$\left.\begin{array}{l|l|l} y^m + mk & y^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{2}k^2 & y^{m-2}\ldots\ldots \\ +\mathrm{P} & \quad + (m-1)\,\mathrm{P}k & \ldots\ldots\ldots \\ & \quad + \qquad\qquad \mathrm{Q} & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Si on veut que le second terme disparaisse, il faut déterminer k par l'équation

$$mk + \mathrm{P} = 0, \quad \text{d'où} \quad k = -\frac{\mathrm{P}}{m};$$

et alors la valeur $x = y + k$ devient $x = y - \dfrac{\mathrm{P}}{m}$. Donc *on fait évanouir le second terme d'une équation en substituant à l'inconnue de cette équation, une nouvelle inconnue, à laquelle on ajoute le coefficient du second terme de l'équation, pris avec un signe contraire et divisé par le degré de l'équation.*

Le 3ᵉ terme disparaît en posant

$$\tfrac{1}{2}m(m-1)k^2 + (m-1)\mathrm{P}k + \mathrm{Q} = 0.$$

De là on tire en général deux valeurs pour k; par conséquent il existe deux substitutions différentes pour transformer une équation en une autre qui n'ait plus de 3ᵉ terme.

L'évanouissement du 4ᵉ terme dépend d'une équation du 3ᵉ degré; ainsi de suite jusqu'au dernier, qui ne disparaît qu'en déterminant k par une équation toute semblable à la proposée, savoir :

$$k^m + \mathrm{P}k^{m-1} + \mathrm{Q}k^{m-2}\ldots + \mathrm{T}k + \mathrm{U} = 0.$$

Cette ressemblance est facile à expliquer. Égaler à zéro le dernier terme de l'équation en y, c'est supposer qu'une des valeurs de y est nulle : car, lorsque cette équation n'a plus de dernier terme, elle se vérifie en faisant $y = 0$. Par suite la relation $x = y + k$ devient $x = k$; donc on doit prendre pour k une quelconque des valeurs de x; donc k doit être déterminé par la même équation que x.

403. *Remarques.* Lorsque l'on fait évanouir un terme, il se peut qu'un ou plusieurs autres disparaissent en même temps; mais il faut pour cela qu'il y ait entre les coefficients de l'équation donnée quelques relations particulières. Supposons, par exemple, qu'on demande celle qui doit exister pour que le second terme et le troisième disparaissent ensemble. Il faudra qu'on ait à la fois

$$mk + \mathrm{P} = 0, \quad \tfrac{1}{2}m(m-1)k^2 + (m-1)\mathrm{P}k + \mathrm{Q} = 0.$$

Or, la première équation donne $k = -\frac{P}{m}$, il faut donc que cette valeur satisfasse à la seconde, ce qui donne

$$\frac{m(m-1)P^2}{2m^2} - \frac{(m-1)P^2}{m} + Q = 0,$$

ou, réductions faites,

$$Q - \frac{(m-1)P^2}{2m} = 0 :$$

telle serait la condition cherchée. Si de là on tire la valeur de Q pour la porter dans l'équation [A] on aura la forme générale des équations dont le second et le troisième terme doivent disparaître en même temps.

404. Il ne faut pas croire qu'on puisse, par des transformations successives, faire évanouir d'abord un terme, puis un second, puis un troisième, etc. : car chaque opération ferait reparaître le terme anéanti par la précédente. Soit en effet une équation

$$x^m + Qx^{m-2} + \text{etc.} = 0,$$

qui manque déjà de second terme. La substitution de $y+k$ au lieu de x donne

$$(y+k)^m + Q(y+k)^{m-2} + \text{etc.} = 0,$$

ou, en développant,

$$y^m + mky^{m-1} + [\tfrac{1}{2}m(m-1)k^2 + Q)\,y^{m-2} + \text{etc.} = 0.$$

On voit que la valeur de k qui anéantirait le terme en y^{m-2} serait différente de zéro, et que par suite y^{m-1} reparaîtrait.

405. Souvent la composition des équations met en évidence le succès des transformations. Supposons que l'éq. [A] décomposée en facteurs soit

[1] $$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots = 0.$$

Si on remplace x par $-x$, et si on change les signes de tous les facteurs, ce qui est permis, il vient $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots = 0$; et il est évident, à la seule inspection de cette équation, que ses racines sont égales à celles de la proposée, mais de signes contraires : c'est la transformation du n° **397**.

Le changement de x en $\frac{1}{x}$ dans l'équation [1] donne

$$\left(\frac{1}{x}-a\right)\left(\frac{1}{x}-b\right)\left(\frac{1}{x}-c\right)\ldots = 0.$$

On peut multiplier les facteurs respectivement par $\frac{x}{a}, \frac{x}{b}, \frac{x}{c},\ldots$ et changer ensuite le signe de chacun. De cette manière il vient $\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{b}\right)\left(x-\frac{1}{c}\right)\ldots=0$, équation qui a évidemment pour racines $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c},\ldots$ ainsi que l'exige la question II.

Faisons $x=\frac{y}{k}$, et ensuite multiplions chaque facteur par k, ce qui revient à multiplier toute l'équation par k^m : on trouve $(y-ka)(y-kb)(y-kc)\ldots=0$, équation dont les racines sont ka, kb, kc,.... Cette transformation est celle du n° **399**.

Faisons, comme au n° **401**, $x=y+k$: l'équation [1] devient

$$(y+k-a)(y+k-b)(y+k-c)\ldots=0;$$

et celle-ci a évidemment pour racines $a-k$, $b-k$, $c-k$,... c'est-à-dire les racines de la proposée, chacune diminuée de k.

Lorsque, pour faire évanouir le deuxième terme de l'éq. [A], on fait $x=y-\frac{\mathrm{P}}{m}$, les racines de la transformée sont

$$a+\frac{\mathrm{P}}{m},\quad b+\frac{\mathrm{P}}{m},\quad c+\frac{\mathrm{P}}{m},\ldots;$$

donc (**392**), puisque $a+b+c\ldots=-\mathrm{P}$, leur somme sera

$$a+b+c\ldots+\frac{m\mathrm{P}}{m}=-\mathrm{P}+\mathrm{P}=0:$$

c'est-à-dire que l'équation en y n'aura point de second terme, ce qui est en effet le but de la transformation.

406. Dans les questions que nous avons traitées, il y avait entre l'inconnue primitive x et la nouvelle inconnue y une relation fort simple : mais quelle que soit cette relation, la marche à suivre sera toujours la même. Ainsi, on exprimera d'abord cette relation par une équation, puis on en tirera la valeur de x en y, puis enfin on substituera cette valeur dans l'équation proposée.

Il pourrait se faire que l'équation de relation entre x et y fût trop compliquée pour être résolue par rapport à x. Alors il faudra éliminer x entre cette équation et la proposée, par les méthodes qui seront exposées plus tard.

Recherches des diviseurs des équations.

407. La résolution des équations serait complète si l'on pouvait toujours, lorsqu'une équation est donnée, déterminer un diviseur de cette équation : car alors on descendrait par des réductions successives jusqu'à des équations du 1er degré. En effet, soit

$$X = 0$$

l'équation proposée, Y un diviseur de X, et Z le quotient, cette équation se changera en

$$YZ = 0.$$

Or, pour satisfaire à celle-ci, il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit zéro ; ainsi on aurait à résoudre séparément les deux équations

$$Y = 0, \quad Z = 0,$$

qui sont de degré moindre que X. Semblablement chacune d'elles se décomposerait en deux autres, et ainsi de suite, de sorte que la résolution de l'équation $X = 0$ finirait par s'abaisser à des équations du 1er degré. Malheureusement, on verra tout à l'heure qu'en général la recherche des diviseurs est un problème au moins aussi difficile que la résolution de l'équation proposée elle-même.

Quand on parle des diviseurs d'une équation $X = 0$, il faut toujours, pour donner plus de précision au langage, entendre que cette équation est ramenée à la forme ordinaire

$$[a] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{etc.} = 0,$$

et que les diviseurs sont aussi des polynomes en x, ayant tous, comme X, l'unité pour coefficient du 1er terme. Alors, tout diviseur d'un degré supérieur au premier ne pourra être qu'un produit de quelques-uns des facteurs simples de l'équation : autrement, il y aurait plusieurs manières de la décomposer en facteurs premiers, ce qui est impossible.

De là il suit que l'équation doit avoir autant de diviseurs du 2e degré, du 3e, etc., qu'on peut former de produits en multipliant 2 à 2, 3 à 3, etc. ses m facteurs simples. Ainsi (**209**),

le nombre des diviseurs du 2e degré $= \dfrac{m(m-1)}{2}$,

le nombre des diviseurs du 3e degré $= \dfrac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$.

etc.

408. Expliquons maintenant comment on procède à la recherche de ces diviseurs. Supposons qu'on demande ceux du 2e degré.

Ils doivent tous être de la forme x^2+px+q, et les coefficients p et q doivent être tels qu'on puisse diviser exactement X par x^2+px+q. En conséquence, on effectuera cette division jusqu'à ce qu'on ait un reste de degré moindre que ce diviseur, c'est-à-dire du 1er degré; et alors on remarquera que si p et q avaient des valeurs convenables, les termes en x dans ce reste devraient se détruire entre eux, et les termes sans x se détruire aussi entre eux. Or ce reste sera de la forme $Ax+B$, A et B étant des quantités dans lesquelles entrent les inconnues p et q combinées avec les coefficients de l'équation proposée : il faudra donc poser

$$A=0,\quad B=0;$$

et la résolution de ces équations, si elle était possible, ferait connaître p et q.

Tous les procédés imaginés pour opérer une telle résolution ramènent toujours à résoudre une équation unique qui ne contient plus qu'une seule inconnue, et qu'on nomme *équation finale*. Ces méthodes d'élimination seront expliquées plus loin; mais on peut reconnaître dès à présent à quel degré doit s'élever l'équation finale de laquelle dépend p ou q. En effet, il doit y avoir autant de valeurs pour p ou q que l'équation a de diviseurs du 2e degré; par conséquent chacune de ces quantités, considérée séparément, doit être déterminée par une équation du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$.

Si $m=3$, ce degré $=3$; mais si m surpasse 3, il est $>m$. Ainsi, au delà du 3e degré, pour connaître p ou q, on est conduit à une équation de degré plus élevé que la proposée, et par conséquent plus difficile à résoudre, sauf les cas particuliers.

En général, si on cherche un diviseur du degré n, l'équation finale, de laquelle dépend un coefficient quelconque de ce diviseur, doit s'élever au degré

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{2\;.\;3\;\ldots\ldots\;n}.$$

Quand on suppose $n=1$ ou $n=m-1$, cette formule devient égale à m. Mais si on fait successivement $n=2,\ 3,\ 4\ldots$, elle donne des nombres croissants tant qu'on a $n<m-n+1$, ou, ce qui est la même chose, $n<\frac{1}{2}(m+1)$.

Passé cette limite, elle donnera des nombres décroissants qui

seront, dans un ordre inverse, les mêmes que les précédents. Ainsi, en général, la détermination d'un diviseur de degré supérieur à 1, et inférieur à $m-1$, dépend d'une équation plus élevée que la proposée.

409. La recherche des diviseurs d'une équation peut encore se faire par un procédé qui en général est plus commode, et qui consiste à introduire dans le calcul, comme autant d'inconnues distinctes, les coefficients du quotient aussi bien que ceux du diviseur. Tous ces coefficients sont en nombre m, et on les déterminera d'après la condition que la multiplication du diviseur par le quotient reproduise l'équation proposée terme pour terme.

410. Pour première application, cherchons les diviseurs du 2[e] degré de l'équation du 3[e]; et comme on peut toujours faire évanouir le second terme de cette équation, je supposerai qu'elle soit

$$x^3+Qx+R=0.$$

Conformément à la première méthode (**408**), je diviserai x^3+Qx+R par x^2+px+q.

$$\begin{array}{r|l} x^3+Qx+R & x^2+px+q \\ -x^3-px^2-qx & x-p \\ \hline -px^2+(Q-q)x+R & \\ +px^2+p^2x+pq & \\ \hline (Q-q+p^2)x+R+pq. & \end{array}$$

Parvenu au reste du 1[er] degré, je dois égaler à zéro le multiplicateur de x dans ce reste, ainsi que la partie indépendante de x: l'on a ainsi ces deux équations

$$p^2-q+Q=0,\quad pq+R=0.$$

De la 2[e] on tire $q=-\dfrac{R}{p}$, et par suite la 1[re] devient

$$p^3+Qp+R=0.$$

C'est de celle-ci qu'il faudrait tirer les valeurs de p; et ensuite on calculerait les valeurs correspondantes de q.

Cette équation est toute pareille à la proposée, et cela était facile à prévoir. En effet, chaque diviseur du 2[e] degré devant être le produit de deux diviseurs du 1[er], le coefficient du 2[e] terme de ce diviseur est la somme de deux racines de l'équation proposée, chacune prise avec un signe contraire. Or, cette équation manquant de deuxième terme, la somme de ses trois racines est zéro;

donc la somme de deux quelconques d'entre elles, prises avec des signes contraires, est égale à la troisième; donc les valeurs de p ne sont autres que les racines mêmes de l'équation proposée.

411. Pour seconde application, cherchons encore les diviseurs du 2e degré de l'équation du 4e,

$$x^4 + Qx^2 + Rx + S = 0.$$

En suivant le procédé du n° **409**, on posera

$$(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q') = x^4 + Qx^2 + Rx + S;$$

et, après avoir effectué la multiplication, on égalera entre eux les multiplicateurs des puissances semblables de x. On a ainsi, pour déterminer les inconnues p, q, p', q', ces quatre équations

$$p + p' = 0,\quad q + q' + pp' = Q,\quad p'q + pq' = R,\quad qq' = S.$$

Les trois premières donnent

$$p' = -p,\quad q = \frac{p^3 + Qp - R}{2p},\quad q' = \frac{p^3 + Qp + R}{2p};$$

et par suite la quatrième équation devient

$$\frac{(p^3 + Qp - R)(p^3 + Qp + R)}{4p^2} = S,$$

ou bien, toutes réductions faites,

$$p^6 + 2Qp^4 + (Q^2 - 4S)p^2 - R^2 = 0.$$

Cette équation est du 6e degré; mais comme elle ne contient que des puissances paires de p, on peut prendre p^2 pour inconnue, et elle ne sera plus que du 3e. Si on pouvait en tirer les trois valeurs de p^2, elles feraient connaître pour p six valeurs, égales deux à deux et de signes contraires; et ensuite on calculerait facilement les valeurs correspondantes de p', q et q'.

Il suffit de connaître une seule valeur de p pour qu'on puisse résoudre l'équation du 4e degré : car alors elle se décomposera en deux équations du 2e degré, dont les racines seront celles de la proposée. C'est ainsi que Descartes a ramené le 4e degré au 3e; mais ce procédé reste sans succès dans les degrés supérieurs.

La seule inspection de l'équation en p a suffi pour juger qu'elle doit s'abaisser au 3e degré, et il semble que ce ne soit là qu'un résultat heureux et tout à fait inattendu. Cependant rien n'était plus facile à prévoir. En effet, si on désigne par a, b, c, d, les quatre racines de l'équation proposée, les valeurs de p devront être

$$-a-b,\quad -a-c,\quad -a-d,\quad -b-c,\quad -b-d,\quad -c-d.$$

Or, cette équation n'ayant plus de 2e terme, on a $a+b+c+d=0$; donc les trois dernières valeurs de p sont égales et de signes contraires aux trois précédentes; donc l'éq. en p ne doit contenir que des puissances paires de p.

412. Je ne quitterai point ce sujet sans donner un dernier exemple de la facilité avec laquelle la composition des équations fait prévoir certaines particularités du calcul.

Prenons l'équation complète du 4e degré,

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0;$$

et représentons toujours par x^2+px+q un quelconque de ses diviseurs du 2e degré. Ici la somme des racines $a+b+c+d=-P$, et les six valeurs de p ne seront plus égales deux à deux et de signes contraires; mais ce qu'il y a de très-remarquable, c'est que si on cherche l'éq. en p et si on en fait évanouir le 2e terme au moyen de la règle connue (**402**), les autres puissances impaires de l'inconnue devront aussi disparaître.

Pour le démontrer, remarquons encore qu'en appelant a, b, c, d, les quatre racines de l'éq. en x, les six valeurs de p sont

$$-a-b,\quad -a-c,\quad -a-d,\quad -b-c,\quad -b-d,\quad -c-d;$$

donc, si on représente l'équation en p par $p^6+P'p^5+\text{etc.}=0$, le coefficient P' sera la somme de ces six quantités prises avec des signes contraires, et l'on aura

$$P'=3(a+b+c+d).$$

Pour faire disparaître le second terme de l'éq. en p, il faut prendre une nouvelle inconnue p' et poser $p=p'-\frac{1}{6}P'$. De cette relation on tire

$$p'=p+\tfrac{1}{6}P';$$

donc en remplaçant, dans cette expression, p par ses six valeurs, et P' par $3(a+b+c+d)$, on aura les six valeurs de p':

$$\begin{aligned}
p' &= -a-b+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-a-b+c+d),\\
p' &= -a-c+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-a-c+b+d),\\
p' &= -a-d+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-a-d+b+c),\\
p' &= -b-c+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-b-c+a+d),\\
p' &= -b-d+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-b-d+a+c),\\
p' &= -c-d+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-c-d+a+b).
\end{aligned}$$

Alors on voit clairement que les trois dernières sont égales et de

signes contraires aux trois premières; donc l'éq. en p' ne devra renfermer que les puissances paires de p'.

Théorie des racines égales.

415. Quand une équation est divisible par une puissance de $x - a$, elle a autant de racines égales à a qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance, et alors cette racine est dite double, triple, quadruple, etc., selon que l'exposant de la puissance est 2, 3, 4, etc. La recherche des racines égales revient donc à celle de diviseurs tels que $(x-a)^2$, $(x-a)^3$, etc., et sous ce rapport, on pourrait la comprendre dans celle des diviseurs en général. Mais comme elle constitue à elle seule un point essentiel de la théorie des équations, je dois ici la traiter d'une manière spéciale.

Soit l'équation

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0,$$

dont je désignerai le 1er membre indifféremment par X et par $f(x)$. Quand elle a des racines égales à a, il est clair qu'après l'avoir divisée par $x - a$, l'équation résultante doit se vérifier encore en y faisant $x = a$. Or, en introduisant cette hypothèse dans le quotient rapporté n° **390**, il devient

$$ma^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3} \ldots + T,$$

et ce résultat est le même qu'on obtiendrait en substituant a au lieu de x dans le polynome

$$mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + (m-2)Qx^{m-3} \ldots + T;$$

donc ce polynome doit s'évanouir par cette substitution; donc il est divisible par $x - a$. Or il n'est autre que le polynome dérivé qui se désigne par $f'(x)$; donc le facteur $x - a$ est commun à $f(x)$ et à $f'(x)$.

Réciproquement, si $x - a$ est facteur commun à ces deux polynomes, on sera sûr que l'éq. $f(x) = 0$ a des racines égales à a; car alors il est évident que la substitution de a au lieu de x fait évanouir à la fois $f(x)$ et le quotient de $f(x)$ par $x - a$.

Ce qui précède montre bien que le plus grand diviseur commun de $f(x)$ avec $f'(x)$ ne doit contenir que les facteurs égaux de $f(x)$, mais on ne voit point à quels degrés ils s'y trouvent. Quoiqu'il soit facile d'y parvenir par les considérations dont je viens

de faire usage, je préfère reprendre en entier la théorie des racines égales par un procédé qui me paraît plus simple.

414. Considérons d'une manière générale les polynomes dérivés de $f(x)$, et montrons comment ils sont composés avec les facteurs de $f(x)$. D'abord, par la formule de Taylor (**222**), on a

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1}h+\frac{f''(x)}{1.2}h^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}h^3+\text{etc.}$$

Maintenant soit $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$: en changeant x en $x+h$ ou $h+x$, on aura

$$f(x+h)=(h+\overline{x-a})(h+\overline{x-b})(h+\overline{x-c})\ldots.$$

On peut donc regarder $f(x+h)$ comme un produit de m binomes, qui ont h pour premier terme, et dont les seconds termes sont $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc. Par suite, les règles connues (**212**) détermineront la composition des multiplicateurs des diverses puissances de h. Ainsi, la partie indépendante de h sera égale au produit des m facteurs $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$; la quantité qui multiplie h sera égale à la somme des produits de ces facteurs multipliés $m-1$ à $m-1$; etc. On vient de voir que ces mêmes quantités sont représentées par $f(x)$, $\frac{f'(x)}{1}$, $\frac{f''(x)}{1.2}$, etc., de sorte que la composition des polynomes dérivés se trouve mise en évidence.

Si l'on se borne au seul polynome $f'(x)$, on pourra donc dire qu'un polynome du degré m étant donné, son polynome dérivé est égal à la somme des produits de ses facteurs simples combinés $m-1$ à $m-1$; et comme ces produits peuvent s'obtenir en divisant successivement $f(x)$ par chacun des m facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$,.... on aura encore

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}+\text{etc.}$$

Cela posé, admettons que l'éq. $f(x)=0$ ait des racines égales, ou, ce qui est la même chose, que $f(x)$ renferme des facteurs élevés à des puissances; et soit

$$f(x)=(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)(x-d)\ldots.$$

On ne prend ici que deux facteurs élevés à des puissances; s'il y en avait davantage, le raisonnement ne changerait pas.

On vient de démontrer que le polynome $f'(x)$ est égal à la somme des quotients qu'on obtiendra en divisant successivement $f(x)$ par

chacun de ses m facteurs simples; donc, puisque n facteurs sont égaux à $x-a$, et n' égaux à $x-b$, on aura

$$f'(x)=\begin{cases} n(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'}(x-c)(x-d)\ldots\ldots \\ +n'(x-a)^{n}(x-b)^{n'-1}(x-c)(x-d)\ldots\ldots \\ +(x-a)^{n}(x-b)^{n'}(x-d)\ldots\ldots \\ +(x-a)^{n}(x-b)^{n'}(x-c)\ldots\ldots \\ +\text{etc.} \end{cases}$$

Mettons en évidence les facteurs communs aux différentes parties du second membre; et, pour abréger, posons

$$\mathrm{H}=\begin{cases} n(x-b)(x-c)(x-d)\ldots+n'(x-a)(x-c)(x-d)\ldots \\ +(x-a)(x-b)(x-d)\ldots+(x-a)(x-b)(x-c)\ldots+\text{etc.}: \end{cases}$$

on aura

$$f'(x)=(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}\mathrm{H}.$$

Par là on voit que le produit $(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}$ divise à la fois les deux polynomes $f(x)$ et $f'(x)$; je dis en outre qu'il est leur plus grand diviseur commun. Pour qu'il en fût autrement, il faudrait au moins qu'un des facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc., qui sont dans $f(x)$, pût diviser H : or, $x-a$ manque dans la première partie de H et se trouve dans toutes les autres, $x-b$ manque dans la seconde et se trouve dans toutes les autres, ainsi du reste; donc aucun des facteurs de $f(x)$ n'appartient à H.

Si les exposants n et n' étaient égaux à 1, l'éq. $f(x)=0$ n'aurait que des racines inégales. Alors $f'(x)$ se réduirait à H, et le raisonnement précédent prouverait qu'il n'existe aucun facteur commun entre $f(x)$ et $f'(x)$.

Donc, *pour qu'une équation* f(x) = 0 *ait des racines égales, il faut et il suffit que le premier membre et son polynome dérivé aient un diviseur commun; et si on cherche leur plus grand diviseur commun, on aura le produit des facteurs égaux de* f(x), *élevés chacun à une puissance moindre d'une unité.*

415. Telle est la proposition fondamentale sur laquelle repose la recherche des racines égales : je vais la démontrer encore d'une autre manière. Dans la formule de Taylor, telle qu'elle est écrite n° **222**, mettons-y a au lieu de x, et $x-a$ au lieu de h : par là $x+h$ deviendra x; donc $f(x+h)$ deviendra $f(x)$, et l'on aura

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}(x-a)^n+\text{etc.}$$

De cette manière le polynome $f(x)$ est transformé en une suite ordonnée suivant les puissances de $x-a$, et c'est sur cette transformation que repose la nouvelle démonstration.

Si a est racine de l'éq. $f(x)=0$, on a $f(a)=0$; donc $f(x)$ contient le facteur $x-a$ dans toutes ses parties; donc $f(x)$ est divisible par $x-a$: c'est ce qu'on savait déjà. Si a est une racine simple, on est certain que $f'(a)$ ne sera pas zéro, ou, ce qui est la même chose, que $x-a$ ne sera pas facteur dans $f'(x)$: en effet, si cela était, $f(x)$ contiendrait le diviseur $(x-a)^2$, et dès lors a serait au moins racine double.

Maintenant, supposons que l'éq. $f(x)=0$ ait n racines égales à a, ou, en d'autres termes, que $(x-a)^n$ soit la plus haute puissance de $x-a$ qui soit facteur dans $f(x)$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut, dans le développement ci-dessus, que toutes les parties où $x-a$ se trouve à un exposant moindre, soient nulles d'elles-mêmes; donc, on doit avoir $f(a)=0$, $f'(a)=0$, $f''(a)=0, \ldots$ $\ldots f^{(n-1)}(a)=0$; et remarquez bien que $f^n(a)$ n'est pas zéro, autrement $f(x)$ serait divisible par $(x-a)^{n+1}$, ce qui est contre la supposition.

Il suit de là que si on pose les équations

$$f(x)=0, \quad f'(x)=0, \quad f''(x)=0, \quad \ldots . f^{(n-1)}(x)=0,$$

elles auront toutes la racine a, et, par conséquent, leurs premiers membres seront tous divisibles par $x-a$.

Par hypothèse $f(x)$ contient le facteur $x-a$ à la puissance n: je vais faire voir que $f'(x)$ le contient à la puissance $n-1$. Faisons pour $f'(x)$ la transformation faite plus haut pour $f(x)$: on aura

$$f'(x)=f'(a)+\frac{f''(a)}{1}(x-a)+\frac{f'''(a)}{1.2}(x-a)^2 \ldots .$$
$$\ldots . +\frac{f^{(n)}(a)}{1.2 \ldots(n-1)}(x-a)^{n-1}+\text{etc.}$$

Plus haut on a démontré que $f'(a)=0$, $f''(a)=0$, $\ldots . f^{(n-1)}(a)=0$, et que $f^{(n)}(a)$ n'est pas zéro; donc, dans le 2[e] membre ci-dessus, les parties qui précèdent $(x-a)^{n-1}$ sont zéro; donc le 1[er] nombre $f'(x)$ est divisible par $(x-a)^{n-1}$, et ne l'est point par une puissance plus élevée de $x-a$.

On pourrait prouver semblablement, si cela pouvait être utile, que $f''(x)$ est divisible par $(x-a)^{n-2}$, $f'''(x)$ par $(x-a)^{n-3}, \ldots$ et enfin $f^{(n-1)}(x)$ par $x-a$.

Ce qui a été dit de $(x-a)^n$ s'applique à tout autre facteur qui se trouve élevé à une puissance dans $f(x)$. Ainsi, en admettant que $f(x)$ contienne aussi le facteur $(x-b)^{n'}$, le polynome dérivé $f'(x)$ contiendra aussi $(x-b)^{n'-1}$. Comme d'ailleurs on a fait voir que les facteurs simples de $f(x)$ ne peuvent pas se trouver dans $f'(x)$, on conclut de nouveau, ainsi qu'on l'a fait à la fin du n° précédent, que *les facteurs égaux de* f(x) *sont aussi facteurs dans* f'(x), *et que le plus grand commun diviseur de ces polynomes est le produit des facteurs égaux de* f(x), *élevés chacun à une puissance moindre d'une unité.*

416. Développons les conséquences qui découlent de cette proposition. Quelle que soit l'équation donnée $X=0$, désignons par X' le polynome dérivé de X, et par D le plus grand commun diviseur de X et de X'. On est sûr que D est le produit des facteurs égaux de X, pris chacun une fois de moins, c'est-à-dire que les facteurs doubles y sont à la 1re puissance, les facteurs triples à la 2e, etc. Si D est numérique, c'est que l'équation n'a point de racines égales.

Cherchons de même le plus grand diviseur commun E entre le polynome D et son dérivé. Il devra être le produit des facteurs multiples de D, à une puissance moindre d'une unité : de sorte qu'il contiendra les facteurs triples de X à la 1re puissance, les quadruples à la 2e, etc. Si E est un nombre, il n'y aura pas dans $X=0$ de facteur dont le degré surpasse 2.

Cherchons encore le plus grand diviseur commun F entre le polynome E et son dérivé. Supposons que F contienne encore l'inconnue x, mais qu'il n'en soit plus ainsi du commun diviseur de F et de son dérivé. Alors on sera sûr que dans X les facteurs de l'ordre le plus élevé sont ceux du 4e, et que F est le produit de ces facteurs abaissés au 1er degré.

Désignons séparément par X_1, X_2, X_3, X_4, les produits des facteurs de chaque degré de multiplicité, mais chacun pris une seule fois, savoir : par X_1 le produit des facteurs simples, par X_2 celui des facteurs doubles, par X_3 celui des facteurs triples, par X_4 celui des facteurs quadruples. On aura

$$X=X_1X_2^2X_3^3X_4^4,\quad D=X_2X_3^2X_4^3,\quad E=X_3X_4^2,\quad F=X_4.$$

De là, en divisant chaque égalité par la suivante, on tire

$$\frac{X}{D}=X_1X_2X_3X_4,\quad \frac{D}{E}=X_2X_3X_4,\quad \frac{E}{F}=X_3X_4,\quad F=X_4,$$

puis, en divisant chacune de celles-ci par la suivante

$$\frac{XE}{D^2} = X_1, \quad \frac{DF}{E^2} = X_2, \quad \frac{E}{F^2} = X_3, \quad F = X_4.$$

Ainsi on voit qu'on pourra toujours trouver X_1, X_2, X_3, X_4, et par conséquent ramener la résolution de l'équation $X=0$ à celle des équations partielles

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0,$$

qui contiennent isolément les racines de chaque ordre de multiplicité, mais chacune prise une seule fois. Lorsqu'une des quantités X_1, X_2, X_3,... sera égale à un nombre, on sera averti par là que les racines dont l'ordre de multiplicité répond à cette quantité manquent dans l'équation $X=0$.

417. Appliquons ce qui précède à l'équation

$$x^7 - x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Ici on a

$$X = x^7 - x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 2x + 2,$$
$$X' = 7x^6 - 6x^5 - 20x^4 + 16x^3 + 15x^2 - 10x - 2;$$

et, en cherchant le plus grand commun diviseur de X et X′ on trouve $D = x^3 - x^2 - x + 1$: par là on est déjà certain que l'équation a des racines égales.

On cherche de même le plus grand diviseur commun E, entre le polynome D et son dérivé $D' = 3x^2 - 2x - 1$. On trouve $E = x - 1$; et par là on est sûr que l'équation a des racines triples. Puisque E est du 1er degré, elle n'en admet point d'un degré de multiplicité supérieur au 3e.

En conservant à X_1, X_2, X_3, le même sens que tout à l'heure, on aura donc

$$X_1X_2^2X_3^3 = X = x^7 - x^6 - 4x^5 + \text{etc.},$$
$$X_2X_3^2 = D = x^3 - x^2 - x + 1,$$
$$X_3 = E = x - 1.$$

En divisant la 1re égalité par la 2e, et la 2e par la 3e, il vient

$$X_1X_2X_3 = x^4 - 3x^2 + 2,$$
$$X_2X_3 = x^2 - 1.$$
$$X_5 = x - 1.$$

Puis, en traitant encore ces égalités de la même manière, on a

$$X_1 = x^2 - 2, \quad X_2 = x + 1, \quad X^3 = x - 1.$$

L'équation peut donc s'écrire ainsi $(x^2-2)(x+1)^2(x-1)^3=0$; et par suite elle se partage en celles-ci, $x^2-2=0$, $x+1=0$, $x-1=0$.

On en tire $x=\pm\sqrt{2}$, $x=-1$, $x=1$: donc, enfin l'équation proposée est entièrement résolue. $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont deux racines simples, -1 est une racine double, $+1$ est une racine triple.

418. Quelquefois on veut décomposer une équation $X=0$, qui a des racines égales, en deux équations dont l'une renferme les racines inégales, et l'autre, les racines égales, mais chacune une fois seulement. Voici une manière d'y parvenir. Après avoir trouvé le plus grand commun diviseur Y entre X et X', on cherchera le quotient de X par Y; et ce quotient que je nommerai Z, sera le produit de tous les facteurs égaux ou inégaux de X, mais pris chacun une seule fois. On cherchera donc le plus grand commun diviseur V entre Z et Y; et V sera le produit des facteurs égaux de X, tous abaissés au 1er degré. Puis on divisera Z par V; et le quotient V_1 sera le produit des facteurs simples. En conséquence, les deux équations demandées seraient $V_1=0$, $V=0$.

CHAPITRE XVII.

DE L'ÉLIMINATION ET DE QUELQUES-UNES DE SES APPLICATIONS.

Forme générale d'une équation à deux inconnues. — Comment on reconnaît que la valeur d'une inconnue convient à deux équations.

419. Lorsqu'une équation algébrique ne contient que des termes entiers et rationnels par rapport aux inconnues, on a déjà dit (**66**) que le degré de cette équation est la somme des exposants des inconnues, dans le terme où cette somme est la plus forte.

L'équation générale du degré m, entre deux inconnues x et y, doit donc renfermer tous les termes où la somme des exposants de x et de y ne surpasse point m. Or, on peut réunir dans le premier membre, sous un seul multiplicateur, tous les termes où l'une des inconnues, x par exemple, est affectée du même exposant, et ordonner ensuite par rapport à x. En conséquence l'équation générale du degré m peut se mettre sous la forme

$$[A] \qquad Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}\ldots+Gx+H=0.$$

Ici A est une quantité qui ne contient point y, autrement le degré de l'équation surpasserait m ; B est un polynome du 1er degré en y de la forme $b + b'y$, dans lequel b et b_1 sont des quantités connues; C est un polynome de la forme $c + c_1y + c_2y^2$; ainsi de suite jusqu'à H, qui représente en général un polynome du degré m, de la forme $h + h_1y + h_2y^2 \dots + h_my^m$.

Lorsqu'une équation est *incomplète,* c'est-à-dire lorsqu'elle ne renferme point tous les termes que comporte son degré, ii faut supposer, dans l'équation générale, que les coefficients des termes manquants sont égaux à zéro.

Comme il est permis de diviser une équation par l'un de ses coefficients, il semble que l'on peut supposer $A = 1$, sans ôter à l'éq. [A] sa généralité : mais alors elle ne comprendrait plus celles qui manquent de premier terme. Par exemple l'équation du 2e degré

$$x^2 + (b + b_1y)x + c + c_1y + c_2y^2 = 0$$

ne pourrait pas donner l'équation particulière

$$(5 + 2y)x + 3 + 2y - 3y^2 = 0.$$

420. Après avoir divisé l'éq. [A] par l'un de ses coefficients, il en reste autant d'indéterminés qu'il y a de termes, moins un, dans l'équation. Ce nombre est donc égal à $2 + 3 + 4 \dots + (m + 1)$, c'est-à-dire à

$$\tfrac{1}{2}m[2 + (m + 1)], \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}m(m + 3).$$

Cette formule indique à combien de conditions données une équation du degré m peut satisfaire au moyen d'une détermination convenable des coefficients. Par exemple, on pourra en général faire en sorte qu'elle admette des solutions données en nombre égal à ces coefficients.

421. C'est ici le lieu d'expliquer comment on reconnaît qu'une valeur attribuée à l'une des inconnues convient à deux équations.

Soient deux équations

$$M = 0, \quad N = 0,$$

entre deux inconnues x et y; et soit β une valeur donnée de y. Si on substitue β au lieu de y dans M et N, les résultats, que je désignerai par M' et N', seront en général fonctions de x. Or, il est évident que la valeur β de y ne convient aux équations données qu'autant qu'il existe au moins une valeur de x propre à rendre nulles en même temps les deux quantités M' et N'; donc ces quantités doivent avoir un commun diviseur fonction de x.

Il est clair, d'ailleurs, que cette condition suffit : car, si D est le commun diviseur, et si on pose $D = 0$, chaque valeur $x = \alpha$, déduite de cette équation, étant substituée dans M′ et N′, rendra ces polynomes égaux à zéro; par conséquent, en faisant à la fois $x = \alpha$ et $y = \beta$ dans M et N, ces quantités s'évanouiront, c'est-à-dire que les équations proposées seront satisfaites.

Donc, en général, *deux équations à deux inconnues étant données, pour qu'une valeur attribuée à l'une des inconnues convienne à ces équations, il est nécessaire et il suffit qu'en la substituant dans ces équations, elle leur fasse acquérir un commun diviseur fonction de l'autre inconnue; et, si l'on égale ce commun diviseur à zéro, on a une équation dont les racines sont les valeurs correspondantes de l'autre inconnue.*

422. Ce principe montre aussi comment s'achève la résolution de deux équations à deux inconnues, lorsqu'on est arrivé, par un moyen quelconque, à une équation $Y = 0$, dont les racines sont les valeurs de y, et qu'on a déterminé toutes ces racines.

Si l'équation $Y = 0$ renferme, outre les vraies valeurs de y, des valeurs étrangères aux équations proposées, on les reconnaîtra à ce qu'elles ne feront point acquérir à ces équations de commun diviseur fonction de x, et on doit les rejeter. Au contraire, si une valeur de y vérifie les proposées, indépendamment de toute valeur de x, il est clair qu'en lui adjoignant telle valeur de x qu'on voudra, les équations seront toujours satisfaites.

423. En général, la résolution de deux équations à deux inconnues consiste à trouver tous les systèmes de valeurs qui, substituées au lieu des inconnues, peuvent satisfaire aux deux équations, et l'on ramène toujours cette détermination à la résolution des équations à une seule inconnue. Pour réduire ainsi la question, il faut donc déduire des équations données une équation où il n'y ait plus qu'une inconnue; et tel est en effet l'objet des méthodes d'élimination. L'on regarde comme parfaites celles qui conduisent à une *équation finale*, ayant pour racines toutes les valeurs de cette inconnue sans complication de valeurs étrangères.

Élimination dans quelques cas fort simples.

424. Lorsqu'on sait résoudre l'une des deux équations par rapport à l'une des inconnues, on pourra éliminer cette inconnue par le procédé déjà expliqué n° 82, et que je vais rappeler ici.

Les deux équations étant représentées par

$$M=0, \quad N=0,$$

supposons qu'on sache tirer de $N=0$ la valeur de x en fonction de y, et qu'on ait

$$x=f(y):$$

on est assuré que cette fonction, substituée au lieu de x dans l'équation $N=0$, rendra N identiquement nul, sans qu'il soit besoin d'attribuer de valeur particulière à y. Mais cette inconnue y doit être telle qu'en mettant $f(y)$ à la place de x dans la première équation, M devienne aussi identiquement nul ; donc il faut prendre pour valeurs de y les racines de l'équation qui résulte de cette substitution.

L'équation ainsi obtenue sera donc l'équation finale en y ; et, si on peut la résoudre, il n'y aura plus, pour avoir les valeurs correspondantes de x, qu'à substituer successivement chaque valeur de y dans la formule $x=f(y)$. Quoique ce procédé soit fort simple, cependant le calcul exige quelquefois des précautions que l'exemple suivant apprendra à ne point négliger.

Soient les équations

$$[1] \qquad 24x^2+20xy+5y^2-84=0,$$

$$[2] \qquad 32x^2-15y^2+28=0.$$

La seconde donne

$$x=\pm\tfrac{1}{8}\sqrt{2(15y^2-28)};$$

et en substituant ces valeurs dans la 1re, on trouve

$$65y^2\pm 10y\sqrt{2(15y^2-28)}-420=0.$$

On ne peut pas résoudre cette équation sans la ramener à une forme rationnelle, et c'est à quoi l'on parviendra en isolant le radical dans un membre et en élevant ensuite les deux membres à la puissance marquée par l'indice du radical. Ce procédé doit être remarqué, parce qu'il est d'un usage presque continuel.

On isole donc le radical, et l'équation devient

$$[\alpha] \qquad \pm 10y\sqrt{2(15y^2-28)}=420-65y^2,$$

puis on élève chaque membre au carré, et l'on trouve, toutes réductions faites,

$$[\beta] \qquad y^4-40y^2+144=0.$$

Cette équation se résout à la manière du 2e degré, et donne

$$y=+2, \quad y=-2, \quad y=+6, \quad y=-6.$$

Pour avoir les valeurs correspondantes de x, il y a une attention à avoir, sans laquelle elles seraient fautives. A cause du signe $\pm$, qui était devant le radical l'équation [β] équivaut à ces deux-ci :

$$[\alpha'] \qquad +10y\sqrt{2(15y^2-28)}=420-65y^2,$$

$$[\alpha''] \qquad -10y\sqrt{2(15y^2-28)}=420-65y^2.$$

Or, si on pouvait résoudre séparément chacune d'elles les valeurs de y tirées de [α'] devraient être substituées dans la formule

$$x=+\tfrac{1}{8}\sqrt{2(15y^2-28)};$$

et les valeurs de y tirées de [α''], dans la formule

$$x=-\tfrac{1}{8}\sqrt{2(15y^2-28)}.$$

Il faut donc distinguer parmi les valeurs de y celles qui appartiennent à chacune des équations [α'] et [α'']. Le moyen le plus simple consiste à les substituer dans ces équations; et l'on reconnaît ainsi que les valeurs $y=+2$, $y=-6$, vérifient [α'], tandis que les deux autres, $y=-2$, $y=+6$, vérifient [α'']. En conséquence, les équations proposées admettent quatre solutions, savoir :

$$\begin{cases}x=+1\\ y=+2,\end{cases}\quad \begin{cases}x=-1\\ y=-2,\end{cases}\quad \begin{cases}x=+4\\ y=-6,\end{cases}\quad \begin{cases}x=-4\\ y=+6.\end{cases}$$

425. Lorsque les deux équations sont du même degré par rapport à l'inconnue qu'on élimine, il convient d'abaisser préalablement l'une d'elles au degré inférieur, au moyen de la soustraction, ainsi qu'on l'a déja fait (nº **194**, Ex. III) pour les équations $x^2+Px+Q=0$, $x^2+P'x+Q'=0$.

Les équations [1] et [2] seront donc mieux traitées en leur appliquant cette observation, puisque l'une d'elles sera remplacée par une équation du 1er degré en x. Toutefois, il faut auparavant rendre le coefficient de x^2 égal dans les deux équations, ce qui se fera en multipliant l'éq. [1] par 4, et l'éq. [2] par 3. Alors, en les retranchant l'une de l'autre, il vient

$$80xy+65y^2-420=0, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{84-13y^2}{16y}.$$

Cette valeur étant portée dans l'éq. [2], on obtient, toutes réductions faites, l'équation finale déjà trouvée $y^4-40y^2+144=0$. Les valeurs de y qu'elle détermine sont $y=+2$, -2, $+6$, -6; et par suite la formule qui exprime x en y donnera pour valeurs correspondantes, $x=+1$, -1, -4, $+4$.

426. Souvent la résolution des équations s'obtient immédiatement en remarquant qu'elles sont décomposables en facteurs. Supposons, par exemple, que deux équations aient été ramenées à celles-ci

$$(x-y)(y^3-x^2-1)=0,$$
$$(x^2+y^3)(y^3+x^2-y)=0.$$

Pour les résoudre, il faut chercher toutes les valeurs de x et de y qui peuvent rendre nuls à la fois un facteur de la 1re et un facteur de la 2e. On a donc à résoudre séparément ces quatre systèmes d'équations.

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y^3=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=0 \\ y^3+x^2-y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y^3-x^2-1=0 \\ x^2+y^3=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y^3-x^2-1=0 \\ y^3+x^2-y=0. \end{cases}$$

Je laisse au lecteur le soin d'effectuer les calculs, et je passe à des considérations plus générales.

Élimination par la méthode du plus grand commun diviseur.

427. On fera subir d'abord aux équations les simplifications qu'on va expliquer. Soient les équations à résoudre

$$M=0, \quad N=0.$$

Ordonnons le polynome M par rapport à y, cherchons le plus grand commun diviseur des multiplicateurs des diverses puissances de y, et divisons M par ce diviseur. Ensuite ordonnons le quotient par rapport à x, cherchons le plus grand commun diviseur des coefficients des diverses puissances de x, et divisons encore le quotient par ce diviseur. Alors nous pourrons décomposer M en trois facteurs, l'un fonction de x, le second fonction de y, le dernier fonction de x et de y. Désignons-les par U, U′, U″, et l'on aura $M=UU'U''$.

On pourra décomposer semblablement le polynome N; et, en nommant V, V′ V″, les trois facteurs, on aura $N=VV'V''$.

Maintenant, il se peut que les facteurs U et V fonctions de x aient un diviseur commun; qu'il en soit de même des facteurs U′ et V′ fonctions de y; et encore de même des facteurs U″ et V″ fonctions de x et y. Désignons ces trois sortes de diviseurs communs par d, d', d''; et l'on décomposera M et N comme il suit :

$$M=dd'd''\times uu'u'', \quad N=dd'd''\times vv'v''.$$

Examinons présentement les diverses manières dont on peut satisfaire aux équations proposées $M=0$, $N=0$. D'abord il est évident qu'on y satisfait en égalant à zéro l'un des facteurs communs d, d', d''. Or, si on pose $d=0$, cette équation ne contiendra qu'une seule inconnue x; et quand on l'aura résolue, on aura un nombre limité de valeurs de x, mais on pourra joindre à chacune d'elles une valeur quelconque de y. Si on pose $d'=0$ on aura un nombre limité de valeurs de y, mais on pourra joindre à chacune d'elles une infinité de valeurs de x. Enfin, si on pose l'équation $d''=0$, comme d'' contient x et y, on pourra donner une valeur arbitraire à l'une de ces inconnues, à x, par exemple, et alors cette équation fera connaître les valeurs correspondantes de y. Ainsi, chacun des facteurs communs d, d', d'', détermine une infinité de solutions.

Les autres manières de satisfaire aux équations proposées consistent à égaler à zéro, en même temps, l'un des facteurs u, u', u'', de la première, et l'un des facteurs v, v', v'', de la seconde. On ne peut pas avoir à la fois $u=0$ et $v=0$, car ces facteurs ne contiennent que x et n'ont plus de facteur commun, de sorte qu'aucune valeur de x ne peut les rendre nuls tous deux ensemble. Par une raison semblable, on ne peut pas avoir en même temps $u'=0$, $v'=0$. De plus, il est clair que si on égale à zéro deux facteurs, dont l'un ne soit fonction que d'une inconnue, il n'y aura, pour résoudre ces deux équations, d'autres difficultés que celles des équations à une seule inconnue.

Mais il n'en sera plus de même si on pose

$$u''=0, \quad v''=0:$$

car chacune de ces équations contient x et y. Il faut une méthode nouvelle pour les ramener à la résolution des équations à une seule inconnue, et c'est cette méthode qu'on va exposer. On doit bien faire attention qu'elles ne renferment plus de facteurs dépendants de x seul ou de y seul; et, en outre, qu'il n'existe entre elles aucun facteur commun fonction de x et y: c'est en cela que consistent les simplifications que j'avais en vue.

428. Pour éviter les accents, supposons que les dernières équations dont on vient de parler, et qu'il s'agit de résoudre, soient représentées par

$$[1] \qquad A=0, \quad B=0.$$

Ayant ordonné ces équations par rapport à x, supposons que cette inconnue soit à un plus haut degré dans A que dans B, ou à un degré égal; divisons A par B et arrêtons l'opération dès qu'on est arrivé à un reste qui ne pourrait plus se diviser sans mettre dans le quotient des dénominateurs fonctions de y. Représentons par R ce reste, et par Q le quotient trouvé; on aura

$$A = BQ + R.$$

De cette égalité on conclut que si certaines valeurs de x et de y rendent nuls A et B, elles doivent donner aussi $R = 0$; donc elles doivent se trouver parmi les solutions des équations

[2] $$B = 0, \quad R = 0.$$

Réciproquement, les valeurs de x et de y qui vérifient ces équations doivent donner $A = 0$, et satisfont par conséquent aux proposées; donc on peut remplacer le système des équations [1] par celui des équations [2].

Pour plus de simplicité, supposons, ce qui n'arrive que dans des cas particuliers, que la division ait conduit, sans placer y dans aucun dénominateur, à un reste de degré moindre, par rapport à x, que le diviseur B. Divisons maintenant B par R, et supposons encore que, sans mettre y en dénominateur, on ait trouvé le reste R'. Les éq. [2] pourront être remplacées par deux autres plus simples encore, savoir:

[3] $$R = 0, \quad R' = 0.$$

Si R' est de degré moindre que R, on divisera à son tour R par R'; et l'on continuera de diviser ainsi chaque reste par le suivant.

En supposant que chaque division nouvelle conduise d'elle-même à un reste de degré moindre en x que le diviseur, sans qu'on soit obligé de mettre au quotient des dénominateurs fonctions de y, on arrivera nécessairement à un reste indépendant de x. Soit R' ce reste: alors les éq. [3] tiendront lieu des proposées; et comme la seconde, $R' = 0$, ne contient qu'une seule inconnue, elle fera connaître les valeurs de cette inconnue; et ensuite la première, $R = 0$, fera trouver les valeurs correspondantes de x.

429. Il n'y aurait rien à ajouter sur la résolution des éq. [1], si les divisions pouvaient toujours se faire avec les conditions énoncées; mais il n'en est ainsi que dans des cas très-particuliers. Cependant, pour que les conséquences trouvées précédemment ne

soient pas infirmées, il faut que les quotients ne contiennent y dans aucun dénominateur.

En effet, reprenons les éq. $A=0$, $B=0$, et supposons que la division de A par B ne puisse point conduire à un reste de degré inférieur à B sans placer y en dénominateur au quotient. En désignant ce quotient par $\frac{H}{K}$, K étant fonction de y, on aurait

$$A=\frac{BH}{K}+R.$$

Si l'on met pour x et pour y des valeurs qui rendent nuls A et B, il peut se faire que K devienne nul aussi : alors $\frac{BH}{K}$ devient $\frac{0}{0}$ et peut avoir une valeur finie ou infinie; et par conséquent R peut lui-même prendre une semblable valeur. Donc on ne peut plus affirmer que toutes les solutions des éq. $A=0$, $B=0$, se trouvent parmi celles du système $B=0$, $R=0$. La réciproque ne serait pas plus vraie, car B et R étant réduits à zéro, K pourrait être aussi réduit à zéro, et dès lors le second membre pourrait n'être point nul; donc A lui-même pourrait n'être pas nul.

On évitera les fractions comme dans la recherche du plus grand commun diviseur. Remarquons d'abord qu'il n'y a plus de facteur commun fonction de y dans les différents termes de B; en sorte que si l'on multiplie le dividende A par le coefficient du premier terme de B, ou bien, lorsque cela suffit, par quelques facteurs de ce coefficient, la division deviendra possible, et aucun facteur commun n'aura été introduit dans A et B. Mais cette multiplication peut ajouter aux équations proposées des solutions étrangères: en effet, si C représente ce multiplicateur fonction de y, Q le quotient, et R le reste, on aura

$$CA=BQ+R;$$

et cette égalité prouve que les solutions des éq. $B=0$, $R=0$, sont les mêmes que celles des éq. $CA=0$, $B=0$. Or, ces dernières équations se partagent en deux systèmes, savoir:

$$[A=0,\ B=0] \quad \text{et} \quad [C=0,\ B=0]:$$

donc, outre les solutions des équations proposées, les éq. $B=0$, $R=0$, feront encore trouver celles des éq. $C=0$, $B=0$. Il faudra donc résoudre ces dernières, dont l'une $C=0$ ne contient que y,

puis substituer les valeurs correspondantes de x et y dans l'éq. $A=0$; et les couples de valeurs qui ne satisferont point à cette équation devront être de trop parmi les solutions des éq. $B=0$, $R=0$. Par conséquent ces couples devront être supprimées.

La question est ainsi ramenée à résoudre les deux équations

$$B=0, \quad R=0.$$

On examine d'abord s'il y a dans R des facteurs fonctions de y ou de x. Supposons qu'il en existe, désignons-les par f et f', et soit r le quotient de R par ff'; on pourra décomposer R en $ff'r$, et par suite remplacer les équations précédentes par les trois systèmes

$$[B=0,\ f=0], \quad [B=0,\ f'=0], \quad [B=0,\ r=0].$$

Les deux premiers n'offrent aucune difficulté, car f ne contient que y, et f' ne contient que x : occupons-nous du troisième.

B et r n'ont aucun facteur commun : car s'il y en avait un, il devrait se trouver dans A et B, ce qui est contraire à la supposition. De plus, ni B ni r ne renferment de facteur fonction de y seul ou de x seul; donc on peut traiter les équations

$$B=0, \quad r=0,$$

tout à fait comme les proposées $A=0$, $B=0$. Ainsi, on les remplacera elles-mêmes par deux autres

$$r=0, \quad r'=0,$$

qui seront dans le même cas que les précédentes, mais dont la seconde, $r'=0$, sera de degré moindre en x que la première, $r=0$.

Celles-ci à leur tour pourront se remplacer par deux autres, dont la seconde sera encore de degré moindre que $r'=0$.

En continuant ces opérations, qui sont en tout semblables à celles qu'on ferait sur A et B si l'on avait à chercher le plus grand commun diviseur de ces polynomes, on arrivera toujours à un dernier reste qui ne contiendra plus l'inconnue x. Supposons que ce reste soit r' : alors les équations proposées dépendent des équations $r=0$, $r'=0$, lesquelles ne peuvent offrir aucune difficulté, puisque la deuxième ne contient plus que la seule inconnue y.

Il ne faut pas oublier qu'en remontant des équations $r=0$, $r'=0$, aux précédentes $B=0$, $r=0$, il peut se faire qu'il y ait quelques

solutions à ajouter et d'autres à supprimer ; qu'il peut encore en être de même en remontant des éq. $B=0$, $r=0$, aux éq. $A=0$, $B=0$; et ainsi de suite, s'il y avait un plus grand nombre de divisions successives.

430. La méthode qui vient d'être développée conduit, en général, non à une seule équation en y, mais bien à plusieurs, dont quelques-unes peuvent donner pour cette inconnue des valeurs fausses. Quand on aura reconnu toutes celles qui entrent véritablement dans des solutions communes aux deux équations, il sera facile, si cela est nécessaire, de les réunir dans une seule équation, qu'on prendra alors pour l'équation finale ; mais cette réunion est rarement utile.

Quand on a fait toutes les simplifications préliminaires (**427**), les polynomes que l'on soumet aux divisions successives ne peuvent plus avoir de facteurs communs; et, comme ces divisions sont absolument les mêmes qu'on ferait pour déterminer le plus grand commun diviseur des deux polynomes, on est certain de ne point arriver à un reste nul.

Mais il peut se faire que les termes en y se détruisent dans le dernier reste, et que ce reste se réduise à un nombre. Alors ce reste ne peut pas être rendu égal à zéro ; et de là on doit conclure que les équations proposées sont *impossibles* ou *incompatibles*, à moins qu'il n'y ait eu des solutions supprimées dans le cours du calcul, et dont la méthode a appris à tenir compte.

431. Exemple I. Soient les équations

$$(-2x^2+2)y^3+(x^4-2x^3-2x^2-2x+1)y^2+(x^5-2x^3+x)y=0,$$
$$(-x+1)y^5+(-x^2+x)y^4+(x^3-x^2)y^3+(x^4-x^3)y^2=0.$$

Il y aura de nombreuses simplifications, car elles se décomposent en facteurs comme il suit,

$$y(x-1)(x+y)\times(x+1)(x^2-2y-1)=0,$$
$$y(x-1)(x+y)\times y(x^2-y^2)=0.$$

En égalant d'abord à zéro les facteurs communs, chacun à son tour, il vient

$$\begin{cases} y=0, \\ x \text{ indét.} \end{cases} \quad \begin{cases} y \text{ indét.} \\ x=1, \end{cases} \quad \begin{cases} y \text{ indét.} \\ x=-y\,; \end{cases}$$

et, en égalant ensuite les autres facteurs à zéro, on a quatre systèmes d'équations, savoir :

$$1^{\text{er}}\text{ système}\begin{cases} y=0 \\ x+1=0 \end{cases} \text{d'où} \begin{cases} y=0 \\ x=-1\,; \end{cases}$$

$$2^{\text{e}}\text{ système}\begin{cases} y=0 \\ x^2-2y-1=0 \end{cases} \text{d'où} \begin{cases} y=0 \\ x=1, \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=-1\,; \end{cases}$$

$$3^{\text{e}}\text{ système}\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x+1=0 \end{cases} \text{d'où} \begin{cases} x=-1 \\ y=1, \end{cases} \begin{cases} x=-1 \\ y=-1\,; \end{cases}$$

$$4^{\text{e}}\text{ système}\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2-2y-1=0 \end{cases} \text{d'où} \begin{cases} y=1+\sqrt{2} \\ x=\pm(1+\sqrt{2}), \end{cases} \begin{cases} y=1-\sqrt{2} \\ x=\pm(1-\sqrt{2}). \end{cases}$$

Dans les trois premiers systèmes, toutes les solutions, excepté $x=-1$ et $y=-1$, sont déjà connues; et dans le 4ᵉ, celles où l'on a $x=-y$ le sont aussi : de sorte qu'on ne trouve véritablement que trois solutions nouvelles, savoir :

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=-1, \end{cases} \begin{cases} y=1+\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2}, \end{cases} \begin{cases} y=1-\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2}. \end{cases}$$

Exemple II. On propose de résoudre les deux équations

$$x^3-3yx^2+(3y^2-y+1)x-y^3+y^2-2y=0,$$
$$x^2-2yx+y^2-y=0.$$

Ces équations ne se décomposent point en facteurs; c'est pourquoi l'on passe immédiatement aux divisions successives. Il en sera de même des exemples III et IV.

Première division.

$$\begin{array}{l|l} x^3-3yx^2+(3y^2-y+1)x-y^3+y^2-2y & x^2-2yx+y^2-y \\ \hline -x^3+2yx^2+(-y^2+y)x & x-y \\ \hline \quad -yx^2+(2y^2+1)x-y^3+y^2-2y & \\ \quad +yx^2-2y^2x+y^3-y^2 & \\ \hline \qquad x-2y & \end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{l|l} x^2-2yx+y^2-y & x-2y \\ \hline -x^2+2yx & x \\ \hline \qquad y^2-y & \end{array}$$

Donc les équations finales sont $x-2y=0$, $y^2-y=0$. L'on en tire

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0, \end{cases} \begin{cases} y=1 \\ x=2\,; \end{cases}$$

et comme on n'a introduit ni supprimé aucun facteur, ces deux solutions sont celles des proposées elles-mêmes.

EXEMPLE III. On propose de résoudre les deux équations

$$(y-1)x^2+2x-5y+3=0,$$
$$yx^2+9x-10y=0.$$

Première division.

$$\begin{array}{r|l}
(y-1)x^2 + 2x - 5y + 3 & yx^2+9x-10y \\ \cline{2-2}
(y-1)yx^2+2yx-5y^2+3y & y-1 \\
-(y-1)yx^2+(-9y+9)x+10y^2-10y & \\ \hline
(-7y+9)x+5y^2-7y &
\end{array}$$

Puisqu'on a multiplié par y, il faut résoudre les équations $y=0$, $yx^2+9x-10y=0$, lesquelles donnent $x=0$, $y=0$; et examiner si ces valeurs rendent le dividende égal à zéro. Comme cela n'arrive point, il s'ensuit qu'elles forment une solution étrangère qu'il faudra supprimer.

Deuxième division.

$$\begin{array}{r|l}
yx^2+9x-10y & (-7y+9)x+5y^2-7y \\ \cline{2-2}
\left\{\begin{array}{r}(-7y+9)yx^2+(-63y+81)x \\ +70y^2-90y\end{array}\right. & yx+(-5y^3+7y^2-63y+81) \\
-\ldots\ldots\ldots\ldots+(-5y^3+7y^2)x & \\ \hline
(-5y^3+7y^2-63y+81)x+70y^2-90y & \\
(-5y^3+\ldots)(-7y+9)x-490y^3+1260y^2-810y & \\
-\ldots\ldots\ldots+25y^5-70y^4+364y^3-846y^2+567y & \\ \hline
25y^5-70y^4-126y^3+414y^2-243y &
\end{array}$$

Les équations qu'il faut résoudre sont donc

$$(-7y+9)x+5y^2-7y=0,$$
$$25y^5-70y^4-126y^3+414y^2-243y=0.$$

La 2e donne, ainsi qu'il est facile de le vérifier,

$$y=0,\ y=1,\ y=3,\ y=\frac{-3\pm3\sqrt{10}}{5};$$

et, en substituant ces valeurs dans la 1re équation, on obtient pour x les valeurs correspondantes

$$x=0,\ x=1,\ x=2,\ x=-5\mp\sqrt{10}.$$

Dans la deuxième division, on a été obligé de multiplier le dividende par $-7y+9$, mais aucune solution étrangère n'a été introduite. Il y a donc seulement à supprimer, dans les cinq solutions ci-dessus, celle qui a été introduite par la première di-

vision. Il reste ainsi, pour les équations proposées, les quatre solutions suivantes :

$$\begin{cases} y=1 \\ x=1, \end{cases} \quad \begin{cases} y=3 \\ x=2, \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{-3+3\sqrt{10}}{5} \\ x=-5-\sqrt{10}, \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{-3-3\sqrt{10}}{5} \\ x=-5+\sqrt{10}. \end{cases}$$

Exemple IV. Soient encore les équations

$$x^2+(8y-13)x+y^2-7y+12=0,$$
$$x^2-(4y+1)x+y^2+5y=0.$$

Première division.

$$\begin{array}{l|l} x^2+(8y-13)x+y^2-7y+12 & x^2-(4y+1)x+y^2+5y \\ \cline{2-2} -x^2+(4y+\ 1)x-y^2-5y & 1 \\ \hline \quad (12y-12)x-12y+12 & \end{array}$$

Ce reste se décomposant en facteurs $12(y-1)(x-1)$, les calculs se simplifient, et l'on a ces deux systèmes d'équations :

$$\begin{cases} y-1=0 \\ x^2-(4y+1)x+y^2+5y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-(4y+1)x+y^2+5y=0. \end{cases}$$

Chacun d'eux se résout immédiatement, et l'on trouve

$$\begin{cases} y=1 \\ x=3, \end{cases} \quad \begin{cases} y=1 \\ x=2, \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=1, \end{cases} \quad \begin{cases} y=-1 \\ x=1. \end{cases}$$

Perfectionnements ajoutés à la méthode précédente.

432. Pendant longtemps, on a cru qu'en soumettant deux équations aux opérations du plus grand commun diviseur, le dernier reste donnait immédiatement la véritable équation finale sans aucune complication de racines étrangères. Dans la *Correspondance de l'École Polytechnique*, tome II, j'ai corrigé cette erreur, et les modifications que j'ai proposées alors ont été adoptées dans l'enseignement. De là est résultée la méthode expliquée dans le paragraphe précédent, nos **427-430**. Mais cette méthode a elle-même reçu de M. Labatie, en 1832, de notables perfectionnements, qui ont été reproduits par M. Sarrus sous une forme élégante, en 1834, et que je vais développer ici d'après ces auteurs. Je diviserai cette exposition en trois parties.

Première partie. Quand il faut résoudre deux équations entre deux inconnues x et y, le mieux est toujours d'effectuer les sim-

plifications indiquées n° **427**; mais, pour l'explication qui va suivre, il suffira que les deux équations ne renferment plus aucun facteur algébrique indépendant de l'inconnue x par rapport à laquelle on ordonne. Considérons donc deux équations qui remplissent cette condition et désignons-les par

$$A = 0, \quad B = 0,$$

B étant en x de degré inférieur ou égal à A. Divisions A par B, en ayant soin de multiplier A par les facteurs nécessaires pour arriver à un reste de degré moindre que B, sans prendre de quotient fractionnaire; représentons l'ensemble de ces facteurs par c, le quotient par q, et le reste par Rr, r étant le produit des facteurs de ce reste qui ne contiennent point x. Après cette division, faisons tout à fait de la même manière celle de B par R; puis, après cette 2e division, faisons-en une 3e; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un reste indépendant de x.

Je supposerai, pour fixer les idées, que ce reste vienne après la 3e division, et que ces divisions donnent

$$[1] \qquad cA = Bq + Rr$$

$$[2] \qquad c_1B = Rq_1 + R_1r_1,$$

$$[3] \qquad c_2R = R_1q_2 + r_2.$$

On pourra, si on le veut, regarder r et c comme premiers entre eux. En effet, s'il n'en est pas ainsi, soit d le plus grand commun diviseur de c et r, l'égalité [1] donne $\frac{c}{d}A = \frac{Bq}{d} + R\frac{r}{d}$. De là, on conclut que d doit diviser Bq; et comme B ne renferme plus de facteur indépendant de x, il s'ensuit que d doit diviser q.

Or, rien n'empêche de supposer ces simplifications déjà faites dans l'éq. [1] avant de passer à la 2e division. On peut même ajouter qu'alors q ne devra avoir aucun facteur commun avec c ni avec r, car un facteur qui serait commun à q et à c, par exemple, devrait diviser Rr, et comme R n'en renferme aucun qui soit indépendant de x, il devrait se trouver dans r; par conséquent c et r auraient encore un facteur commun, ce qui est contraire à la supposition. Les égalités [2] et [3] donnent lieu à des observations semblables.

Il sera bien, dans la pratique, pour éviter les calculs compliqués, de faire en sorte que c et r n'aient en effet aucun facteur

commun, qu'il en soit de même de c_1 et r_1, aussi bien que de c_2 et r_2: mais les explications que je vais donner ne l'exigent point.

Revenons maintenant aux égalités [1], [2], [3]. De la première on conclut que si des valeurs de x et de y donnent $A=0$ et $B=0$, elles doivent aussi donner $Rr=0$: de sorte que toutes les solutions des équations proposées sont comprises dans les deux systèmes $[B=0,\ r=0]$ et $[B=0,\ R=0]$.

Semblablement, l'égalité [2] prouve que les solutions du système $[B=0, R=0]$ doivent être comprises parmi celles des deux systèmes $[R=0,\ r_1=0]$ et $[R=0,\ R_1=0]$.

Par l'égalité [3] on reconnaît que les solutions du dernier système $[R=0, R_1=0]$ sont elles-mêmes renfermées dans le système unique $[R_1=0, r_2=0]$.

Donc enfin toutes les solutions des proposées $A=0$, $B=0$, se trouvent parmi celles des trois systèmes

$$[4]\quad [B=0,\ r=0],\quad [R=0,\ r_1=0],\quad [R_1=0,\ r_2=0].$$

Mais on ne pourrait pas dire que réciproquement toutes les solutions de ces divers systèmes conviennent toujours aux proposées. En effet, l'égalité [2], par exemple, montre bien qu'une solution des deux éq. $R=0$, $r_1=0$, doit donner $B=0$ si r_1 n'a aucun facteur commun avec c_1, ce qu'il est permis de supposer; mais l'égalité [1] prouve que ces valeurs doivent rendre $cA=0$, ce qui peut avoir lieu sans qu'on ait $A=0$.

De là il suit qu'en arrêtant ici le raisonnement, il resterait à examiner, dans chaque cas particulier, quelles sont parmi les solutions des systèmes [4] celles qui doivent être rejetées: de sorte que la méthode déjà exposée n'aurait fait aucun progrès. Mais M. Labatie a eu l'heureuse idée de former les égalités successives par lesquelles chacune des quantités A et B est liée avec deux restes consécutifs quelconques, afin de reconnaître si ces égalités n'offriraient point d'elles-mêmes des exclusions qui restent inaperçues dans les égalités [1], [2], [3]. Or, voici comment se font ces calculs.

Deuxième partie. Nommons d le plus grand commun diviseur de c et r, divisons l'égalité [1] par d, observons que q doit être divisible par d, posons $\frac{q}{d}=G$, et alors on aura

$$\frac{c}{d}A = GB + R\frac{r}{d}.$$

Multiplions cette égalité par c_1, puis remplaçons dans le 2e membre c_1B par sa valeur [2] : il vient

$$\begin{aligned}\frac{cc_1}{d}A &= G(Rq_1 + R_1r_1) + c_1R\frac{r}{d}\\ &= \left(Gq_1 + \frac{c_1r}{d}\right)R + GR_1r_1.\end{aligned}$$

Nommons d_1 le plus grand commun diviseur de $\frac{cc_1}{d}$ avec r_1, et divisons l'égalité par d_1 : le multiplicateur de R devra être divisible par d_1, et en posant $\frac{Gq_1}{d_1} + \frac{c_1r}{dd_1} = G_1$, on aura

$$\frac{cc_1}{dd_1}A = G_1R + GR_1\frac{r_1}{d_1},$$

égalité dans laquelle $\frac{cc_1}{dd_1}$, $\frac{r_1}{d_1}$ et G_1 sont des quantités entières.

Multiplions cette égalité par c_2, remplaçons c_2R par sa valeur [3], il viendra

$$\begin{aligned}\frac{cc_1c_2}{dd_1}A &= G_1(R_1q_2 + r_2) + Gc_2R_1\frac{r_1}{d_1}\\ &= \left(G_1q_2 + \frac{Gc_2r_1}{d_1}\right)R_1 + G_1r_2.\end{aligned}$$

Soit d_2 le plus grand commun diviseur de $\frac{cc_1c_2}{dd_1}$ et r_2 : en divisant tout par d_2, on reconnaît que le multiplicateur de R_1 est divisible par d_2, et en posant $\frac{G_1q_2}{d_2} + \frac{Gc_2r_1}{d_1d_2} = G_2$, il vient

$$\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}A = G_2R_1 + G_1\frac{r_2}{d_2}.$$

Maintenant formons les équations analogues dans lesquelles on fera entrer B au lieu de A. A cet effet on multiplie l'égalité [2] par c, on divise par dd_1, on pose $\frac{c}{d} = H$, $\frac{cq_1}{dd_1}$ ou $\frac{Hq_1}{d_1} = H_1$; et on trouve

$$\frac{cc_1}{dd_1}B = H_1R + HR_1\frac{r_1}{d_1}.$$

Il est bien entendu que H est entier, et par suite aussi H_1. En

multipliant cette égalité par c_2, divisant par d_2, remplaçant c_2R par sa valeur [3], et posant $\frac{H_1 q_2}{d_2} + \frac{Hc_2 r_1}{d_1 d_2} = H_2$, on obtient enfin

$$\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}B = H_2R_1 + H_1\frac{r_2}{d_2}.$$

Ainsi, en réunissant sous un seul coup d'œil toutes les égalités qui précèdent, on voit que, pour abréger, on a fait

$$G = \frac{q}{d},\quad G_1 = \frac{Gq_1}{d_1} + \frac{c_1 r}{dd_1},\quad G_2 = \frac{G_1 q_2}{d_2} + \frac{Gc_2 r_1}{d_1 d_2},$$

$$H = \frac{c}{d},\quad H_1 = \frac{Hq_1}{d_1},\qquad H_2 = \frac{H_1 q_2}{d_2} + \frac{Hc_2 r_1}{d_1 d_2};$$

et que par suite on a trouvé

[5] $\frac{c}{d}A = GB + R\frac{r}{d}$,

[6] $\frac{cc_1}{dd_1}A = G_1R + GR_1\frac{r_1}{d_1}$,

[7] $\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}A = G_2R_1 + G_1\frac{r_2}{d_2}$.

[8] $\frac{cc_1}{dd_1}B = H_1R + HR_1\frac{r_1}{d_1}$,

[9] $\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}B = H_2R_1 + H_1\frac{r_2}{d_2}$.

Par ces égalités, on conclut sur-le champ que les éq. A=0, B=0, sont vérifiées par les solutions de chacun des systèmes suivants :

[10] $\left[B = 0,\ \frac{r}{d} = 0\right],\quad \left[R = 0,\ \frac{r_1}{d_1} = 0\right],\quad \left[R_1 = 0,\ \frac{r_2}{d_2} = 0\right].$

Par exemple, les solutions du 1[er] système doivent évidemment réduire $\frac{c}{d}$ A à zéro ; et comme $\frac{c}{d}$ et $\frac{r}{d}$ sont des fonctions en y seul qui n'ont plus de facteur commun, les valeurs de y qui entrent dans ces solutions ne doivent point donner $\frac{c}{d} = 0$; donc c'est A qui devient zéro par les solutions dont il s'agit. En appliquant aux égalités [6] et [8], ou aux égalités [7] et [9], un raisonnement tout semblable, on reconnaîtra que A et B doivent devenir zéro par toutes les solutions des deux autres systèmes.

Si on compare les systèmes [4] de la page 360 avec les trois systèmes ci-dessus, on voit que les quantités r, r_1, r_2, peuvent contenir des facteurs qui ne sont plus dans $\frac{r}{d}$, $\frac{r_1}{d_1}$, $\frac{r_2}{d_2}$; de sorte que les systèmes [10] peuvent réellement être plus simples.

TROISIÈME PARTIE. Il y a plus : on va démontrer maintenant qu'aucune solution des équations proposées n'échappe à ces trois systèmes ; et c'est ce qu'on fera en formant successivement les différentes relations dans chacune desquelles se trouvent A et B avec une des quantités r, r_1, r_2. On pourrait les tirer immédiatement des éq. [1], [2], [3], de la page 359, mais il sera mieux de profiter des calculs déjà faits pour établir celles de la page 362.

L'égalité [5] est la première de celles qu'il faut trouver. Pour avoir les autres, on élimine R entre [6] et [8], et ensuite on élimine R_1 entre [7] et [9]. De cette manière, en mettant A et B dans un seul membre et se rappelant que $\frac{c}{d}=H$, il vient d'abord

$$HA - GB = R\frac{r}{d},$$

$$\frac{cc_1}{dd_1}(H_1A - G_1B) = (GH_1 - HG_1)R_1\frac{r_1}{d_1},$$

$$\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}(H_2A - G_2B) = (G_1H_2 - H_1G_2)\frac{r_2}{d_2}.$$

Mais il s'opère dans les seconds membres des réductions remarquables, qu'on obtient en se rappelant la signification de G, G_1, G_2, H, H_1, H_2. En effet, il est facile de voir qu'on a

$$GH_1 - HG_1 = \frac{GHq_1}{d_1} - H\left(\frac{Gq_1}{d_1} + \frac{c_1r}{dd_1}\right) = -\frac{Hc_1r}{dd_1} = -\frac{cc_1}{dd_1}\frac{r}{d},$$

$$G_1H_2 - H_1G_2 = G_1\left(\frac{H_1q_2}{d_2} + \frac{Hc_2r_1}{d_1d_2}\right) - H_1\left(\frac{G_1q_2}{d_2} + \frac{Gc_2r_1}{d_1d_2}\right),$$

$$= (G_1H - H_1G)\frac{c_2r_1}{d_1d_2} = +\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1};$$

en conséquence, les trois relations dont il s'agit, si l'on a soin d'y supprimer les facteurs communs, se réduiront à celles-ci :

[11] $$HA - GB = +R\frac{r}{d},$$

[12] $$H_1A - G_1B = -R_1\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1},$$

[13] $$H_2A - G_2B = +\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}\frac{r_2}{d_2}.$$

La dernière prouve que si une solution $[x=\alpha,\ y=\beta]$ convient aux équations A $=0$, B$=0$, la valeur $y=\beta$ doit rendre nul

l'un des facteurs $\frac{r}{d}$, $\frac{r_1}{d_1}$, $\frac{r^2}{d_2}$: or, si elle donne $\frac{r}{d}=0$, il est clair que la solution $[x=\alpha,\ y=\beta]$ se trouve parmi les solutions du système $\left[B=0,\ \frac{r}{d}=0\right]$.

Si, par la valeur $y=\beta$, on a $\frac{r_1}{d_1}=0$ sans avoir $\frac{r}{d}=0$, l'égalité [11] prouve que la solution $[x=\alpha,\ y=\beta]$ doit donner $R=0$; donc elle se trouve parmi celles du système $\left[R=0,\ \frac{r_1}{d_1}=0\right]$.

Que si la valeur β donne $\frac{r_2}{d_2}=0$, sans donner $\frac{r}{d}=0$ ni $\frac{r_1}{d_1}=0$, l'égalité [12] prouve que la solution $[x=\alpha,\ y=\beta]$ satisfait à l'éq. $R_1=0$; donc elle est comprise dans le système $\left[R_1=0,\ \frac{r_2}{d_2}=0\right]$.

Ce qui vient d'être dit démontre que les éq. $A=0$, $B=0$, n'ont pas de solution qui ne soit comprise dans l'un des systèmes [10] ; on a démontré auparavant que toute solution appartenant à l'un de ces systèmes doit convenir aux éq. $A=0$, $B=0$: donc enfin on peut remplacer les deux équations par l'ensemble de ces systèmes, sans craindre de négliger de véritables solutions ni d'en admettre de fausses.

433. Quand on considère l'élimination comme ayant pour objet de donner une équation finale en y dont les racines soient les valeurs de cette inconnue qui font partie des solutions communes aux deux éq. $A=0$, $B=0$, il est clair qu'on pourra prendre, pour cette équation finale,

$$\frac{r}{d}\,\frac{r_1}{d_1}\,\frac{r_2}{d_2}=0.$$

Les valeurs de x qui correspondent aux racines de l'éq. $\frac{r}{d}=0$ sont données par l'éq. $B=0$; de sorte que si B est du degré n par rapport à x, la même valeur de y pourra se trouver dans n solutions : par cette raison, M. Labatie regarde l'équation finale comme devant renfermer $\frac{r}{d}$ à la puissance n. Par une raison semblable, en désignant par n' et n'' les degrés de $R=0$ et $R_1=0$ par rapport à x, cette équation devra contenir les facteurs

$\left(\frac{r_1}{d_1}\right)^{n'}$, $\left(\frac{r_2}{d_2}\right)^{n''}$: en conséquence, il prend pour équation finale

$$\left(\frac{r}{d}\right)^{n}\left(\frac{r_1}{d_1}\right)^{n'}\left(\frac{r_2}{d_2}\right)^{n''}=0.$$

Ces considérations sont assez conformes à l'esprit de l'analyse; mais dans les applications elles ont peu d'utilité.

Je n'ai emprunté à M. Labatie qu'une partie de son travail, mais il pousse plus loin ses investigations. A l'égard des facteurs introduits à chaque division, il montre comment ces facteurs peuvent reparaître dans les divisions suivantes; et à l'égard de l'équation finale, après avoir remarqué celle qui précède, il l'abandonne bientôt pour en établir une qu'il regarde comme plus complète. Sur tous ces points je renverrai à l'ouvrage même de l'auteur.

454. Lorsque deux équations ont des facteurs communs, ces facteurs donnent lieu à une infinité de solutions, ou, ce qui est la même chose en d'autres termes, à des solutions indéterminées; c'est ce qu'on a déjà remarqué en parlant des simplifications préliminaires qu'on peut faire subir à deux équations qu'on se propose de résoudre. Mais lorsqu'il n'y a plus de facteur commun, les différents systèmes par lesquels on remplace ces deux équations ne peuvent présenter aucune indétermination, par conséquent je n'ai rien, sur ce sujet, à ajouter à ce qui est déjà connu.

Quant aux solutions infinies, il n'en a été rien dit; et d'ailleurs on reconnaît facilement que les raisonnements par lesquels on est passé ne leur sont point applicables : ainsi elles exigent une détermination spéciale. Cette détermination est importante dans plusieurs questions de géométrie analytique, mais aussi alors il est rare qu'elle offre de sérieuses difficultés, tandis qu'en la présentant d'une manière générale, abstraction faite de toute application, elle pourrait être mal comprise. C'est pourquoi je me bornerai à remarquer ici qu'on peut trouver les valeurs d'une inconnue y, auxquelles répondent des valeurs infinies de l'autre inconnue x, en faisant d'abord $x=\frac{1}{x'}$, et ensuite $x'=0$.

Sur l'élimination entre un nombre quelconque d'équations.

455. Jusqu'ici les équations à résoudre étaient au nombre de deux seulement. Supposons qu'on en ait trois entre les inconnues x, y, z : pour parvenir à une équation finale en z, on pourra éliminer d'abord x entre la première et chacune des autres; puis,

y entre les deux équations résultantes. Mais alors, les plus grands soins sont à prendre pour écarter les fausses solutions; et ce qu'on dit ici de trois équations s'applique à plus forte raison aux cas où il y en aurait davantage.

Bezout, dans sa *Théorie générale des Équations*, s'est beaucoup occupé de cette branche épineuse de l'analyse; mais les méthodes qu'il propose, outre les difficultés théoriques dont elles ne sont pas exemptes, exigent des calculs si compliqués qu'on doit les regarder comme impraticables. Je me bornerai à énoncer ici, sans démonstration, le théorème dû à ce savant, savoir que : *Si entre des équations en nombre pareil à celui des inconnues, on élimine toutes les inconnues hors une, le degré de l'équation finale devra être tout au plus égal au produit des degrés de ces équations.*

436. Toutefois, sans entrer ici dans aucun détail sur la résolution des équations, il est facile de reconnaître que si elles sont en même nombre que les inconnues, elles n'admettront en général qu'un nombre déterminé de solutions.

Supposons qu'on ait n équations entre n inconnues x, y, z,..... si on considère l'une quelconque d'entre elles, on doit accorder, lors même qu'on ne saurait pas la résoudre par rapport à x, qu'elle détermine pour cette inconnue un certain nombre de valeurs α, α', α'', α''',.... qui généralement seront des fonctions des autres inconnues y, z,... En substituant α dans les équations restantes, on aurait $n-1$ équations qui ne contiendraient plus que $n-1$ inconnues, de même en substituant α', on aurait un autre groupe de $n-1$ équations entre $n-1$ inconnues; et ainsi de suite pour chacune des autres valeurs, α'', α''',....

Si on prend chaque groupe séparément, on conçoit qu'en tirant de l'une des $n-1$ équations les valeurs d'une inconnue, pour les substituer dans les $n-2$ équations restantes, on pourra aussi remplacer ce groupe par d'autres groupes composés chacun de $n-2$ équations entre $n-2$ inconnues. En continuant ainsi, on arriverait à une équation qui ne renfermerait plus qu'une inconnue, et qui déterminerait, pour cette inconnue, un certain nombre de valeurs. Et enfin, si ces valeurs étaient trouvées, on pourrait, en remontant successivement jusqu'à la première inconnue, obtenir les valeurs correspondantes de toutes les autres inconnues Par cette explication, il est manifeste que les n équations données ne peuvent avoir qu'un nombre limité de solutions.

457. Maintenant supposons qu'il y ait plus d'équations que d'inconnues. Soient n le nombre des inconnues, $n+k$ celui des équations; et, parmi ces équations, prenons-en à volonté un nombre égal à n. D'après ce qui vient d'être dit, ces n équations détermineront en général un nombre limité de solutions; et comme ces solutions doivent aussi satisfaire aux k équations restantes, leur substitution donnerait k *équations de condition*. On les nomme ainsi parce qu'elles ne contiendraient plus que des quantités connues, et qu'elles devraient se vérifier d'elles-mêmes pour que les équations proposées ne fussent pas incompatibles.

Lorsqu'on a plus d'inconnues que d'équations, il y a *indétermination*. En effet, si $n+k$ désigne le nombre des inconnues, et n celui des équations, il est évident qu'on pourra attribuer des valeurs arbitraires à k inconnues, et déterminer ensuite les n autres inconnues au moyen des n équations données.

Au reste, ce qui vient d'être dit, dans ce numéro et dans le précédent, souffre quelquefois exception. Par exemple, il peut se faire que les équations soient en nombre égal aux inconnues, et que cependant elles soient incompatibles ou qu'il y ait indétermination. Les équations du 1er degré en offrent une preuve.

Usage de l'élimination dans la transformation des équations. — Équation aux carrés des différences.

458. Nous avons dit (407) que l'élimination pouvait être nécessaire pour opérer la transformation des équations. Elle l'est surtout dans le cas où chaque racine de la nouvelle équation doit être composée avec plusieurs racines de l'équation donnée. Un exemple suffira, et je choisis la question suivante, qui doit se présenter plus tard dans une recherche importante.

Étant donnée une équation quelconque à une seule inconnue, trouver une autre équation dont les racines soient les différences entre celles de la première, combinées deux à deux.

Soit l'équation proposée

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{etc.} = 0.$$

Nommons x et x' deux quelconques de ses racines, et y leur différence, de sorte qu'on ait $x' = x + y$; l'éq. [A] devra être satisfaite en y mettant cette valeur au lieu de x; par conséquent on a

$$(x+y)^m + P(x+y)^{m-1} + Q(x+y)^{m-2} + \text{etc.} = 0.$$

Développons les puissances : en représentant par X, X', X'', etc. le polynome $x^m + Px^{m-1} +$ etc. et ses dérivés successifs, il viendra

$$X + X'y + \tfrac{1}{2}X''y^2 + \tfrac{1}{2.3}X'''y^3 \ldots + y^m = 0.$$

Mais x est ici une racine de [A]; donc on a $X = 0$, et par suite l'équation ci-dessus étant divisée par y devient

[B] $$X' + \tfrac{1}{2}X''y + \tfrac{1}{2.3}X'''y^2 \ldots + y^{m-1} = 0.$$

Avant la suppression du facteur y, x et x' étaient deux racines quelconques de l'éq. [A], et rien n'empêchait de supposer $x' = x$. Or, la différence $x - x$ étant zéro, il faut que l'éq. en y, avant la suppression du facteur y, ait pour racine $y = 0$: c'est en effet ce qui arrive puisqu'elle est divisible par y; et en opérant la division, cette racine se trouve supprimée : de sorte que les $m - 1$ valeurs de y dans l'éq. [B] ne sont plus que les différences qu'on obtiendrait en retranchant la racine désignée par x de toutes les autres racines de l'éq. [A].

Afin de distinguer entre elles les m racines de l'éq. [A], représentons-les par a, b, c, d,...; puis imaginons qu'on remplace successivement, dans [B], x par chacune de ces racines. Il résulterait de ces substitutions m équations, dont la première aurait pour racines les différences entre a et toutes les autres racines b, c, d,...; la seconde, les différences entre b et les autres racines a, c, d,...; et ainsi de suite. Par conséquent, en éliminant x entre [A] et [B] l'équation finale en y aura pour racines les différences entre chacune des racines de l'éq. [A] et toutes les autres racines de la même équation : elle sera donc l'équation cherchée. On la désigne par la dénomination d'*équation aux différences*.

459. *Remarques.* Pour qu'elle soit en effet l'équation aux différences, il faut que l'élimination n'ait point supprimé de vraie racine ni amené de racine fausse. C'est dans cette supposition que je continuerai de raisonner : s'il en était autrement, on sait comment on doit tenir compte des unes et des autres.

Sans effectuer l'élimination, il est facile de reconnaître le degré de cette équation. En effet, ses racines sont les différences

$a - b$, $a - c$, $a - d$, ...,
$b - a$, $b - c$, $b - d$, ...,
$c - a$, $c - b$, $c - d$, ...,
etc.;

et il est évident que ces différences sont en même nombre que les arrangements deux à deux des m lettres a, b, c, etc.; donc l'équation aux différences est du degré $m(m-1)$.

De plus, on voit que s'il existe dans cette équation une racine α égale à $a-b$, il y en a une autre $-\alpha$ égale à $b-a$; donc le premier membre est composé de facteurs qui peuvent se grouper deux par deux en produits tels que $(y-\alpha)(y+\alpha)=y^2-\alpha^2$, et par conséquent l'équation ne contiendra que des puissances paires de y. Donc, en posant $m(m-1)=2n$, elle sera de la forme

[C] $$y^{2n}+py^{2n-2}+qy^{2n-4}\ldots+ty^2+y=0.$$

Enfin, on peut faire $y^2=z$, et elle devient

[D] $$z^n+pz^{n-1}+qz^{n-2}\ldots+uz+t=0.$$

Celle-ci est appelée *équation aux carrés des différences*, parce qu'en effet, z étant le carré de y, elle a pour racines les carrés des différences des racines de l'équation donnée [A].

440. Comme application, proposons-nous de trouver l'équation aux carrés des différences de l'équation du 3e degré.

Avant tout je remarquerai d'une manière générale que les éq. [C] et [D] ne doivent point changer quand on augmente ou quand on diminue d'une même quantité toutes les racines de l'éq. [A]. Par conséquent, si une équation donnée a son second terme, on pourra le faire disparaître (**402**) et chercher ensuite l'équation aux différences de la transformée : on trouvera ainsi la même équation que si on n'eût point fait évanouir le second terme, mais les calculs seront moins compliqués. D'après cette observation, je supposerai que l'équation du 3e degré n'ait plus de second terme, et qu'elle soit

[1] $$x^3+Qx+R=0.$$

Lorsqu'on désigne par $X=0$ l'équation, et par X', X'', X''',..... les polynomes dérivés de X, la règle pour trouver l'équation aux différences est d'éliminer x entre les deux équations

$$X=0,\quad X'+\tfrac{1}{2}X''y+\tfrac{1}{2\cdot 3}X'''y^2+\text{etc.}=0.$$

Or, dans le cas actuel, on a

$$X=x^3+Qx+R,\quad X'=3x^2+Q,\quad X''=6x,\quad X'''=6;$$

donc l'élimination de x doit se faire entre l'éq. [1] et celle-ci

[2] $$3x^2+Q+3xy+y^2=0.$$

En conséquence, on ordonnera cette équation par rapport à x,

puis on opérera comme s'il s'agissait de trouver le plus grand commun diviseur des premiers membres de [1] et [2].

Première division.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + Qx + R & 3x^2 + 3yx + y^2 + Q \\
3x^3 + 3Qx + 3R & x - y \\
-3x^3 - 3yx^2 - (y^2 + Q)x & \\
\hline
-3yx^2 - (y^2 - 2Q)x + 3R & \\
+3yx^2 + 3y^2x + y^3 + Qy & \\
\hline
2(y^2 + Q)x + y^3 + Qy + 3R. &
\end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{l|l}
3x^2 + 3yx + y^2 + Q & 2(y^2 + Q)x + y^3 + Qy + 3R \\
6(y^2 + Q)x^2 + 6(y^2 + Q)yx & 3x + 3(y^3 + Qy - 3R). \\
\quad + 2(y^2 + Q)^2 & \\
-6(y^2 + Q)x^2 - 3(y^3 + Qy + 3R)x & \\
\hline
3(y^3 + Qy - 3R)x + 2(y^2 + Q)^2 & \\
6(y^2 + Q)(y^3 + Qy - 3R)x + 4(y^2 + Q)^3 & \\
-6(y^2 + Q)(y^3 + Qy - 3R)x - 3(y^3 + Qy + 3R)(y^3 + Qy - 3R) & \\
\hline
4(y^2 + Q)^3 - 3(y^3 + Qy + 3R)(y^3 + Qy - 3R). &
\end{array}$$

Dans la dernière division, on a multiplié deux fois par $y^2 + Q$ pour rendre les divisions possibles ; mais si on pose $y^2 + Q = 0$, le diviseur se réduit à 3R, quantité qui en général est différente de zéro. Ainsi, en égalant à zéro le dernier reste et effectuant les opérations indiquées, l'équation aux différences est

$$y^6 + 6Qy^4 + 9Q^2y^2 + 4Q^3 + 27R^2 = 0 ;$$

puis, en posant $y^2 = z$, on a l'équation aux carrés des différences,

$$z^3 + 6Qz^2 + 9Q^2z + 4Q^3 + 27R^2 = 0.$$

Pour l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$, on a $Q = -7$, $R = +7$; et par suite l'éq. en z devient $z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0$.

Usage de l'élimination pour l'évanouissement des radicaux.

441. Les procédés qui servent à calculer les racines d'une équation supposent que l'inconnue ne se trouve sous aucun radical ; par conséquent il est très-important de savoir changer une équation compliquée de radicaux en une autre qui ne renferme que

des termes rationnels. Or, l'évanouissement des radicaux, en le considérant sous un point de vue général, n'est qu'une question d'élimination : un exemple le fera comprendre. Soit l'équation

$$x - \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = 0.$$

dans laquelle chaque radical est censé représenter indifféremment toutes les déterminations dont il est susceptible. En posant

$$y^2 = x - 1, \quad z^3 = x + 1,$$

elle devient

$$x - y + z = 0 ;$$

et alors on voit qu'en éliminant y et z entre cette dernière équation et les deux précédentes, on obtiendra une éq. en x, entièrement dégagée de radicaux : car les méthodes générales d'élimination n'en introduisent aucun dans les résultats.

Dans notre exemple les calculs sont faciles. La dernière équation donnant $y = z + x$, l'éq. $y^2 = x - 1$ devient

$$z^2 + 2xz + x^2 - x + 1 = 0 ;$$

et ensuite, pour éliminer z entre celle-ci et l'éq. $z^3 = x + 1$, le procédé du plus grand commun diviseur suffira. L'équation finale, sans aucune racine étrangère, est

$$x^6 - 3x^5 + 8x^4 + x^3 + 7x^2 - 7x + 2 = 0.$$

442. Les méthodes générales d'élimination sont si compliquées qu'on doit toujours chercher à les éluder. Le cas où l'équation ne contient qu'un seul radical s'est déjà présenté (**424**), et nous avons vu qu'on fait disparaître ce radical en l'*isolant dans un membre de l'équation, et en élevant ensuite les deux membres à la puissance marquée par l'indice du radical.*

Cette règle a besoin de quelques explications. Le plus ordinairement, quand on élève les deux membres d'une équation à une puissance, elle acquiert de nouvelles racines : par exemple, si on a $ax^2 + b = cx$ et qu'on élève au carré, il est clair que la nouvelle équation $(ax^2 + b)^2 = c^2x^2$ aura non-seulement les racines de la proposée, mais encore celles de l'éq. $ax^2 + b = -cx$. Ainsi, il y a lieu d'examiner si la règle donnée ci-dessus pour l'évanouissement d'un radical ne fait pas acquérir trop d'étendue à l'équation.

Supposons qu'après avoir transposé le radical, l'équation soit

$$[1] \qquad X = \sqrt[n]{Y},$$

X et Y étant fonctions des inconnues : par l'évanouissement du radical, elle devient

$$[2] \qquad X^n = Y \quad \text{ou} \quad X^n - Y = 0.$$

Le radical $\sqrt[n]{Y}$ est censé avoir toute la généralité possible, c'est-à-dire qu'il représente indifféremment chacune des déterminations dont il est susceptible. Quelle que soit celle que l'on considère, toutes les valeurs des inconnues qui satisfont à l'éq. [1] ne sauraient manquer de satisfaire à l'éq. [2]; et ce qu'il faut prouver, c'est que la réciproque est également vraie.

Si on avait l'équation $x^n - A = 0$, et qu'on désignât par A', A'', A''',... les n valeurs de $\sqrt[n]{A}$, on sait (**391**) qu'on devrait avoir

$$x^n - A = (x - A')(x - A'')(x - A''')....$$

Ici on peut remplacer x et A par telles quantités qu'on voudra : en conséquence, je désignerai par Y', Y'', Y''', etc., les n déterminations de $\sqrt[n]{Y}$, et je mettrai X, Y, Y', Y'',... au lieu de x, A, A', A'',... il vient ainsi

$$X^n - Y = (X - Y')(X - Y'')(X - Y''')...;$$

donc on ne peut satisfaire à l'éq. [2] qu'en posant $X = Y'$, ou $X = Y''$, ou $X = Y'''$, etc. Ces dernières équations ne sont autres que l'éq. [1] dans laquelle on aurait mis successivement chacune des déterminations de $\sqrt[n]{Y}$; donc enfin les solutions de cette équation sont les seules que contiennent l'éq. [2].

L'explication précédente montre en même temps comment il se fait que cette dernière équation devienne trop étendue quand le radical $\sqrt[n]{Y}$ représente spécialement une des n déterminations dont il est susceptible, comme cela arriverait, par exemple, s'il devait avoir une valeur réelle et positive.

443. Quand une équation renferme plusieurs radicaux, on ne peut pas en général faire évanouir successivement chacun d'eux par la règle précédente : car, dans le cas où il n'y en a que deux, il y a déjà lieu de remarquer que l'opération, qui fait disparaître un des radicaux, amène dans l'équation plusieurs quantités radicales qui ne s'y trouvaient pas auparavant. Par exemple, si on a

$$X + \sqrt[5]{Y} = \sqrt[4]{Z},$$

et qu'on élève à la 4e puissance, le second radical disparaît en

effet, mais les puissances du premier, jusqu'à la 4ᵉ, se trouvent dans l'équation résultante

$$X^4+4X^3\sqrt[5]{Y}+6X^2(\sqrt[5]{Y})^2+4X(\sqrt[5]{Y})^3+(\sqrt[5]{Y})^4=Z.$$

444. Cependant lorsqu'une équation ne renferme que deux radicaux, et que l'un des deux est du 2ᵉ degré, on peut, par cette règle, les faire disparaître l'un après l'autre, pourvu que l'on commence par celui du plus haut degré. Alors le succès du calcul tient à ce que les puissances d'un radical carré ne reproduisent point de nouvelles quantités radicales. Par exemple, si l'équation est

$$X+\sqrt{Y}=\sqrt[3]{Z},$$

on aura successivement

$$(X+\sqrt{Y})^3=Z,$$
$$X^3+3X^2\sqrt{Y}+3XY+Y\sqrt{Y}=Z,$$
$$X^3+3XY-Z=-(3X^2+Y)\sqrt{Y},$$
$$(X^3+3XY-Z)^2=(3X^2+Y)^2Y.$$

445. Si l'on a une équation de la forme

$$X=\sqrt{Y}+\sqrt{Z},$$

au lieu d'isoler un des radicaux on peut, si on le préfère, élever immédiatement l'équation au carré : de cette manière il vient

$$X^2=Y+Z+2\sqrt{YZ},$$
$$X^2-Y-Z=2\sqrt{YZ},$$
$$(X^2-Y-Z)^2=4YZ.$$

446. Je placerai encore ici un cas particulier, dans lequel il y a deux radicaux cubiques qu'on fait évanouir très-simplement. Soit

$$X=\sqrt[3]{Y}+\sqrt[3]{Z}.$$

En élevant au cube, il vient

$$X^2=Y+Z+3(\sqrt[3]{Y})^2\sqrt[3]{Z}+3\sqrt[3]{Y}(\sqrt[3]{Z})^2,$$

ou

$$X^2-Y-Z=3\sqrt[3]{Y}\sqrt[3]{Z}(\sqrt[3]{Y}+\sqrt[3]{Z}).$$

Or, on peut remplacer $\sqrt[3]{Y}+\sqrt[3]{Z}$ par X, et alors en élevant encore au cube, on aura une équation sans radicaux, savoir :

$$(X^2-Y-Z)^3=27X^3YZ.$$

CHAPITRE XVIII.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

Racines commensurables.

447. A défaut de méthode pour résoudre l'équation générale de chaque degré, le but vers lequel je dois tendre maintenant est de faire connaître les procédés par lesquels on détermine, d'une manière exacte ou approchée, les racines des équations *numériques* : on nomme ainsi celles dont les coefficients sont des nombres donnés. Les racines peuvent être réelles ou imaginaires; et, parmi les racines réelles, il peut y en avoir de commensurables. Pour trouver ces dernières, il existe des procédés fort simples que je vais exposer d'abord.

448. Je commencerai par chercher les racines commensurables entières. Soit l'équation

$$[1] \qquad Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0,$$

dans laquelle je suppose que tous les coefficients soient entiers. Désignons par a une racine entière de cette équation, on devra avoir

$$[2] \qquad Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0,$$

d'où, en transposant et divisant par a,

$$\frac{E}{a} = -Aa^3 - Ba^2 - Ca - D.$$

Le 2e membre étant entier, on conclut que a est diviseur de E. Ainsi, on voit déjà qu'on pourrait découvrir les racines commensurables entières en substituant successivement dans l'équation tous les diviseurs du dernier terme, tant positifs que négatifs. Mais, quand ce terme a beaucoup de diviseurs, ce procédé exigerait un grand nombre de substitutions; alors on abrége le calcul au moyen de nouvelles conditions, qui se déduisent de la dernière égalité.

Faisons $\frac{E}{a} = E'$, transposons D et divisons par a; on aura

$$\frac{E' + D}{a} = -Aa^2 - Ba - C :$$

donc la somme $E' + D$ doit être divisible par a.

Faisons $\frac{E'+D}{a}=D'$, transposons C et divisons encore par a; il vient

$$\frac{D'+C}{a}=-Aa-B:$$

donc la somme $D'+C$ doit être divisible par a.

Faisons encore $\frac{D'+C}{a}=C'$, transposons B et divisons par a; on obtiendra

$$\frac{C'+B}{a}=-A.$$

Enfin faisons $\frac{C'+B}{a}=B'$ et transposons A, on aura

$$B'+A=0:$$

donc la somme $B'+A$ doit être nulle.

Si une seule des conditions précédentes vient à manquer, le nombre a n'est point racine. Mais il en sera une si elles sont toutes remplies; car alors, en remplaçant successivement les lettres B', C',... par les quantités qu'elles représentent, on pourra remonter de l'égalité $B'+A=0$ jusqu'à l'égalité [2].

Ainsi, en résumé, après avoir préparé une équation de manière que tous ses coefficients soient entiers (et alors celui du 1er terme peut être différent de l'unité), les conditions auxquelles on reconnaîtra qu'un nombre entier est racine de l'équation seront celles-ci:

Qu'il soit un diviseur du dernier terme; qu'il divise exactement la somme qu'on obtient en ajoutant le quotient avec le coefficient du terme affecté de x; *qu'il divise exactement la somme du nouveau quotient ajouté au coefficient du terme affecté de* x^2; *et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à ajouter le coefficient du premier terme de l'équation avec le dernier quotient, ce qui devra donner une somme égale à zéro.*

449. A ces conditions on en peut joindre d'autres qui ont été indiquées par Newton, et que je vais faire connaître.

a étant une racine quelconque de l'éq. $x^m+\text{etc.}=0$, le 1er membre de cette équation doit être divisible par $x-a$; de sorte qu'en désignant ce 1er membre par X, et le quotient par Y, on a

$$X=(x-a)Y.$$

Si a est une racine entière et que X ne renferme que des coefficients entiers, il en sera de même de Y; car la division par $x-a$

ne peut point amener de fraction au quotient, attendu que le 1[er] terme du diviseur a pour coefficient l'unité.

Cela posé, si l'on fait $x=+1$, le facteur $x-a$ devient $-(a-1)$, et il est évident que X et Y prendront des valeurs entières; donc, *lorsque* a *est une racine entière, il doit arriver qu'en substituant* $+1$ *au lieu de* x, *le résultat de la substitution soit divisible par* $a-1$. On prouve de la même manière que *la substitution de* -1 *doit donner un nombre divisible par* $a+1$.

Telles sont les nouvelles conditions à l'aide desquelles on pourra juger tout d'abord que certains diviseurs du dernier terme ne sont pas racines de l'équation.

Remarquez que les résultats de la substitution de $+1$ et de -1 dans l'équation s'obtiennent par des additions et des soustractions qui s'opèrent entre les cofficients mêmes de l'équation.

450. Enfin, dès à présent, je ferai remarquer que si on connaissait deux nombres entre lesquels fussent comprises toutes les racines réelles de l'équation, il faudrait rejeter tous les diviseurs qui excèdent ces limites. La détermination de ces limites va bientôt nous occuper.

451. Pour exemple, proposons-nous de trouver les racines entières de l'équation

$$2x^3-12x^2+13x-15=0.$$

Après avoir reconnu par la substitution immédiate que $+1$ et -1 ne sont point racines, j'écris sur une ligne horizontale les autres diviseurs du dernier terme et je leur applique à tous simultanément les règles du n° 448. Les calculs se présentent comme ci-dessous :

	+3,	+ 5,	+15,	— 3,	— 5,	—15,
Quotients	—5,	— 3,	— 1,	+ 5,	+ 3,	+ 1,
	+8,	+10,	+12,	+18,	+16,	+14,
Quotients	*	+ 2,	*	— 6,	*	*
		—10,		—18,		
Quotients		— 2,		+ 6,		
		0.		*		

La 1[re] ligne renferme les diviseurs, tant positifs que négatifs du dernier terme -15; et la 2[e] contient les quotients de ce dernier terme par chacun de ses diviseurs.

La 3e est formée en ajoutant aux quotients qu'on vient de trouver le coefficient $+13$ du terme $+13x$; et la 4e, en divisant ces différentes sommes par les diviseurs correspondants. Les divisions qui ne se font pas exactement indiquent que les diviseurs $+3$, $+15$, -5, -15, ne sont pas racines de l'équation.

La 5e ligne se forme en ajoutant aux derniers quotients le coefficient -12 du terme $-12x^2$, et la 6e en divisant les nouvelles sommes par les diviseurs correspondants. Cette épreuve ne fait rejeter ici aucun nouveau diviseur.

Enfin, la dernière ligne est formée en ajoutant le coefficient 2 du premier terme $2x^3$ aux derniers quotients; et comme on ne trouve zéro que dans la colonne du diviseur 5, on conclut que 5 est la seule racine entière de l'équation.

Je n'ai point fait usage des conditions du n° **449** : voici comment on pouvait s'en servir. Après avoir substitué $+1$ dans l'équation on trouve $2-12+13-15$ ou -12; et comme ce nombre n'est divisible ni par $15-1$, ni par $-15-1$, on conclut que les diviseurs $+15$ et -15, ne sont pas racines. Semblablement, la substitution de -1 donnant pour résultat -42, et ce nombre n'étant divisible ni par $3+1$, ni par $-5+1$, on conclut aussi que $+3$ et -5 ne sont pas racines. Ainsi, les seuls diviseurs qui seraient restés à essayer sont $+5$ et -3.

Remarques. La racine $x=5$ étant connue, on peut diviser l'équation par le facteur $x-5$, et on aura pour quotient $2x^2-2x+3=0$, d'où l'on tire $x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-5}$. Alors l'équation proposée est complétement résolue, et ces trois racines sont

$$x=5,\quad x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-5},\quad x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-5}.$$

Lorsque l'équation est privée de quelques termes, il ne faut pas oublier d'y avoir égard, en comptant leurs coefficients comme égaux à zéro; par conséquent, les quotients auxquels on doit les ajouter pourront être soumis immédiatement à de nouvelles divisions. On verra plus loin un exemple de ce cas (**455**).

452. La méthode qu'on vient d'expliquer ne montre pas combien les racines qu'elle détermine entrent de fois dans l'équation. Pour le reconnaître, le moyen qui s'offre le premier est de diviser l'équation par les facteurs correspondants à ces racines, prises chacune une seule fois, et d'examiner ensuite, soit par la substitution immédiate, soit par les règles du n° 448, si ces racines ap-

partiennent encore à l'équation restante. S'il s'en trouve quelques-unes qui la vérifient, elles doivent entrer au moins deux fois dans la proposée. Par une nouvelle division, on connaîtra celles qui peuvent y entrer trois fois; et ainsi de suite.

S'il s'agissait seulement de savoir combien de fois une racine commensurable a se trouve répétée dans l'équation, il est bon de remarquer que les calculs mêmes qui ont fait découvrir cette racine font aussi connaître les coefficients de l'équation résultant de la division par $x-a$. En effet, les quotients entiers dont il est parlé dans le nº **448**, étant pris avec un signe contraire et dans un ordre inverse, sont

$$\mathrm{A},\quad \mathrm{A}a+\mathrm{B},\quad \mathrm{A}a^2+\mathrm{B}a+\mathrm{C},\quad \mathrm{A}a^3+\mathrm{B}a^2+\mathrm{C}a+\mathrm{D}.$$

Or, si on se reporte à la fin du nº **390**, on voit qu'ils sont précisément les multiplicateurs des diverses puissances de x, dans le quotient qu'on obtient en divisant par $x-a$ le 1er membre de l'éq. [1].

Dans l'exemple du nº **451**, on a trouvé que $x=5$ est une racine; et les quotients correspondants qui se trouvent dans le tableau des calculs, étant pris en ordre inverse et avec des signes contraires, sont $+2$, -2, $+3$. En conséquence la division de l'équation par $x-5$ donnera l'équation $2x^2-2x+3=0$. Comme cette dernière n'est pas satisfaite par $x=5$, on conclut que cette racine ne se trouve qu'une seule fois dans l'équation proposée.

La même question se résout aussi au moyen des polynomes dérivés. En effet, on sait (**415**) que si une équation $\mathrm{X}=0$ renferme le facteur $(x-a)^n$, le polynome dérivé X' doit renfermer $(x-a)^{n-1}$; donc le polynome X'' dérivé de X' doit contenir $(x-a)^{n-2}$, et ainsi de suite. Ainsi, le nombre des équations $\mathrm{X}=0$, $\mathrm{X}'=0$, $\mathrm{X}''=0,\ldots$ qui seront vérifiées par la valeur $x=a$, indiquera combien l'éq. $\mathrm{X}=0$ a de racines égales à a.

Dans la recherche qui nous occupe, on pourra aussi s'aider de cette remarque, dont le lecteur démontrera facilement l'exactitude : que, si une racine entière a entre n fois dans une équation à coefficients entiers, de la forme $\mathrm{A}x^m+\mathrm{B}x^{m-1}+$ etc. $=0$, le dernier terme doit être divisible par a^n, et les termes précédents, en x, $x^2,\ldots x^{n-1}$, divisibles par a^{n-1}, $a^{n-2},\ldots a$.

453. Après avoir trouvé toutes les racines entières, tant égales qu'inégales, on peut les ôter de l'équation, et s'il y a encore des racines commensurables dans l'équation restante, elles doivent

être fractionnaires : occupons-nous maintenant de ces dernières. Leur détermination repose sur ce principe, que *si le 1er terme d'une équation a pour coefficient l'unité, et si les autres termes ont des coefficients entiers, cette équation ne peut avoir pour racines commensurables que des nombres entiers.*

Pour le démontrer, soit l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0,$$

dans laquelle P, Q,...T, U, sont des coefficients entiers. Mettons au lieu de x un nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$, qu'on peut toujours regarder comme irréductible, l'équation deviendra

$$\frac{a^m}{b^m} + P\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + Q\frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} \ldots + T\frac{a}{b} + U = 0.$$

De là, en multipliant par b^{m-1} et transposant, on tire

$$\frac{a^m}{b} = -Pa^{m-1} - Qa^{m-2}b \ldots - Tab^{m-2} - Ub^{m-1}.$$

Or, a et b étant des nombres premiers entre eux, le 1er membre de cette égalité est une fraction irréductible, tandis que l'autre est un nombre entier ; donc l'égalité est impossible. Donc aucun nombre fractionnaire ne peut satisfaire à l'équation.

454. Lorsqu'après avoir chassé les dénominateurs, le coefficient du premier terme n'est pas l'unité, on transformera l'équation en une autre qui remplisse cette condition; et pour cela il suffira de *faire l'inconnue* x *égale à une nouvelle inconnue* y, *divisée par le coefficient du premier terme de l'équation proposée.*

Alors il est clair que toutes les racines commensurables de cette équation répondront à des racines commensurables de la transformée; et comme celle-ci ne peut en avoir que d'entières, on les déterminera toutes par les règles connues, après quoi on en conclura celles de la proposée.

Pour montrer directement comment on découvre la transformation ci-dessus, supposons que l'équation donnée soit

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.} = 0,$$

A, B, C,.... étant des coefficients entiers. Faisons $x = \frac{y}{z}$, il vient

$$\frac{Ay^m}{z^m} + \frac{By^{m-1}}{z^{m-1}} + \frac{Cy^{m-2}}{z^{m-2}} + \text{etc.} = 0,$$

ou bien, en multipliant par z^{m-1},

$$\frac{\mathrm{A}}{z}y^m + \mathrm{B}y^{m-1} + \mathrm{C}zy^{m-2} + \text{etc.} = 0.$$

Alors on voit que le coefficient de y^m deviendra égal à l'unité, et que les autres coefficients seront entiers, en prenant $z = \mathrm{A}$, ce qui est conforme à la règle énoncée.

Au reste, cette règle revient à celle du n° **400**, et ici encore il convient d'observer qu'on pourra dans certains cas particuliers choisir pour z un nombre moindre que A, ce qui donnera une transformée dont les coefficients seront plus simples.

455. Pour terminer, proposons-nous de chercher toutes les racines commensurables de l'équation

$$4x^4 - 11x^2 + 7x - 6 = 0.$$

On pourrait chercher d'abord les racines entières; mais les coefficients étant peu considérables, il sera mieux de transformer tout de suite cette équation en une autre dont le 1er coefficient soit l'unité, sans que les autres cessent d'être entiers. Suivant la règle générale, il faut faire $x = \frac{y}{4}$; mais si on fait $x = \frac{y}{z}$, on verra sans peine qu'on peut prendre $z = 2$, ce qui revient à poser $x = \frac{y}{2}$. En effet, par là on trouve cette transformée

$$y^4 - 11y^2 + 14y - 24 = 0.$$

Comme elle ne peut avoir pour racines commensurables que des nombres entiers, après avoir reconnu que $+1$ et -1 ne peuvent point la vérifier, je lui applique les règles du n° **448**. Voici le tableau des calculs:

	+ 2,	+3,	+4,	+ 6,	+ 8,	+12,	+24,	— 2,	— 3,	— 4,	— 6,	— 8,	—12,	—24,
Quotients	—12,	—8,	—6,	— 4,	— 3,	— 2,	— 1,	+12,	+ 8,	+ 6,	+ 4,	+ 3,	+ 2,	+ 1,
	+ 2,	+6,	+8,	+10,	+11,	+12,	+13,	+26,	+22,	+20,	+18,	+17,	+16,	+15,
Quotients	+ 1,	+2,	+2,	*	*	+ 1,	*	—13,	*	— 5,	— 3,	*	*	*
	—10,	—9,	—9,			—10,		—24,		—16,	—14,			
Quotients	— 5,	—3,	*			*		+12,		+ 4,	*			
Quotients	*	—1,						— 6,		— 1,				
		0,						*		0.				

Aux quotients de la 6e ligne il fallait ajouter le coefficient de y^3; mais comme ce coefficient est 0, on a divisé immédiatement ces

quotients par les diviseurs correspondants. Pour appliquer à l'éq. en y les règles du n° **449**, il faudrait substituer $+1$ dans cette équation, ce qui donne -20, puis rejeter tous les diviseurs qui, étant diminués de 1, ne peuvent pas diviser -20. Alors il ne resterait plus à essayer que les diviseurs $+2$, $+3$, $+6$, -3, -4. En substituant -1 dans l'équation, il vient -48; et en rejetant aussi le diviseur $+6$, qui, étant augmenté de 1, ne peut pas diviser -48, il ne resterait plus à essayer, par les divisions successives, que les nombres $+2$, $+3$, -3, -4. Par là on voit que les calculs précédents seraient considérablement simplifiés.

On reconnaît à la fin que $+3$ et -4 sont racines de l'équation en y. En la divisant par le produit $(y-3)(y+4)$, il vient

$$y^2-y+2=0, \quad \text{d'où} \quad y=\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-7}.$$

Les quatre valeurs de y étant connues, la relation $x=\frac{1}{2}y$ donnera celles de x, savoir : $x=\frac{3}{2}$, $x=-2$, $x=\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-7}$.

Limites des racines des équations.

456. La méthode qui sert à trouver les racines commensurables n'est à proprement parler qu'une suite de tâtonnements, tellement coordonnées qu'on est sûr de trouver toutes les racines de cette espèce qui peuvent exister dans une équation. C'est encore par des tâtonnements qu'on obtiendra les valeurs approchées des racines incommensurables; et, pour établir les règles qui doivent les diriger, la première question qui va nous occuper sera d'assigner des *limites* aux racines, c'est-à-dire de déterminer deux nombres entre lesquels soient comprises toutes les racines positives de l'équation, et deux nombres entre lesquels soient comprises toutes les racines négatives.

457. D'abord, *proposons-nous de déterminer une limite supérieure des racines positives*.

Soient x^m le premier terme et N le plus grand coefficient négatif d'une équation donnée $X=0$. Si on considère la quantité

$$X_1=x^m-N(x^{m-1}+x^{m-2}\ldots+x+1),$$

on est sûr que la partie positive n'y est pas plus grande que dans X, et que la partie négative n'y est pas moindre. Or, il est facile d'assigner à x une valeur $x=l$, à partir de laquelle toutes les valeurs plus grandes rendront X_1 positif; donc aussi, à plus forte raison,

toutes ces valeurs rendront-elles X positif. Ainsi, à partir de $x=l$, aucune valeur ne devra anéantir X, et par conséquent on pourra prendre l pour la limite cherchée.

Pour déterminer l rappelons (55) que $x^m-1=(x-1)\times(x^{m-1}+x^{m-2}\ldots+x+1)$; en conséquence, on aura

$$X_1=x^m-\frac{N(x^m-1)}{x-1}=\frac{x^m(x-1-N)+N}{x-1}.$$

Or, sous cette forme, on voit sur-le-champ que X_1 sera positif en prenant $x=N+1$ ou $x>N+1$; donc on aura *une limite supérieure des racines positives en augmentant d'une unité le plus grand coefficient négatif de l'équation pris positivement.*

Cette règle donne $l=101$ pour limite des racines de l'équation

$$[1] \quad x^7+8x^6+2x^5-10x^4-40x^3+10x^2-14x-100=0.$$

458. En suivant la même voie, on peut parvenir à une autre règle, dans laquelle on aura égard au rang du premier terme négatif. Supposons que ce terme renferme x^{m-r}, représentons encore par N le plus grand coefficient négatif, et posons

$$X_2=x^m-N(x^{m-r}+x^{m-r-1}\ldots+x+1):$$

on pourra raisonner sur X_2 comme sur X_1. D'abord on a

$$X_2=x^m-\frac{N(x^{m-r+1}-1)}{x-1}=\frac{x^{m-r+1}[x^{r-1}(x-1)-N]+N}{x-1};$$

donc X_2 sera positif si on substitue au lieu de x une valeur plus grande que 1, et telle qu'on ait

$$x^{r-1}(x-1)>N.$$

Ces conditions seront évidemment remplies si on trouve pour x une valeur >1 qui satisfasse à l'équation $(x-1)^{r-1}(x-1)=N$, ou, ce qui est la même chose, à celle-ci:

$$(x-1)^r=N.$$

De là on tire en effet une valeur >1, savoir : $x=1+\sqrt[r]{N}$.

Ainsi on peut établir cette règle : *Du plus grand coefficient négatif de l'équation, pris positivement, extrayez la racine dont l'ordre est marqué par la différence entre le degré de l'équation et le degré du premier terme négatif, puis à cette racine ajoutez l'unité; la somme sera une limite supérieure des racines positives.*

Lorsque le premier terme négatif succède immédiatement au 1er terme de l'équation, cette limite coïncide avec celle du numéro

précédent; mais lorsqu'il est éloigné, et que le coefficient N surpasse l'unité, elle sera toujours plus approchée. Par exemple, dans l'éq. [1], elle est $1+\sqrt[3]{100}$ ou 6, limite beaucoup moindre que le nombre 101 donné par la première règle.

459. Ces deux règles sont d'une application prompte et facile: mais comme elles donnent presque toujours une limite trop éloignée, la marche suivante doit être préférée.

Supposons d'abord que l'équation donnée $X=0$ se compose d'une suite de termes positifs, après lesquels il n'y ait plus que des termes négatifs, tous de degré moindre que les premiers. Soient Y l'assemblage des termes positifs, — Y' celui des termes négatifs, et x^r la plus petite puissance de x renfermée dans Y, on aura

$$X=Y-Y'=x^r\left(\frac{Y}{x^r}-\frac{Y'}{x^r}\right).$$

Dans le quotient de Y par x^r aucun terme ne doit contenir x en dénominateur, et le contraire doit arriver à tous ceux du quotient de Y' par x^r; donc, en faisant croître x à partir d'une valeur positive quelconque, le premier quotient doit augmenter, ou au moins rester constant si Y est un monome, tandis que le second quotient doit diminuer. Ainsi, dès qu'une valeur positive $x=l$ rendra positif le polynome X ou $Y-Y'$, on sera certain qu'en y substituant au lieu de x des valeurs plus grandes, les résultats seront toujours positifs, et même qu'ils augmenteront jusqu'à l'infini. Au delà de l il n'y aura donc aucun nombre qui puisse anéantir $Y-Y'$; par conséquent l sera une limite supérieure des racines positives. De là on conclut que si on substitue dans X, au lieu de x, des nombres positifs croissants jusqu'à ce qu'on ait un résultat positif, le nombre qui donnera ce résultat sera la limite cherchée.

Maintenant, supposons que l'équation renferme des termes positifs entremêlés de termes négatifs. Il est toujours permis de considérer le premier terme de l'équation comme positif. Réunissons-y les termes positifs qui peuvent se trouver avant le premier terme négatif, et, faisant abstraction des autres termes positifs, comparons cette somme avec celle des termes négatifs. Le raisonnement ci-dessus prouve qu'on obtiendra une limite supérieure des racines positives en déterminant une valeur positive de x qui rende la première somme supérieure à la seconde; et c'est à quoi l'on réussit facilement en substituant au lieu de x des nombres croissants à partir de zéro.

Dans le cas qui nous occupe, où les termes positifs et négatifs sont entremêlés, on pourra souvent partager le 1er membre de l'équation en plusieurs parties, dans chacune desquelles on aura soin de mettre un ou plusieurs termes positifs, suivis de termes négatifs de degré moindre. Alors on déterminera, comme plus haut, par des essais successifs, une valeur positive à partir de laquelle toutes ces parties soient positives; et cette valeur pourra être prise pour la limite cherchée. Souvent aussi il y aura plusieurs manières d'opérer le partage des termes de l'équation, ce qui pourra donner différentes limites; mais on choisira toujours la limite la moins élevée.

Dans tous les cas, il est à remarquer non-seulement que la limite à laquelle on parvient jouit de la propriété que les nombres plus grands, étant substitués dans l'équation, donnent des résultats positifs, mais encore que ces résultats vont en augmentant jusqu'à l'infini. La première condition est la seule nécessaire pour qu'un nombre soit limite supérieure des racines positives : car il résulte d'un théorème, qui sera démontré plus loin (**466**), que tout nombre au-dessus de la plus grande racine positive doit donner un résultat positif.

Appliquons ce qui précède à l'équation

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x - 8 = 0.$$

En comparant le premier terme avec les termes négatifs, on considérera seulement le polynome $x^4 - 3x^3 - 3x - 8$: or, si on essaye successivement $x = 0, 1, 2, 3, 4$, on trouve que $x = 4$ donne un résultat positif; donc ce nombre peut être pris pour limite.

Mais le premier membre de l'équation se présente de lui-même comme la somme des deux quantités $x^4 - 3x^3$ et $2x^2 - 3x - 8$, dont l'une devient zéro, et l'autre devient positive, par l'hypothèse $x = 3$. Cela suffit pour qu'on puisse prendre 3 pour limite.

Soit encore l'équation, qui nous a déjà servi d'exemple (**455**)

$$[1] \quad x^7 + 8x^6 + 2x^5 - 10x^4 - 40x^3 + 10x^2 - 14x - 100 = 0.$$

Parmi les différentes manières de décomposer le 1er membre, je choisirai celle-ci :

$$(x^7 - 100) + (8x^6 + 2x^5 - 10x^4 - 40x^3) + (10x^2 - 14x)$$

$$\text{ou} \quad (x^7 - 100) + 8x^3\left(x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - 5\right) + 10x\left(x - \frac{7}{5}\right).$$

Comme chaque partie devient positive par la valeur $x = 2$, on est

sûr que 2 est une limite supérieure des racines positives. Cette limite est encore plus approchée que celle du n° 458.

460. Newton employait un procédé assez commode, par lequel on trouve souvent une limite plus approchée que par les autres. Il consiste à chercher un nombre tel que si on le retranche des racines de l'équation proposée, il en résulte une transformée dont tous les termes soient positifs. Alors il est évident qu'aucune valeur positive ne pourra satisfaire à cette transformée, et que par conséquent le nombre dont il s'agit surpassera nécessairement la plus grande racine positive de la proposée.

Représentons par l ce nombre inconnu, et par $f(x)=0$ l'équation donnée : pour diminuer de l toutes les racines de cette équation, on fera $x=l+y$, et la transformée sera

$$f(l)+f'(l).y+\tfrac{1}{2}f''(l).y^2+\tfrac{1}{2\cdot3}f'''(l).y^3\ldots.+y^m=0.$$

Or, on veut que tous les coefficients de cette équation soient positifs; par conséquent la question se réduit à trouver une valeur de x qui rende positifs tous les polynomes $f(x)$, $f'(x)$, $\frac{1}{2}f''(x)$, etc. Il est évident qu'on pourra prendre cette valeur pour celle de l.

$f(x)$ étant du degré m, $f'(x)$ est du degré $m-1$, $f''(x)$ est du degré $m-2$, et ainsi de suite jusqu'à la dernière quantité, qui ne contient plus x et qui est essentiellement positive. Il convient donc de déterminer d'abord une valeur de x qui rende positive l'avant-dernière quantité, ce qui sera toujours facile puisqu'elle est du 1er degré; ensuite on augmentera cette valeur, si cela est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle rende aussi la quantité précédente positive; et on continuera de même, en remontant successivement jusqu'à $f(x)$. Pour plus de commodité, on n'emploie dans ces essais que des nombres entiers.

Pour exemple soit l'équation

$$x^5+x^4-4x^3-6x^2-7000x+800=0.$$

On aura

$$\begin{aligned}
f(x)&=x^5+x^4-4x^3-6x^2-7000x+800,\\
f'(x)&=5x^4+4x^3-12x^2-12x-7000,\\
\tfrac{1}{2}f''(x)&=10x^3+6x^2-12x-6,\\
\tfrac{1}{2\cdot3}f'''(x)&=10x^2+4x-4,\\
\tfrac{1}{2\cdot3\cdot4}f''''(x)&=5x+1.
\end{aligned}$$

On voit sur-le-champ qu'en faisant $x=1$, les deux derniers polynomes sont positifs. $\frac{1}{2}f''(x)$ le deviendra en prenant $x=2$; et

$f'(x)$, en s'élevant jusqu'à $x=7$. Comme cette valeur rend aussi $f(x)$ positif, on conclut qu'on peut prendre 7 pour limite. On trouverait $7000+1$ par la règle du nº 457, et $1+\sqrt{7000}$ ou 84 par celle du nº 458.

Remarque. On peut prouver d'une manière générale que, dans ces essais, on n'aura jamais à revenir sur les précédents. Supposons, par exemple, qu'en commençant par le polynome du 1er degré, et s'élevant successivement jusqu'à $f''(x)$, on ait trouvé une valeur $x=l$ qui rende positifs tous les polynomes $f''(x)$, $f'''(x)$, $f''''(x)$,... Augmentons x et changeons x en $x+h$: comme les polynomes dérivés de $f''(x)$ sont $f'''(x)$, $f''''(x)$,... il est clair que $f''(x)$ deviendra $f''(x)+f'''(x)h+\frac{1}{2}f''''(x)h^2+\ldots$; par conséquent, dès que la valeur $x=l$ rend $f''(x)$, $f'''(x)$,... positifs, on est certain qu'une valeur $>l$ rendra encore $f''(x)$ positif. On voit même que plus x surpassera l, plus $f''(x)$ croîtra.

461. Jusqu'ici il n'a été question que de la limite supérieure des racines positives. Elle est en effet la plus importante, car elle sert à trouver toutes les autres. Pour déterminer une *limite inférieure* de ces racines, faisons $x=\frac{1}{y}$ dans l'équation proposée, et représentons par l la limite supérieure des racines positives de la transformée. Il est évident que $\frac{1}{l}$ sera un quotient moindre que la plus petite racine positive de la proposée, de sorte qu'on pourra prendre ce quotient pour la limite cherchée. Dans les applications, il convient qu'elle soit la plus grande possible; par conséquent on choisira pour l la limite la plus rapprochée qu'on pourra.

Si on n'avait pas d'autre but que d'obtenir une limite inférieure différente de zéro, on y parviendrait sur-le-champ *en divisant le dernier terme de l'équation donnée par la somme de ce dernier terme et du plus grand coefficient de signe contraire à ce terme.*

Pour démontrer cette règle, soit l'équation

$$\text{[A]}\qquad x^m+Px^{m-1}\ldots+Sx^2+Tx\pm U=0.$$

En faisant $x=\frac{1}{y}$, et ramenant l'équation résultante à la forme ordinaire, il vient

$$y^m+\frac{P}{\pm U}y^{m-1}+\frac{S}{\pm U}y^{m-2}\ldots+\frac{P}{\pm U}y+\frac{1}{\pm U}=0.$$

Supposons que dans [A] le plus grand coefficient de signe con-

traire à $\pm$ U ait pour valeur absolue R, il est clair que $\frac{R}{U}$ sera le plus grand coefficient négatif de la transformée; donc on peut prendre $l=\frac{R}{U}+1$, et par suite $\frac{1}{l}=\frac{U}{U+R}$, conformément à la règle énoncée.

462. Quant aux limites des racines négatives, on les trouve en changeant x en $-x$ dans l'équation donnée. Par là, on change les signes des racines, de sorte qu'en cherchant les limites des racines positives de la transformée et les affectant du signe —, on aura les limites des racines négatives de la proposée.

463. Lorsque dans une équation tous les termes ont le même signe, il est clair qu'aucun nombre positif ne peut satisfaire à l'équation; ainsi il n'y a point lieu dans ce cas à chercher les limites des racines positives. Il n'y a pas lieu non plus à chercher des limites aux racines négatives d'une équation dont tous les termes de degré pair ont un même signe, tandis que ceux de degré impair ont le signe contraire. Il est clair, en effet, qu'en y substituant un nombre négatif quelconque, tous les termes deviendront de même signe, et ne pourront point donner une somme égale à zéro.

Que les équations soient complètes ou incomplètes, ces remarques sont également vraies. Toutefois, si le dernier terme manque, l'équation a une ou plusieurs racines nulles, mais en faisant abstraction de ces racines les remarques précédentes subsisteront.

464. Je placerai ici une proposition qui a un rapport intime avec les recherches relatives aux limites, et qui est d'un fréquent usage dans la haute analyse.

Soit un polynome X *de la forme*

$$X=Mx^m+Nx^n+Px^p+\text{etc.}$$

dans lequel les exposants m, n, p,... *sont entiers ou fractionnaires, mais positifs et décroissants. Il existe toujours une valeur positive de* x, *telle qu'en donnant à* x *des valeurs de plus en plus grandes, le polynome* X *prendra des valeurs de même signe que son* 1er *terme, et qui iront en augmentant jusqu'à l'infini.*

Mettons d'abord M en facteur commun, et écrivons

$$X=M\left(x^m+\frac{N}{M}x^n+\frac{P}{M}x^p+\text{etc.}\right).$$

Dans les parenthèses, parmi les termes en x^n, x^p,... il peut s'en

trouver qui aient des coefficients positifs : représentons par Y la somme de ces termes, et par Y' celle des termes affectés de coefficients négatifs, on aura

$$X = M(x^m + Y - Y') = M\left[x^m\left(1 - \frac{Y'}{x^m}\right) + Y\right].$$

Il est clair que tous les termes du quotient de Y' par x^m doivent avoir en dénominateurs des puissances positives de x, et que par conséquent, en donnant à x une très-grande valeur positive, ce quotient sera < 1. Par suite, la quantité entre crochets sera évidemment positive, car x^m est positif et Y ne renferme que des termes positifs; donc X sera de même signe que M ou Mx^m.

Représentons par λ cette très-grande valeur, et supposons qu'on fasse croître x à partir de λ : le quotient de Y' par x^m ira en décroissant, tandis que x^m et Y augmenteront indéfiniment; donc la quantité X ira elle-même en croissant jusqu'à l'infini, et c'est ce qu'on voulait démontrer.

Si on veut assigner une valeur à λ, on peut y parvenir, comme pour les limites, en substituant au lieu de x des nombres positifs croissants jusqu'à ce que x^m surpasse Y'; mais on y parviendra encore par le procédé suivant, déjà employé n° 388. Supposons que le quotient de Y' par x^m soit

$$\frac{Y'}{x^m} = \frac{R}{x^r} + \frac{S}{x^s} + \frac{T}{x^t} + \text{etc.},$$

et qu'il renferme α termes. Posons les inégalités

$$\frac{R}{x^r} < \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{S}{x^s} < \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{T}{x^t} < \frac{1}{\alpha}, \quad \text{etc.},$$

ou, ce qui est la même chose, celles-ci

$$x^r > \alpha R, \quad x^s > \alpha S, \quad x^t > \alpha T, \quad \text{etc.}$$

En essayant successivement pour x des nombres de plus en plus grands, on en trouvera un qui satisfera à toutes ces conditions, et on pourra le prendre pour λ.

Remarques. Quand les exposants m, n, p, ... sont tels que les termes du polynome X ne deviennent pas imaginaires en y mettant des valeurs négatives à la place de x, on pourra aussi assigner une valeur négative de x, à partir de laquelle toutes les valeurs négatives plus grandes feront prendre à X des valeurs de

même signe que le 1er terme Mx^m, et croissantes jusqu'à l'infini. En effet, en faisant $x=-y$, X devient

$$X=M(-y)^m+N(-y)^n+\text{etc.}$$

De quelque manière que les signes se distribuent, on peut, d'après ce qui précède, déterminer une valeur positive $y=\lambda'$, qui remplisse à l'égard du polynome précédent les conditions de l'énoncé; donc la valeur $x=-\lambda'$ sera celle qu'il s'agit d'assigner.

Lorsque tous les exposants du polynome X sont entiers, les termes ne cessent pas d'être réels quand on y substitue des valeurs négatives de x; par conséquent, dans ce cas, on peut toujours assigner à x une limite positive λ, et une limite négative $-\lambda'$, telles qu'en faisant croître x positivement à partir de λ, ou négativement à partir de $-\lambda'$, il en résultera, pour le polynome X, des valeurs qui seront constamment de même signe que son premier terme, et qui pourront devenir aussi grandes qu'on voudra.

Théorèmes sur les indications que fournissent les substitutions de deux nombres quelconques à la place de l'inconnue.

465. Je rappellerai d'abord l'attention sur une remarque qu'il faudrait placer ici, si elle n'avait pas déjà été faite (**225**), savoir : *que si dans un polynome de la forme* $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\text{etc.}$, *on fait varier* x *d'une manière continue, le polynome variera aussi d'une manière continue*. Passons aux théorèmes que nous avons en vue.

466. Théorème I. *Si deux nombres substitués successivement au lieu de* x *dans une équation* $X=0$, *de la forme*

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}\ldots=0,$$

donnent des résultats de signes contraires, l'équation a au moins une racine réelle comprise entre ces deux nombres.

Représentons par α et β les deux nombres substitués qui donnent des résultats de signes contraires; et, pour fixer les idées, soit $\alpha<\beta$. Concevons, par la pensée, qu'on substitue successivement dans X, au lieu de x, toutes les valeurs depuis α jusqu'à β; le polynome devra lui-même varier d'une manière continue. Mais, par hypothèse, en y faisant d'abord $x=\alpha$ puis $x=\beta$, on doit avoir deux résultats de signes contraires; donc parmi les valeurs qu'il

prend quand x croît depuis α jusqu'à β, la valeur zéro doit se trouver au moins une fois. Or, la valeur de x par laquelle X devient zéro est une racine de l'éq. $X=0$; donc, etc.

Remarque. Il faut bien observer qu'il pourrait y avoir erreur en affirmant qu'il ne doit y avoir entre α et β qu'*une seule racine* de l'éq. $X=0$. En effet, le polynome X, sans cesser de varier d'une manière continue, peut, par exemple, avoir d'abord des valeurs décroissantes qui s'arrêtent à une certaine limite, après laquelle il croîtra jusqu'à une limite à partir de laquelle il reprendra encore des valeurs décroissantes, qui, elles-mêmes, après s'être arrêtées, seront suivies de valeurs croissantes, et ainsi de suite. Par conséquent, rien n'empêche que X, dans l'intervalle de $x=\alpha$ à $x=\beta$, n'ait passé plusieurs fois par zéro.

467. Théorème II. *Lorsque deux quantités comprennent entre elles une racine de l'éq.* $X=0$, *et n'en comprennent qu'une, si on les substitue dans l'équation, elles donneront deux résultats de signes contraires. Et, en général, toutes les fois que les deux quantités comprennent un nombre impair de racines, les deux résultats seront de signes contraires; mais quand elles ne comprennent pas de racines, ou quand elles en comprennent un nombre pair, les résultats seront de même signe.*

Supposons que a soit une racine réelle comprise entre α et β, et qu'elle soit seule. Le polynome X est divisible par $x-a$, et en nommant Y le quotient, on peut mettre X sous la forme

$$X=(x-a)Y.$$

Faisons successivement $x=\alpha$ et $x=\beta$; les valeurs de Y devront être de même signe : autrement il y aurait entre α et β une racine de l'éq. $Y=0$, laquelle serait une nouvelle racine de $X=0$ comprise entre α et β, ce qui est contre l'hypothèse. Mais d'ailleurs le facteur $x-a$ changera de signe : car les différences $\alpha-a$ et $\beta-a$ sont de signes contraires, attendu que a est entre α et β : donc les deux résultats qu'on obtient, en substituant α et β dans X, sont de signes contraires.

Supposons plus généralement qu'il y ait entre α et β un nombre impair de racines a, b, c, etc. On sait que X est divisible par le produit $(x-a)(x-b)(x-c)$..., de sorte qu'en nommant encore Y le quotient, on aura

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\times Y.$$

On démontrera comme tout à l'heure qu'en faisant $x=\alpha$ et $x=\beta$, les deux valeurs correspondantes de Y auront le même signe, tandis que chacun des facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$,... change de signe; et comme ces facteurs sont en nombre impair, on en conclut que les résultats des substitutions de α et de β dans X doivent être de signes contraires.

Cette même démonstration prouve que s'il n'y a point de racines entre α et β, ou que s'il y en a un nombre pair, les résultats des deux substitutions auront le même signe.

Remarque. Le théorème qu'on vient de démontrer doit surtout tenir en garde contre quelques assertions hasardées auxquelles on pourrait se laisser entraîner. Par exemple, de ce que les substitutions de deux quantités donnent des résultats de signes contraires, on peut bien conclure, d'après le théorème I, que ces quantités comprennent une racine; mais on aurait tort d'affirmer qu'elles n'en comprennent qu'une; car le théorème II prouve qu'il pourrait y en avoir plusieurs en nombre impair. Pareillement, lorsque les résultats sont de même signe, on ne saurait affirmer que les deux quantités ne comprennent aucune racine, car il pourrait arriver qu'il y en eût un nombre pair.

468. THÉORÈME III. *Lorsqu'une équation n'a pas de racines réelles, si on y substitue, au lieu de* X, *des quantités réelles quelconques, les résultats seront toujours de même signe.*

En effet, si l'on trouvait deux résultats de signes contraires, l'équation devrait avoir au moins une racine réelle comprise entre les deux quantités substituées, ce qui est contre la supposition.

Remarque. Quand on a divisé une équation par tous les facteurs correspondants aux racines réelles, l'équation restante doit être dans le cas dont il s'agit. Mais une équation qui contiendrait des racines réelles donnerait aussi des résultats de même signe, si chacune y entrait un nombre pair de fois. En effet, en nommant a, b,... ces racines, on peut alors écrire l'équation ainsi:

$$(x-a)^{2n}(x-b)^{2n'}\ldots\times Y=0.$$

Or, quelque valeur réelle qu'on substitue au lieu de x, les facteurs $(x-a)^{2n}$, $(x-b)^{2n'}$,... ne sauraient devenir négatifs; et, d'un autre côté, Y ne peut point changer de signe, puisque l'éq. $Y=0$ n'a que des racines imaginaires.

469. Plusieurs conséquences du théor. I doivent se placer ici.

1° *Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.*

Le premier terme étant toujours supposé positif, considérons d'abord le cas où le dernier terme est un nombre négatif $-U$. Nommons $+l$ une limite supérieure des racines positives, déterminée comme il a été expliqué précédemment. Si dans l'équation on fait $x=+l$, on aura un résultat positif; et si on fait $x=0$, on aura le résultat négatif $-U$. Donc, entre 0 et $+l$, l'équation a au moins une racine réelle, laquelle ne peut être que positive.

Maintenant, considérons le cas où le dernier terme est positif. Remplaçons x par $-x$; le premier terme deviendra négatif, et on le ramènera à être positif en changeant tous les signes de l'équation. Par là le dernier terme deviendra négatif; donc, en vertu de ce qui vient d'être démontré, on est sûr que la transformée a une racine positive; donc la proposée a une racine négative.

2° *Toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, dont l'une est positive et l'autre négative.*

Faisons $x=0$ et $x=+l$, on aura deux résultats de signes contraires; donc l'équation a au moins une racine positive. Si on y change x en $-x$, la transformée aura encore son premier terme positif, et son dernier terme négatif; donc elle aura une racine positive; donc la proposée en aura une négative.

Remarque. Quand l'équation est de degré pair et que son dernier terme est positif, ces raisonnements ne font plus connaître si l'équation a quelque racine réelle, parce qu'alors les substitutions ne donnent plus des résultats de signes contraires. C'est qu'en effet les équations qui n'ont que des racines imaginaires doivent être de cette forme : car, si elles étaient de degré impair, elles auraient au moins une racine réelle; et si, étant de degré pair, leur dernier terme était négatif, elles en auraient au moins deux.

470. Par des raisonnements analogues à ceux du numéro précédent, on tire du théorème II les conséquences qui suivent:

1° *Dans une équation de degré impair, les racines réelles de signe contraire au dernier terme sont en nombre impair, et les racines de même signe, s'il y en a, sont en nombre pair.*

Lorsque le dernier terme est négatif, les substitutions $x=0$ et $x=+l$ donnant des résultats de signes différents, on conclut, en vertu du théorème II, que les racines positives sont en nombre

impair. Si on change x en $-x$, l'équation se transforme en une autre qu'on ramène à avoir son premier terme et son dernier terme positifs : or, qu'on fasse dans celle-ci $x=0$ ou x égal à la limite supérieure de ses racines positives, on a deux résultats positifs; donc les racines positives de cette transformée, et par suite les racines négatives de la proposée, ne peuvent être qu'en nombre pair.

Lorsque l'équation proposée a son dernier terme positif, la transformée aura son dernier terme négatif. On pourra donc lui appliquer les dernières conséquences, et par suite on conclura que la proposée a un nombre impair de racines négatives et un nombre pair de racines positives.

2° *Dans une équation de degré pair, si le dernier terme est négatif, les racines positives sont en nombre impair et les racines négatives aussi en nombre impair ; et si le dernier terme est positif, les racines de chaque sorte ne peuvent exister qu'en nombre pair.*

Cette conséquence s'obtient si facilement en reprenant le raisonnement ci-dessus, qu'il est inutile de s'y arrêter davantage.

Remarque. Dans tous les cas, on voit que le nombre total des racines réelles est de même parité que le degré de l'équation, c'est-à-dire qu'il est impair ou pair, selon que ce degré est impair ou pair. Donc, s'il y a des racines imaginaires dans l'équation, elles y sont en nombre pair, ce qui est conforme à la remarque déjà faite au numéro précédent, et à la proposition qui termine le n° **396**.

471. Voici encore une proposition très-simple, qui doit trouver sa place ici. *Si une équation se compose d'une suite de termes positifs, après lesquels il n'y ait plus que des termes négatifs, elle aura une racine positive et n'en aura qu'une.*

Puisque son dernier terme est négatif, elle a certainement une racine positive (**469**); et pour démontrer qu'elle n'en a qu'une, on raisonnera comme dans le n° **459**. Soit Y la somme des termes positifs, $-Y'$ celle des termes négatifs, et x^r la plus petite puissance de x renfermée dans Y : on peut écrire l'équation sous cette forme

$$x^r\left(\frac{Y}{x^r}-\frac{Y'}{x^r}\right)=0.$$

Soit a la valeur positive qui satisfait à l'équation, en faisant $x=a$ on devra avoir $\frac{Y}{x^r}=\frac{Y'}{x^r}$. Or, en augmentant x, le 1er membre de cette égalité augmentera ou tout au moins restera constant, tan-

dis que le 2e diminuera ; et le contraire arrivera en diminuant x. Donc $x = a$ est la seule racine positive de l'équation.

Séparation des racines, par la méthode de Lagrange.

472. Les règles qui servent à découvrir les racines commensurables étant d'une application facile, il convient, toutes les fois qu'on a une équation à résoudre, de chercher d'abord les racines de cette espèce, tant égales qu'inégales, et de les supprimer au moyen de la division. A la vérité, ces racines pourraient se trouver par les mêmes procédés que les racines incommensurables, mais les calculs qu'ils exigent sont laborieux, et ils le sont d'autant plus que le degré de l'équation à laquelle on les applique est plus élevé ; c'est pourquoi l'on doit toujours commencer par abaisser ce degré autant que possible ; et la suppression des racines commensurables est un moyen d'opérer cet abaissement.

La même raison suffirait pour rechercher si l'équation a des racines égales, afin de la décomposer, dans le cas où il en existerait, en d'autres équations plus simples dont toutes les racines fussent inégales (**416**). Mais cette préparation est indispensable pour le succès des méthodes qui vont être exposées.

En conséquence, je supposerai toujours, dans ce qui va suivre, que l'équation à résoudre n'a plus ni racines commensurables, ni racines égales, de sorte qu'en parlant de racines réelles il ne sera question que de racines incommensurables et inégales.

473. La recherche de ces racines se partagera en deux parties distinctes. Dans la première, on déterminera, pour chaque racine, deux nombres entre lesquels elle sera comprise, et comprise toute seule : c'est ce qu'on appelle *la séparation des racines*. Dans la seconde, on se proposera d'évaluer les racines avec tel degré d'approximation qu'on voudra.

Si on change dans une équation l'inconnue x en $-x$, et qu'on prenne avec le signe — les racines positives de la transformée, on aura les racines négatives de la proposée. Ainsi, il suffira de montrer comment on trouve les racines positives des équations.

La première méthode rigoureuse qui ait été connue pour opérer la séparation des racines porte le nom de Lagrange : c'est elle que je vais exposer d'abord.

474. Soit une équation $X = 0$, qui n'a plus de racines égales.

Imaginons qu'on y substitue successivement, au lieu de l'inconnue x, des nombres positifs p, q, r, s,... formant une suite croissante, commençant à la limite inférieure des racines positives, finissant à la limite supérieure, et en outre tellement choisis qu'entre chaque nombre et le suivant il ne puisse tomber qu'une seule racine de l'équation. D'après le théorème II (**467**), on saura avec certitude, par les signes des résultats des substitutions, quels sont ceux de ces nombres qui comprennent véritablement une racine ou qui n'en comprennent point; et alors la séparation des racines positives serait complète.

La condition essentielle à laquelle sont assujettis les nombres p, q, r, s,... c'est que deux d'entre eux, pris consécutivement, ne puissent pas comprendre plus d'une racine : or, cette condition sera remplie, si on choisit pour ces nombres les termes d'une progression arithmétique dont la raison soit une quantité δ moindre que la plus petite différence qui existe entre les racines positives de l'équation proposée. Ainsi, la difficulté se réduit à connaître la raison δ. C'est ce que NEWTON avait déjà remarqué dans son *Arithmétique universelle*, et LAGRANGE y est parvenu au moyen de l'équation aux carrés des différences des racines de la proposée (*).

On a montré (**440**) comment elle s'obtient : supposons qu'on l'ait trouvée et qu'on ait évalué, par les procédés connus (**461**), la limite inférieure λ de ses racines positives : on sera sûr que cette limite est moindre que le carré de la plus petite différence qui existe entre les racines de la proposée; par conséquent on pourra faire $\delta = \sqrt{\lambda}$. Comme $\sqrt{\lambda}$ est ordinairement incommensurable, on prendra préférablement un nombre rationnel $< \sqrt{\lambda}$.

Lorsqu'on pourra trouver pour λ un nombre > 1, on choisira pour δ le nombre entier au-dessous de $\sqrt{\lambda}$; et alors, pour opérer la séparation des racines, on n'aura qu'à substituer des nombres entiers dans l'éq. $X = 0$. Quand on aura reconnu ainsi qu'il y a une racine entre deux de ces nombres, on pourra encore substituer les nombres entiers intermédiaires, et déterminer, par les signes des résultats, les deux nombres entiers consécutifs entre lesquels elle est comprise.

(*) Cet usage de l'équation aux carrés des différences avait été indiqué, en 1762, par WARING, dans ses *Miscellanea*. Mais, dit LAGRANGE, « je ne connaissais pas « cet ouvrage lorsque je composai mon premier Mémoire sur les équations. »

Le plus souvent λ sera une fraction <1, par suite δ sera aussi une fraction <1, et on aurait à substituer des nombres fractionnaires. Mais on les évitera par une simple transformation, en faisant $x = \delta x'$. En effet, pour que deux valeurs de x aient entre elles une différence $>\delta$, il est clair que les valeurs de x' doivent différer entre elles de plus d'une unité; et dès lors on pourra trouver par des substitutions entières les deux nombres consécutifs qui comprennent chaque racine réelle de la transformée en x'.

475. Envisagée sous un point de vue purement théorique, la méthode précédente résout complétement le problème de la séparation des racines. Mais si on considère, d'une part, la longueur des calculs nécessaires pour former l'équation aux carrés des différences; et, de l'autre, la multitude des substitutions successives qu'on peut avoir à effectuer, on jugera que l'application de cette méthode doit au moins être très-pénible.

Afin de diminuer le travail des substitutions, on aura soin, dans chaque cas particulier, de prendre pour limite inférieure et pour limite supérieure des racines de l'équation proposée, les nombres les plus rapprochés qu'on pourra, et aussi de choisir pour δ le plus grand nombre possible.

Après avoir déterminé les limites des racines, tant positives que négatives, il sera bien de substituer immédiatement les nombres entiers consécutifs compris entre ces limites; et s'il arrive que les signes des résultats indiquent autant de racines réelles qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation, comme on sait qu'il ne peut pas y avoir un plus grand nombre de racines, on sera dispensé de calculer l'équation aux carrés des différences. En général, on ne devra omettre aucun moyen propre à éclairer sur la nature des racines, afin d'en profiter pour simplifier les calculs.

Le cas où l'on saurait d'avance que toutes les racines sont réelles mérite surtout d'être remarqué. Il est clair qu'alors en opérant des substitutions de plus en plus rapprochées, entre les limites extrêmes qui comprennent toutes les racines, on finira nécessairement par trouver dans les résultats un nombre de changements de signes égal au degré de l'équation; par conséquent alors toutes les racines seront séparées. Ce cas reviendra plus loin, n° 492.

476. *Remarque.* Dans le n° 459, pour arriver à l'équation aux carrés des différences, on passe par l'équation aux différences, et celle-ci se trouve par une élimination. Or le seul procédé général

d'élimination que nous ayons exposé est celui du plus grand commun diviseur ; et ce que je veux faire observer ici, c'est qu'alors il est peu important d'obtenir une équation finale qui renferme toutes les différences des racines et qui ne renferme qu'elles.

Supposons d'abord que l'équation finale renferme toutes ces différences, et qu'elle n'ait que le défaut de contenir des racines étrangères : la limite inférieure des racines de cette équation sera certainement moindre que la plus petite différence des racines de la proposée, et par conséquent on pourra la prendre pour valeur de δ. Supposons, en second lieu, que l'équation finale manque de quelques différences : c'est que, dans les divisions qu'on opère pour effectuer l'élimination, on aura supprimé quelques facteurs. Or, en égalant ces facteurs à zéro, on a des équations qui doivent contenir ces différences; donc, si on évalue les limites inférieures des racines de toutes ces équations, aussi bien que celle de l'équation finale, on sera encore assuré qu'on peut prendre δ égal à la plus petite de ces limites.

477. Je vais maintenant présenter des exemples d'équations, dans lesquelles il s'agira d'opérer la séparation des racines.

Exemple I. Soit l'équation

$$x^3 + x - 3 = 0.$$

On voit sur-le-champ qu'elle tombe dans le cas du n° **471**, et que par conséquent elle a une racine positive unique. Si on veut avoir la partie entière de cette racine, il suffira donc de substituer au lieu de x les nombres 0, 1, 2,.... jusqu'à ce qu'on trouve deux résultats de signes contraires.

Nombres substitués..........	0, 1, 2;
Résultats correspondants.....	—3,—1,+7.

Ainsi la racine dont il s'agit est comprise entre 1 et 2.

Pour chercher les racines négatives, on changera x en $-x$. La transformée sera $x^3 + x + 3 = 0$; et comme tous ses termes ont le signe $+$, il est clair qu'elle n'a point de racine positive. Donc la proposée n'a point de racine négative; donc les deux autres racines sont imaginaires.

Exemple II. Soit l'équation

$$x^4 - 5x - 10 = 0.$$

Elle est encore dans le cas du n° **471**; et si on y remplace x par

$-x$, elle devient celle-ci, $x^4+5x-10=0$, laquelle est aussi dans le même cas. Donc la proposée n'a que deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative. La partie entière se trouvera donc par les substitutions entières comme ci-dessous :

Nomb. subst.	0,	1,	2,	3,	‖	0,	—1,	— 2,
Rés. corresp.	—10,	—14,	—4,	+56.	‖	—10,	—4,	+16.

Par conséquent, la racine positive est entre 2 et 3; et la racine négative est entre -1 et -2.

Exemple III. Soit l'équation

$$x^4+x^2-65x+5=0.$$

Pour ne point pousser trop loin les substitutions, déterminons d'abord les limites supérieures des racines. En écrivant l'équation sous cette forme

$$x(x^3+x-65)+5=0,$$

et cherchant une valeur de x qui rende positif x^3+x-65, on reconnaît que 4 est limite supérieure des racines positives. Si ensuite on change x en $-x$, tous les termes de l'équation proposée deviennent positifs; donc elle n'a point de racines négatives.

L'équation donnée n'ayant point de second terme, la somme des racines doit être nulle, par conséquent ces racines ne peuvent pas être toutes positives. Donc, puisque l'équation n'a pas de racines négatives, elle doit en avoir d'imaginaires. Mais, d'un autre côté, on sait que les racines imaginaires sont en nombre pair (470); donc, si l'équation a véritablement des racines réelles, elles seront positives et au nombre de deux.

Maintenant il faut essayer les substitutions des nombres entiers positifs jusqu'à la limite 4.

Nomb. subst..	0,	1,	2,	3,	4;
Rés. corresp.	+5,	—58,	—105,	—100,	+17.

Les signes montrent qu'il y a en effet deux racines positives; l'une entre 0 et 1, l'autre entre 3 et 4.

Exemple IV. Soit encore l'équation

$$x^3-7x+7=0.$$

Puisqu'elle est de degré impair, elle a au moins une racine réelle de signe contraire au dernier terme, c'est-à-dire négative. Elle n'a pas d'autre racine négative; car en changeant x en $-x$, elle devient $x^3-7x-7=0$; et celle-ci n'a qu'une seule racine po-

sitive (471). La substitution des nombres entiers suffira pour déterminer la partie entière de cette racine positive.

Nomb. subst.	0,	1,	2,	3,	4;
Rés. corresp.	—7,	—13,	—13,	—1,	+29.

Donc la racine positive de la transformée en $-x$ est entre 3 et 4, donc la racine négative de la proposée est entre -3 et -4.

Si les deux autres racines sont réelles, elles doivent être positives; mais jusqu'ici leur existence reste incertaine. Pour lever le doute, essayons la substitution des nombres entiers.

Nomb. subst.	0,	1,	2,	3;
Rés. corresp.	7,	1,	1,	13.

On ne prolonge point les substitutions davantage, parce que le nombre $x=3$ donnant $x^3>7x$, il est évident que les nombres plus grands donneront des résultats positifs. Les résultats ci-dessus étant tous de même signe, on n'aperçoit pas encore qu'il y ait deux racines positives; et si elles existent, on ne les reconnaîtra qu'en substituant des nombres plus rapprochés.

Toutefois, il faut observer que dans le cas où les deux racines seraient égales, on n'obtiendrait jamais des résultats de signes contraires. Il est donc nécessaire d'appliquer à l'équation donnée les procédés connus pour juger si elle a des racines égales. On apprend ainsi que les racines de cette équation sont inégales.

Cela posé, pour arriver sûrement à la séparation des deux racines douteuses, on aura recours à l'équation aux carrés des différences. Dans l'exemple dont nous nous occupons en ce moment on a trouvé (440) que cette équation est

$$z^3-42z^2+441z-49=0\ (*).$$

Soit fait $z=\frac{1}{u}$, il viendra

$$u^3-9u^2+\frac{42}{49}u-\frac{1}{49}=0.$$

On peut écrire cette équation ainsi : $u^2(u-9)+\frac{42}{49}(u-\frac{1}{42})=0$; et alors on voit facilement que 9 est limite supérieure des valeurs

(*) Comme cette équation n'a point de racines nulles, on apprendrait par là, si on ne le savait déjà, que la proposée n'a point de racines égales. D'un autre côté, comme les signes de l'équation en z sont alternatifs, on peut affirmer que la proposée a toutes ses racines réelles; mais cette conséquence est fondée sur une théorie qui sera exposée plus tard (493).

positives de u. Donc $\lambda = \frac{1}{9}$ est une limite inférieure des valeurs positives de z; donc enfin on aura une quantité moindre que la plus petite différence des racines de la proposée, en prenant $\delta = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.

Tel serait l'intervalle à mettre entre les substitutions. Mais afin d'éviter les fractions, on fera $x = \frac{1}{3}x'$; et on substituera des nombres entiers dans la transformée en x'. Cette transformée est

$$x'^3 - 63x' + 189 = 0.$$

Pour diminuer le nombre des substitutions, il sera bon de déterminer les limites supérieure et inférieure des valeurs positives de x'. Si on remonte à la proposée, on voit d'abord qu'on peut prendre $\sqrt{7}$ pour limite supérieure de x. Puis, en changeant x en $\frac{1}{x}$, elle devient $x^3 - x^2 + \frac{1}{7} = 0$; et comme dans celle-ci l'unité est limite supérieure, il s'ensuit que dans la proposée l'unité est limite inférieure. Ainsi, dans cette équation, les racines positives sont entre 1 et $\sqrt{7}$; et par suite les racines positives de l'éq. en x' sont entre 3×1 et $3 \times \sqrt{7}$, ou entre 3 et $\sqrt{63}$, ou enfin entre 3 et 8. En conséquence, on ne devra substituer dans l'éq. en x' aucun nombre au delà de 8.

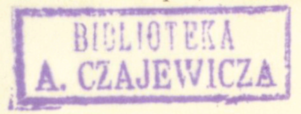
Nomb. subst.	3,	4,	5,	6;
Rés. corresp.	+ 27,	+ 1,	− 1,	+ 27.

Sans aller plus loin, les signes des résultats indiquent deux racines positives, l'une entre 4 et 5, l'autre entre 5 et 6. Par suite, la proposée en aura aussi deux, l'une entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$; l'autre entre $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{3}$. On a déjà trouvé qu'une racine était comprise entre −3 et −4 : ainsi les trois racines de l'équation proposée sont réelles, et complétement séparées.

Méthodes d'approximation.

478. Méthode par rapprochement des limites. Après avoir montré comment on assigne pour chaque racine deux limites spéciales entre lesquelles elle est seule comprise, il reste encore à la déterminer avec telle approximation qu'on voudra.

Le premier moyen qui se présente, c'est de substituer, dans l'équation proposée, des nombres intermédiaires entre ces limites, jusqu'à ce qu'on en trouve deux qui, donnant des résultats de



signes contraires, aient entre eux une différence moindre que la fraction qui exprime le degré de l'approximation. Alors chacun de ces nombres pourra être pris pour la valeur de la racine.

Pour mieux m'expliquer, je suppose que A et B soient deux limites qui ne comprennent que la seule racine a, et que A étant moindre que B, on ait $B - A = D$. En substituant $A + \frac{1}{2}D$ au lieu de x, le signe du résultat apprendra si a est entre A et $A + \frac{1}{2}D$, ou entre $A + \frac{1}{2}D$ et B; par conséquent cette racine se trouvera resserrée en deux limites qui ne différeront plus entre elles que de $\frac{1}{2}D$. En répétant une opération toute semblable, on la resserrera entre deux limites qui ne différeront plus que de $\frac{1}{4}D$; et il est évident qu'en continuant ainsi on arrivera à deux limites dont la différence sera moindre qu'une quantité donnée δ. Alors chacune de ces limites sera la valeur approchée de la racine, à moins de la quantité δ. Il n'est point nécessaire de prendre pour chaque nouvelle substitution un nombre qui soit exactement équidistant des deux dernières limites, et il sera souvent plus commode d'en employer un autre.

Par ce procédé on pourrait porter l'approximation à un très-haut degré; mais le calcul deviendrait extrêmement laborieux, à cause du grand nombre de substitutions qu'il faudrait effectuer. Aussi ne s'en sert-on que pour obtenir une première approximation, à $\frac{1}{10}$ près par exemple; puis on achève le calcul par une méthode beaucoup plus rapide, qui a été indiquée par NEWTON, et que je développerai dans le numéro suivant.

Quand la racine est < 1 il convient de l'évaluer, non à moins d'une fraction de l'unité, mais à moins d'une fraction de cette racine elle-même. Supposons, par exemple, que la valeur approchée ne doive différer de la vraie valeur a que d'une quantité $< \frac{1}{10}a$; et soient A et B deux limites qui comprennent a, A étant $<$ B. Il est clair que si on a $B - A < \frac{1}{10}A$, à plus forte raison aura-t-on $B - A < \frac{1}{10}a$. Ainsi il suffira de prolonger les substitutions successives jusqu'à ce qu'on ait deux limites dont la différence soit moindre que le dixième de la plus petite de ces limites. Au reste, on pourra toujours, si on juge que cela puisse être utile, ramener la racine à être > 1, soit en changeant l'inconnue x en $\frac{1}{x}$, soit en multipliant toutes les racines par un nombre convenable.

479. Méthode de Newton. Cette méthode exige, comme on vient de le dire, que la racine cherchée a soit déjà connue avec une certaine approximation. Pour la commodité du calcul, il faut qu'elle le soit au moins à $\frac{1}{10}$ près; et c'est aussi ce que je supposerai.

Nommons α cette valeur approchée à $\frac{1}{10}$ près, et faisons $x=\alpha+y$. L'équation proposée $f(x)=0$ se transformera en celle-ci

$$f(\alpha)+f'(\alpha).y+\tfrac{1}{2}f''(\alpha).y^2+\tfrac{1}{2.3}f'''(\alpha).y^3+\text{etc.}=0.$$

De cette équation l'on tire

$$y=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}-\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}y^2-\frac{f'''(\alpha)}{2.3f'(\alpha)}y^3-\text{etc.}$$

La valeur de y qu'on veut trouver est $<\frac{1}{10}$, par conséquent y^2, y^3,... sont respectivement moindres que $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,... Admettons, pour un moment, que l'ensemble des termes qui renferment ces puissances soit $<\frac{1}{100}$: il est clair qu'en les négligeant, on aura pour y une valeur approchée à moins de $\frac{1}{100}$, savoir :

$$y=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

En conséquence, je pousserai la division de $-f(\alpha)$ par $f'(\alpha)$ jusqu'aux centièmes, j'ajouterai le quotient à la première valeur, α, et j'aurai ainsi pour la racine a une nouvelle valeur, β, que je regarderai comme approchée à moins de $\frac{1}{100}$.

On corrigera cette valeur β comme on a corrigé α. A cet effet on posera $x=\beta+y$, et ici la valeur de y qu'il faudra chercher sera $<\frac{1}{100}$. La nouvelle transformée est

$$f(\beta)+f'(\beta).y+\tfrac{1}{2}f''(\beta).y^2+\text{etc.}=0.$$

On en tire $y=-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}-\frac{f''(\beta)}{2f'(\beta)}-\text{etc.}$; et, en négligeant les termes en y^2, y^3, etc., on a

$$y=-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}.$$

Puisqu'on a supposé $y<\frac{1}{100}$, les puissances y^2, y^3,.... sont $<(\frac{1}{100})^2$; et, en admettant qu'il en soit ainsi de toute la partie négligée, la valeur précédente serait approchée à moins de $(\frac{1}{100})^2$. C'est pourquoi l'on portera jusqu'à la 4e décimale l'évaluation du quotient de $-f(\beta)$ par $f'(\beta)$, puis on ajoutera ce quotient avec β, et l'on

aura pour la racine α une nouvelle valeur γ, qu'on regardera comme approchée à moins d'une unité décimale du 4e ordre.

En continuant ainsi, et en négligeant toujours les termes qui contiennent les puissances de la correction y, supérieures à la première, on admettra que la partie négligée à chaque transformation est moindre qu'une unité décimale de l'ordre double de celui de la dernière décimale à laquelle l'opération précédente avait porté l'approximation; et alors on obtiendra des valeurs approchées successives, dans lesquelles le nombre des décimales ira toujours en doublant. On voit combien l'approximation sera rapide, puisqu'on aura déjà 8 décimales après la troisième correction, 16 après la quatrième, et ainsi de suite.

On doit encore remarquer combien est simple et régulier le calcul de ces corrections; car il est évident qu'elles se déduisent toutes de la même formule

[1] $$y = -\frac{f(x)}{f'(x)},$$

en y remplaçant d'abord x par α, puis par β, et ainsi de suite: de telle sorte qu'après avoir fourni la première correction, elle fournit encore la seconde, puis la troisième, etc.

Les approximations qu'on obtient ainsi sont loin d'être certaines; car elles reposent sur des suppositions qui ne sont pas toujours vraies. Par exemple, il se pourrait que dans la première correction l'ensemble des termes en y^2, y^3,... fût $> \frac{1}{100}$; ou que dans la seconde il fût $> (\frac{1}{100})^2$; etc. L'habitude du calcul suggérera, dans les cas particuliers, les précautions qu'il convient de prendre pour employer cette méthode avec sûreté; et même je vais montrer qu'il sera toujours facile de vérifier, après chaque correction, si l'on a réellement atteint l'approximation présumée.

Remontons à la valeur β, qu'on suppose approchée à $\frac{1}{100}$ près. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la vraie valeur de la racine soit entre $\beta - \frac{1}{100}$ et β ou entre β et $\beta + \frac{1}{100}$. En conséquence, on substituera dans $f(x)$ les trois nombres $\beta - \frac{1}{100}$, β, $\beta + \frac{1}{100}$, et si le résultat de la substitution de $\beta - \frac{1}{100}$, ou de $\beta + \frac{1}{100}$, est de signe contraire à celui que donne la substitution de β, on sera certain que la valeur β est approchée à $\frac{1}{100}$ près. Mais si les résultats sont de même signe, on sera certain que cette approximation est exagérée; et dans ce cas on prendra pour point de départ une valeur plus approchée que α. Par exemple, au lieu d'une approximation

à un dixième près, on en cherchera une à un demi-dixième; puis on examinera, comme on vient de l'expliquer, si la correction fournie par la formule [1] est exacte jusqu'aux centièmes. Si elle ne l'est pas, on recommencera le calcul, en se servant d'une première valeur encore plus approchée. Ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait la racine avec deux décimales exactes.

On examinera semblablement la valeur approchée qui résultera de la correction suivante; et si la 4e décimale est fautive, on la supprimera. Si les trois premières sont exactes, on procédera à une nouvelle correction, qui donnera une valeur dont l'approximation sera présumée s'étendre jusqu'à la 6e décimale, et qu'il faudra vérifier par le même procédé. La marche à suivre n'a pas besoin de plus amples explications (*).

480. Méthode de Lagrange. Elle consiste à exprimer chaque racine réelle en fraction continue. Si elle exige des calculs laborieux, au moins conduit-elle à une approximation certaine.

D'après ce qu'on dit en parlant de la séparation des racines (474), il est permis de supposer que les racines de l'équation à résoudre diffèrent entre elles de plus d'une unité, et que la partie entière de chacune d'elles est déjà connue. Soit $X = 0$ l'équation dont il s'agit, et soit α la partie entière d'une racine réelle et positive.

Si on fait $x = \alpha + \frac{1}{y}$, on aura une transformée en y, que je représenterai par $Y = 0$, et qui sera du même degré que $X = 0$. La valeur de y qu'il faut connaître, pour avoir la racine cherchée, doit être positive et > 1; et de plus il est évident que y ne peut avoir qu'une seule valeur de cette espèce, autrement il y aurait deux valeurs de x entre α et $\alpha + 1$. Donc, si on substitue dans $Y = 0$ la suite 1, 2, 3,... on est sûr de parvenir à deux résultats de signes contraires; et les deux nombres substitués comprendront

(*) La géométrie analytique fait connaître de la manière la plus simple à quoi tient l'incertitude de ces approximations successives; et en même temps elle indique les conditions qu'il faut remplir pour la faire disparaître. Fourier, dans son *Analyse des Équations*, a ajouté à la méthode de Newton des perfectionnements, qui, au fond, ne sont autre chose que le développement de cette remarque; mais, pour les faire connaître, il faudrait employer des considérations qui appartiennent aux mathématiques supérieures : c'est pourquoi je renverrai à l'ouvrage même de Fourier. Ce sujet a aussi été traité avec succès par M. Vincent, dans un Mémoire inséré parmi ceux de la *Société royale de Lille*; et M. Cauchy en a aussi fait l'objet de plusieurs publications.

entre eux la valeur cherchée de y, de sorte que le plus petit de ces deux nombres sera la partie entière de cette valeur.

Nommons β cette partie entière, et faisons $y = \beta + \frac{1}{z}$. On aura une transformée $Z = 0$, qui aura une racine unique > 1 : de sorte que la substitution des nombres 1, 2, 3, etc., fera encore connaître la partie entière de cette racine.

Soit γ cette partie entière, on fera $z = \gamma + \frac{1}{u}$; et il viendra une nouvelle transformée, $U = 0$, dans laquelle il y aura une racine unique > 1, dont on déterminera encore la partie entière par la substitution des nombres 1, 2, 3, etc. On continuera ainsi la suite des transformées aussi loin qu'il sera nécessaire.

Maintenant, si on observe qu'on a posé successivement

$$x = \alpha + \frac{1}{y}, \quad y = \beta + \frac{1}{z}, \quad z = \gamma + \frac{1}{u}, \text{ etc.,}$$

on en conclut que la racine cherchée peut s'exprimer par la fraction continue

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \text{etc.}}}$$

On sait qu'en calculant les réduites successives on peut atteindre telle approximation qu'on veut (325). Mais, pour ne point faire de calculs inutiles, il sera bon, à mesure qu'on trouve les nombres α, β, γ, etc. de former les réduites correspondantes (323); et dès qu'on parviendra à deux réduites consécutives telles qu'en divisant l'unité par le produit de leurs dénominateurs, on ait une fraction moindre que l'erreur permise, on sera sûr que la première des deux réduites aura l'approximation requise (325).

Le calcul des équations transformées en y, z, etc., est assez long; et, afin de le faciliter, il convient de remarquer la loi suivant laquelle les coefficients de chaque équation se déduisent de l'équation précédente. Or, quand on fait $x = \alpha + \frac{1}{y}$ dans $X = 0$, si on nomme A, A', A'',... les résultats qu'on obtient en mettant α à la place de x dans X et dans ses dérivées X', X'',... la transformée peut d'abord s'écrire ainsi : $A + A'\frac{1}{y} + \frac{A''}{2}\frac{1}{y^2} + \frac{A'''}{2.3}\frac{1}{y^3} + \text{etc.} = 0.$

Par conséquent, en multipliant par y^m, m étant le degré de l'équation, la transformée $Y=0$ sera

$$Ay^m + A'y^{m-1} + \frac{1}{2}A''y^{m-2} + \frac{1}{2\cdot 3}A'''y^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

et l'on saura comment ses coefficients se déduisent de X.

Semblablement, l'éq. $Z=0$ sera de la forme

$$Bz^m + B'z^{m-1} + \frac{1}{2}B''z^{m-2} + \frac{1}{2\cdot 3}B'''z^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

et les coefficients B, B', B'', etc. s'obtiendront en substituant β à la place de y dans le polynome Y et dans ses dérivés. Ainsi de suite pour toutes les autres transformées.

481. *Remarques*. Tout ce qui a été dit sur la détermination approchée des racines pourrait s'appliquer aux racines commensurables, si on avait négligé d'en débarrasser l'équation. En prenant les précautions nécessaires pour ne conserver que des décimales exactes, la méthode de Newton finirait par donner une quantité décimale terminée ou périodique; et celle de Lagrange conduirait à une transformée qui aurait une racine entière. Toutefois, sans parler de la longueur des calculs, on comprend que ces méthodes ne pourraient pas découvrir ces sortes de racines : car, si une racine est incommensurable, elles n'apprendront pas si les opérations doivent s'arrêter ou se prolonger indéfiniment.

Lorsque la seconde méthode fera trouver une fraction continue dans laquelle certains dénominateurs se répéteront dans le même ordre, on pourra soupçonner que la fraction continue est périodique, et alors, d'après ce qui a été démontré (350), elle représenterait une quantité irrationnelle de la forme $a+\sqrt{b}$. Pour décider si la fraction continue est véritablement périodique, on s'y prendra comme il suit. Soient $V=0$ et $V_1=0$ des équations qui donnent le même dénominateur dans les deux premières périodes : il est clair que ces équations doivent avoir une racine commune, et par conséquent on pourra la reconnaître en mettant dans chacune la même lettre pour représenter l'inconnue, et en cherchant ensuite leur plus grand commun diviseur. Cette racine étant trouvée, on remonte facilement à celle de la proposée $X=0$. J'ajouterai encore que si cette proposée ne renferme que des coefficients rationnels, elle ne peut pas avoir la racine irrationnelle $a+\sqrt{b}$ sans avoir aussi la racine $a-\sqrt{b}$. Cette proposition est trop facile à démontrer pour qu'il soit nécessaire de s'y arrêter.

Application des méthodes d'approximation à un exemple.

482. Soit l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

On a trouvé n° **477**, Ex. IV, qu'elle a une racine positive entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$, une autre racine positive entre $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{3}$, et une racine négative entre —3 et —4. Proposons-nous de calculer, par la méthode de NEWTON, la valeur approchée de la première racine.

Il faut d'abord en approcher à $\frac{1}{10}$ près, en resserrant les limites $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$. Ces limites, en décimales, sont 1,33 et 1,67 ; et les signes des résultats provenant de la substitution de ces nombres dans l'équation sont + et —. Si on substitue le nombre moyen 1,5, le résultat est —0,125; donc la racine est entre les limites 1,33 et 1,5. Or, le nombre intermédiaire 1,4 ne diffère de la seconde que de 0,1, et de la première que de 0,07; par conséquent, on est sûr que la valeur $x = 1,4$ est approchée à $\frac{1}{10}$ près.

Maintenant, pour obtenir une plus grande approximation, il faut recourir à la formule [1] du n° **479**,

$$[1] \qquad y = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Dans notre exemple on a $f(x) = x^3 - 7x + 7$, $f'(x) = 3x^2 - 7$; par suite la formule des corrections sera

$$[2] \qquad y = -\frac{x^3 - 7x + 7}{3x^2 - 7}.$$

Si on y substitue la valeur approchée $x = 1,4$, il vient $y = -\frac{0,056}{1,12}$ $= -0,05$; et de là on conclut la valeur de x, approchée à $\frac{1}{100}$ près,

$$x = 1,4 - 0,05 = 1,35.$$

Mais cette approximation n'est encore que présumée. Pour la vérifier, je substitue dans l'équation, d'abord la valeur 1,35, puis cette valeur augmentée de 0,01 :

1,35 donne +0,010375,
1,36 donne —0,004544;

et comme ces résultats sont de signes contraires, on est assuré que les centièmes sont exacts dans la valeur de x.

Pour avoir une plus grande approximation, on substituera cette

valeur dans la formule [2]. Il vient $y = \frac{0,010375}{1,5325} = + 0,0068$; et par suite la nouvelle valeur approchée sera

$$x = 1,35 + 0,0068 = 1,3568.$$

Pour la vérifier, il suffira de substituer dans l'équation les deux nombres 1,3568 et 1,3569 :

1,3568 donne $+ 0,000\,141\,586\,432$,
1,3569 donne $- 0,000\,006\,100\,991$;

et le changement de signe prouve qu'en effet la racine cherchée est connue avec quatre décimales exactes. En continuant, on pourra porter l'approximation aussi loin qu'on voudra.

Par des calculs semblables on trouvera la seconde racine positive. Pour avoir la racine négative qui est entre -3 et -4, le plus commode est de changer x en $-x$: la transformée aura une racine positive entre 3 et 4, dont on cherchera la valeur approchée; puis on prendra cette valeur avec le signe $-$.

483. Appliquons la méthode de Lagrange au calcul de la même racine. Dans le n° **477**, Ex. IV, pour changer l'équation donnée

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

en une autre dont les racines différassent entre elles de plus d'une unité, on a fait $x = \frac{1}{3}x'$, et on a trouvé $x'^3 - 63x' + 189 = 0$. Il faut donc chercher, par le moyen des fractions continues, la valeur de x' comprise entre 4 et 5; puis, en la divisant par 3, on aura la valeur de x comprise entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$.

Les opérations qu'on doit effectuer successivement, pour obtenir x', sont renfermées dans le tableau suivant :

Équation en x' $\quad x'^3 - 63x' + 189 = 0,$

$$x' = 4 + \frac{1}{y}.$$

1re transformée
$$\left\{\begin{array}{l}
Ay^3 + A'y^2 + \frac{1}{2}A''y + \frac{1}{2\cdot 3}A''' = 0,\\
A \;= \;4^3 - 63.4 + 189 = +1,\\
A' = 3.4^2 - 63 = -15,\\
\frac{1}{2}A'' = 3.4 = +12,\\
\frac{1}{2\cdot 3}A''' = +1;\\
y^3 - 15y^2 + 12y + 1 = 0,\\
y = 14 \text{ donne } -\ 27,\\
y = 15 \ldots\ldots +181,\\
y = 14 + \frac{1}{z}.
\end{array}\right.$$

2ᵉ transformée
$$\left\{\begin{array}{l}
Bz^3 + B'z^2 + \frac{1}{2}B''z + \frac{1}{2.3}B''' = 0, \\
B \;\; = 14^3 - 15.14^2 + 12.14 + 1 = -27, \\
B' \;\; = 3.14^2 - 30.14 + 12 = +180, \\
\frac{1}{2}B'' = 3.14 - 15 = +27, \\
\frac{1}{2.3}B''' = +1; \\
27z^3 - 180z^2 - 27z - 1 = 0, \\
z = 6 \text{ donne } -811, \\
z = 7 \ldots\ldots +251, \\
z = 6 + \frac{1}{u}.
\end{array}\right.$$

3ᵉ transformée
$$\left\{\begin{array}{l}
Cu^3 + C'u^2 + \frac{1}{2}C''u + \frac{1}{2.3}C''' = 0. \\
C \;\; = 27.6^3 - 180.6^2 - 27.6 - 1 = -811; \\
C' \;\; = 81.6^2 - 360.6 - 27 = +729, \\
\frac{1}{2}C'' = 81.6 - 180 = +306, \\
\frac{1}{1.3}C''' = +27; \\
811u^3 - 729u^2 - 306u - 27 = 0, \\
u = 1 \text{ donne } - 251, \\
u = 2 \ldots\ldots + 2933, \\
u = 1 + \frac{1}{v}.
\end{array}\right.$$

On peut continuer les transformées. En les arrêtant ici, on aura

$$x' = 4 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}};$$

et les réduites, calculées suivant les règles connues (325), seront

$$\frac{4}{1}, \quad \frac{57}{14}, \quad \frac{346}{85}, \quad \frac{403}{99}, \quad \text{etc.}$$

Dans la 1ʳᵉ, $\frac{4}{1}$, l'erreur est en moins et $< \frac{1}{1.14}$ ou $\frac{1}{14}$;
Dans la 2ᵉ, $\frac{57}{14}$, l'erreur est en plus et $< \frac{1}{14.85}$ ou $\frac{1}{1190}$;
Dans la 3ᵉ, $\frac{346}{85}$, l'erreur est en moins et $< \frac{1}{85.99}$ ou $\frac{1}{8415}$,
Dans la 4ᵉ, $\frac{403}{99}$, l'erreur est en plus et $< \frac{1}{99.184}$ ou $\frac{1}{18216}$.

Pour apprécier l'approximation de la 4ᵉ, sans connaître le dénominateur de la 5ᵉ, on remarquera que ce dénominateur est au moins égal à 99 + 85 ou 184.

Enfin, on divise ces réduites par 3, et on a, pour x, les valeurs

$$x = \frac{4}{3}, \frac{19}{14}, \frac{346}{255}, \frac{403}{297},$$

qui sont approchées, alternativement en défaut ou en excès, à moins des fractions $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{3570}$, $\frac{1}{25245}$, $\frac{1}{54648}$.

On trouvera semblablement les valeurs approchées de l'autre racine positive; et quant à la racine négative, comme elle est seule entre —3 et —4, on la cherchera en opérant immédiatement sur l'équation proposée sans passer par l'éq. en x'.

Remarque. La valeur d'une racine incommensurable n'étant obtenue qu'avec approximation, on ne peut point l'ôter de l'équation au moyen de la division, comme si elle était exactement connue. Si on négligeait le reste de la division et qu'on égalât encore le quotient à zéro, pour en déduire les autres racines, il est bien vrai que les erreurs seraient en général contenues entre des limites assez étroites : cependant il pourrait arriver que ces racines subissent des altérations considérables, et même qu'elles cessassent d'être réelles pour devenir imaginaires ou *vice versâ*. Aussi cette simplification ne doit-elle s'employer qu'avc une grande circonspection.

Racines imaginaires. — Limites des modules.

484. Par des substitutions convenablement réglées, on peut toujours savoir combien une équation a de racines réelles. Si ce nombre n'est pas égal au degré de l'équation, on est sûr qu'il doit y avoir des racines imaginaires; et, pour compléter la résolution de l'équation, il reste encore à déterminer cette sorte de racines.

Elles sont comprises dans la formule $x=a+b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles qu'il faut trouver. En conséquence, on substituera cette expression dans l'équation proposée; par là l'équation se changera en une autre de la forme $A+B\sqrt{-1}=0$, où A et B devront aussi être des quantités réelles. Or, pour que cette dernière équation subsiste, il faut qu'on ait à la fois

$$A=0,\quad B=0:$$

la question est donc réduite à chercher les valeurs réelles de a et b qui conviennent à ces deux équations. A cet effet, on éliminera entre elles l'une des inconnues, a par exemple; puis on cherchera les racines réelles de l'équation finale en b; après quoi on cherchera les valeurs correspondantes de a, en ayant soin de rejeter les solutions dans lesquelles cette inconnue serait imaginaire.

Que les coefficients de l'équation en x soient réels ou qu'ils soient imaginaires, ce qui vient d'être dit subsiste également.

Mais, dans le cas où ils sont réels, nous rappellerons (396) que les racines imaginaires de l'équation doivent être en nombre pair, et par couples de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$.

485. En m'occupant des limites des racines, p. 381 et suivantes, je n'ai eu en vue que les racines réelles : je vais montrer ici qu'on peut obtenir des limites entre lesquelles soient renfermés les modules de toutes les racines, soit réelles, soit imaginaires. Considérons l'équation

$$[1] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots = 0,$$

dans laquelle P, Q,... peuvent être réels ou imaginaires. Pour qu'une valeur de x soit racine, il faut (387) qu'après l'avoir substituée dans le 1[er] membre, le module du résultat soit zéro.

Nommons v le module de x, et p, q,... ceux des coefficients P, Q,... D'après le nº 386, ceux des termes de l'équation seront v^m, pv^{m-1}, qv^{m-2}, ... et celui de la partie $Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots$ ne devra point surpasser la somme $pv^{m-1} + qv^{m-2} + \ldots$ Donc, si on choisit pour v une valeur λ telle qu'on ait

$$[2] \qquad v^m - pv^{m-1} - qv^{m-2} - \ldots = 0 \text{ ou } > 0,$$

on sera certain, en vertu du numéro cité, qu'alors le module du 1[er] membre de l'éq. [1] ne sera pas moindre que la différence ci-dessus; et dès lors ce module ne sera point nul, ou, ce qui est la même chose, la valeur substituée au lieu de x ne sera point racine de l'équation. D'ailleurs toute valeur de v au-dessus de λ rendrait cette différence encore plus grande; donc λ est une limite supérieure des modules.

La quantité λ sera toujours facile à déterminer ; car il suffira de substituer dans la différence [2], au lieu de v, des valeurs positives croissantes jusqu'à ce que cette différence soit positive. Si les coefficients P, Q, ... sont réels, les modules p, q,... seront les valeurs mêmes de ces coefficients, mais prises positivement; et si on désigne par N la plus grande de ces valeurs, on pourra prendre immédiatement pour limite supérieure $\lambda = N + 1$.

Pour avoir une limite inférieure on fera $x = \frac{1}{y}$, on déterminera, dans la transformée en y, la limite supérieure des modules des racines, puis on divisera l'unité par cette limite.

CHAPITRE XIX.

DÉMONSTRATION ET USAGE DE PLUSIEURS THÉORÈMES IMPORTANTS.

Règle de Descartes. — Comment elle sert à trouver les racines quand elles sont toutes réelles. — Conditions de la réalité des racines.

486. Théorème de Descartes. Lorsqu'on passe d'un terme au suivant, on dit qu'il y a *variation* ou *permanence*, selon que le signe change ou qu'il reste le même. Par exemple, l'équation $x^7 - 2x^3 - 5x^2 + 8x - 10 = 0$ aurait trois variations et une permanence. On suppose toujours que l'équation n'a point de coefficients imaginaires, et ici je supposerai en outre qu'elle n'a point de racines nulles. Cela posé, le théorème dont il s'agit s'énonce en ces termes :

Dans une équation quelconque, complète ou incomplète, le nombre des racines positives ne peut point surpasser celui des variations ; et, quand il est moindre, la différence est toujours un nombre pair.

La démonstration consistera à examiner le changement produit dans les signes d'une équation, quand on y introduit une nouvelle racine positive. Considérons donc une équation quelconque, complète ou incomplète, et renfermant tels signes qu'on voudra : je la représenterai de cette manière,

$$[1] \qquad \overline{x^m \ldots} \overline{- P \ldots} \overline{+ Q \ldots} \overline{- R \ldots} \overline{\pm T \ldots \pm U} = 0 ;$$

et ici P, Q, R, etc., seront des termes ordonnés comme à l'ordinaire et contenant une puissance de x avec son coefficient. Les points indiquent des lacunes dont chacune est remplie par des termes de même signe que celui qui la précède : c'est-à-dire qu'à x^m commence une série de signes $+$; à $-$P, une série de signes $-$; et ainsi de suite jusqu'à une dernière série, qui commence à $\pm$ T et finit à $\pm$ U. D'ailleurs rien n'empêche qu'une série de signes ne se réduise à un seul.

Pour introduire dans l'équation une nouvelle racine positive $+a$,

il faut multiplier cette équation par $x - a$. L'opération peut se disposer comme ci-dessous :

$$\begin{array}{llllll}
\overline{x^m \ldots} & \overline{-\mathrm{P} \ldots} & \overline{+\mathrm{Q} \ldots} & \overline{-\mathrm{R} \ldots} & \overline{\pm\mathrm{T} \ldots} & \pm\mathrm{U} \\
x-a & & & & & \\
\hline
x^{m+1}\ldots & -\mathrm{P}' \ldots & +\mathrm{Q}' \ldots & -\mathrm{R}' \ldots & \pm\mathrm{T}' \ldots & \pm\mathrm{U}' \\
\ldots & -\mathrm{P}'' \ldots & +\mathrm{Q}'' \ldots & -\mathrm{R}'' \ldots & \pm\mathrm{T}'' \ldots\ldots\ldots & \mp\mathrm{U}a \\
\hline
x^{m+1}\ldots & -\mathrm{P}''' \ldots & +\mathrm{Q}''' \ldots & -\mathrm{R}''' \ldots & \pm\mathrm{T}''' \ldots\ldots\ldots & \mp\mathrm{U}a.
\end{array}$$

P′, Q′, etc. désignent les produits Px, Qx, etc. ; et aucun d'eux n'est égal à zéro.

P″, Q″, etc. désignent des produits qui proviennent de la multiplication par a, et qui renferment x au même degré que P′, Q′, etc.; mais, comme l'équation [1] n'est pas toujours complète, il peut se faire que plusieurs d'entre eux soient nuls.

P‴, Q‴, etc. désignent, dans le produit total, les termes de même degré en x que P′, Q′, etc. ; et aucun d'eux ne doit être nul.

Enfin, on remarquera encore que dans la 2e ligne de produits partiels, les lacunes peuvent contenir des termes de signes contraires à ceux qui se trouvent au-dessus dans la 1re ligne de produits : de sorte que les signes qui affectent, dans le produit total, les termes correspondants à ces lacunes, doivent rester indéterminés tant qu'on n'assignera point de valeurs particulières aux coefficients de l'éq. [1].

Or, quels que soient ces signes, il y a dans le produit total au moins une variation de x^{m+1} à $-\mathrm{P}'''$, tandis que le multiplicande n'en contient qu'une seule de x^m à $-\mathrm{P}$; de même, il y en a au moins une de $-\mathrm{P}'''$ à $+\mathrm{Q}'''$, et une seule de $-\mathrm{P}$ à $+\mathrm{Q}$: et en continuant ainsi on reconnaît qu'à la fin il y en a au moins une de $\pm\mathrm{T}'''$ à $\mp\mathrm{U}a$, tandis que le multiplicande n'en a aucune après $\pm\mathrm{T}$; donc le produit a au moins une variation de plus que le multiplicande. Donc chaque racine positive, introduite dans une équation, doit y apporter au moins une variation; donc, *le nombre des racines positives ne peut point surpasser celui des variations.*

En y regardant de plus près, on aperçoit que si, de x^{m+1} à P''', il y a plusieurs variations, elles sont en nombre impair; car, pour passer d'un signe à un signe contraire, il faut un nombre impair de variations. La même chose peut se dire de $-\mathrm{P}'''$ à $+\mathrm{Q}'''$, et de

tous les autres intervalles. Ainsi, en faisant attention que dans le multiplicande il n'y a plus de variation après $\pm$ T, on peut conclure que les variations nouvelles introduites par une racine positive sont toujours en nombre impair. Cela posé, concevons qu'on ait ôté à une équation toutes ses racines positives, l'équation restante doit avoir son dernier terme positif, sans quoi elle aurait au moins une racine positive (**469**). Or, pour arriver du premier terme, qui est toujours positif, à ce dernier terme, qui est positif aussi, les variations, s'il y en a, sont évidemment en nombre pair; et, d'un autre côté, on doit revenir à l'équation primitive en rétablissant successivement chacune des racines supprimées : donc, *si le nombre des racines positives est moindre que celui des variations, la différence est un nombre impair.*

487. Si dans une équation, on remplace x par $-x$, toutes les racines changeront de signe; par conséquent le nombre des variations de la transformée indiquera combien, au plus, la proposée contient de racines négatives. Par exemple, s'il s'agit de l'équation $x^5-2x+5=0$, comme elle n'a que deux variations, on voit tout d'abord qu'elle ne peut avoir plus de deux racines positives. Puis, comme la transformée en $-x$, après y avoir changé tous les signes, est $x^5-2x-5=0$, et qu'elle n'a qu'une variation, on est certain que la proposée n'a pas plus d'une racine négative.

488. On peut démontrer généralement qu'en réunissant les variations de la proposée à celles de la transformée, le nombre total de ces variations ne doit point surpasser le degré de l'équation.

Soient $Gx^k+Hx^{k-k'}$ deux termes consécutifs de l'équation $x^m+\text{etc}=0$, et supposons-les d'abord de même signe. Après avoir changé x en $-x$, ces deux termes donneront une variation si k' est impair, et ils n'en donneront aucune si k' est pair. Supposons maintenant que les deux termes soient de signes contraires : si k' est impair, ils ne présenteront aucune variation dans la transformée; mais si k' est pair, ils en présenteront encore une. Ainsi, en réunissant les variations de la proposée à celle de la transformée, on peut dire que deux termes consécutifs, dans lesquels la différence des exposants est impaire, présentent toujours une variation; et que, si cette différence est paire, ils en présenteront deux ou n'en présenteront aucune. Ce nombre de variations ne surpasse donc pas la différence des deux exposants; et comme dans le dernier terme de l'équation l'exposant de x est zéro, on

est certain que le nombre total des variations ne surpassera jamais le degré de l'équation. Et même, on voit que la différence, quand il y en a une, doit être un nombre pair.

489. Puisqu'il ne doit point y avoir plus de racines positives que de variations dans la proposée, ni plus de racines négatives que de variations dans la transformée en $-x$; et puisque d'ailleurs le nombre total de ces variations ne peut point surpasser le degré de l'équation, il s'ensuit que si toutes les racines sont réelles, ce nombre total devra être égal au degré de l'équation, et qu'il y aura précisément autant de racines positives que de variations dans la proposée, et autant de racines négatives que de variations dans la transformée.

Lorsqu'on ignore si toutes les racines sont réelles, cette conclusion ne s'applique plus; car les racines imaginaires peuvent subsister également avec des permanences et avec des variations. Par exemple, si les racines de l'éq. $x^2+px+q=0$ sont imaginaires, il est clair qu'elles le seront encore après avoir changé p en $-p$.

490. Lorsqu'une équation est incomplète, il est souvent facile, par ce qui précède, de reconnaître qu'elle a des racines imaginaires. On comptera les variations de la proposée ainsi que celles de la transformée en $-x$; et d'après les n^os **486** et **487**, il ne peut pas y avoir plus de racines réelles que ne l'indique le nombre de toutes ces variations : donc, si ce nombre est surpassé par le degré de l'équation, on sera certain qu'il y a au moins autant de racines imaginaires que d'unités dans la différence.

Par exemple, si l'équation est $x^m-1=0$ et que m soit pair, on apprendra sur-le-champ qu'elle a, au plus, deux racines réelles; et comme il est évident qu'elle en a deux, $+1$ et -1, on peut affirmer qu'elle a $m-2$ racines imaginaires.

Reportons-nous à l'explication du n° **488**. En représentant l'équation par $x^m+\mathrm{P}x^{m-n}+\mathrm{Q}x^{m-n-n'}+\mathrm{R}x^{m-n-n'-n''}+\text{etc.}=0$, et en ajoutant les variations de la proposée à celles de la transformée en $-x$, on a vu que les termes $x^m+\mathrm{P}x^{m-n}$ donnent une variation quand n est impair, et qu'ils en donnent deux ou n'en donnent pas du tout quand n est pair. Par conséquent, si on nomme v ce nombre de variations qui est tout au plus égal à 2, la différence $n-v$ pourra bien être ou zéro ou un nombre pair, mais ne sera jamais négative. Une observation analogue peut se faire sur deux termes consécutifs quelconques de l'équation : de

sorte qu'en désignant par v', v'',... les nombres des variations résultant des autres parties de l'équation, aucune des différences

$$n-v,\quad n'-v',\quad n''-v'',\ldots$$

ne sera négative. Mais si on désigne par V la totalité des variations de l'équation et de la transformée, puis si on fait attention que $m=n+n'+n'',\ldots$ on a évidemment

$$m-V=(n-v)+(n'-v')+(n''-v'')+\text{etc.}$$

Or, quand les m racines de l'équation sont réelles, on a $V=m$ ou $m-V=0$; donc, puisque aucune des différences $n-v$, $n'-v'$,... ne peut être négative, il faut qu'on ait

$$n-v=0,\quad n'-v'=0,\quad n''-v''=0,\ \text{etc.}$$

Donc, si une seule de ces différences n'est pas zéro, on est assuré, sans autre examen, que l'équation a des racines imaginaires; et l'on pourra affirmer qu'elle en a au moins autant que cette différence renferme d'unités.

Par exemple, supposons que Gx^k+Hx^{k-2} soient deux termes entre lesquels manque le terme en x^{k-1}. Si G et H ont le même signe, ces termes n'amèneront pas de variation dans la transformée en $-x$, et on pourra affirmer que l'équation a au moins deux racines imaginaires : tel est le cas de l'éq. $x^3+4x+7=0$. Mais si G et H sont de signes contraires, on ne pourra plus rien conclure; car les deux termes donnent déjà une variation et en donneront encore une dans la transformée, ce qui en fera 2, nombre précisément égal à la différence des deux exposants : ce cas est celui de l'éq. $x^3-4x+7=0$.

Supposons maintenant qu'entre deux termes $Gx^k+Hx^{k-k'}$, il en manque deux ou davantage. Comme la différence des exposants est >2, et que ces deux termes ne peuvent produire que deux variations au plus, on est assuré, sans aucun examen ultérieur, que l'équation a des racines imaginaires.

491. Quand l'équation est complète et qu'on y remplace x par $-x$, il est évident que, sur deux termes consécutifs, l'un conserve son signe, tandis que l'autre prend un signe contraire à celui qu'il avait; donc les permanences deviennent des variations, et *vice versâ*. On peut donc dire qu'une équation complète ne peut pas avoir plus de racines négatives que de permanences.

Cette conclusion s'appliquera aux équations incomplètes si l'on a soin d'y rétablir les termes manquants, lesquels doivent être

regardés comme ayant le coefficient ± 0. Par exemple, soit l'équation $x^3-4x+7=0$: sous cette forme elle n'a pas de permanence; cependant elle a une racine négative, car elle est de degré impair et son dernier terme est positif (**469**). Mais si on restitue le second terme $\pm 0x^2$, elle devient $x^3 \pm 0x^2 - 4x + 7 = 0$; et alors, qu'on prenne $+0x^2$ ou $-0x^2$, elle a toujours une permanence (*).

On peut aussi, par cette voie, reconnaître quelquefois la présence des imaginaires. Après avoir rétabli les termes manquants en leur donnant zéro pour coefficients, on devra les regarder aussi bien comme positifs que comme négatifs; et, quelques signes qu'on adopte, on devra toujours, si toutes les racines de l'équation sont réelles, trouver le même nombre de variations et le même nombre de permanences. Donc, quand il en sera autrement, l'équation aura des racines imaginaires.

Par exemple, soient, comme plus haut, $Gx^k + Hx^{k-2}$ deux termes entre lesquels manque le terme en x^{k-1} : on le rétablira, et on aura $Gx^k \pm 0x^{k-1} + Hx^{k-2}$. Si G et H sont de même signe, positifs par exemple, ces trois termes donneront deux permanences ou deux variations, selon qu'on prendra $+0$ ou -0; donc lorsqu'il manque un terme entre deux termes de même signe, l'équation a des racines imaginaires. Mais si G et H sont de signes contraires, on ne peut plus rien conclure; car, soit qu'on prenne $+0$ ou -0, l'ensemble des trois termes donnera toujours une variation et une permanence.

Soient encore $Gx^k + Hx^{k-k'}$ deux termes entre lesquels il en manque plusieurs. En rétablissant les termes intermédiaires, on aura $Gx^k \pm 0x^{k-1} \pm 0x^{k-2} \ldots + Hx^{k-k'}$. Or, on peut donner au troisième, $0x^{k-2}$, le même signe qu'à Gx^k; et alors, d'après ce qui vient d'être dit, on sera sûr que l'équation a des racines imaginaires.

Il serait facile de démontrer que le rétablissement des termes manquants peut conduire aux mêmes conséquences que les considérations du n° **490**; mais ces détails sont superflus.

492. La règle de DESCARTES peut servir à trouver les racines d'une équation quand elles sont toutes réelles. Je supposerai, ce

(*) Quelquefois le théorème de DESCARTES est énoncé ainsi : *Une équation ne saurait avoir plus de racines positives que de variations, ni plus de racines négatives que de permanences.* Mais la seconde partie de cet énoncé est inexacte, à moins qu'on n'ajoute que l'équation est complète, restriction inutile pour la première partie. L'éq. $x^3 - 4x + 7 = 0$ suffit pour justifier cette remarque.

qui est toujours permis, qu'il n'y ait plus de racines égales, et je me dispenserai aussi de parler des racines négatives, attendu que leur détermination se ramène à celles des racines positives.

D'après la règle de DESCARTES, puisque l'équation proposée en x n'a que des racines réelles, elle doit avoir précisément autant de variations que de racines positives. Or, si on désigne par α un nombre réel quelconque, et si on fait $x - \alpha = x'$, toutes les racines de la transformée en x' ou $x - \alpha$ seront encore réelles ; par conséquent le nombre des variations de cette transformée indiquera aussi combien elle a de racines positives.

D'un autre côté, il est évident que si α est positif, et que l'équation en x n'ait pas de racine entre 0 et α, la transformée en $x - \alpha$ conservera autant de racines positives que la proposée; mais que, si cette proposée a des racines entre 0 et α, la transformée aura de moins un pareil nombre de racines positives. Donc, en comptant les variations perdues lorsqu'on passe à la transformée en $x-\alpha$, on saura combien la première a de racines positives entre 0 et α. Pareillement, α' étant $>\alpha$, si on passe de l'éq. en $x - \alpha$ à une nouvelle transformée en $x - \alpha'$, le nombre des variations qui seront de moins dans la seconde que dans la précédente, fera connaître combien l'équation en x, a de racines positives entre α et α'. Cela posé, voici comment on déterminera successivement tous les chiffres des racines, jusqu'à telle décimale qu'on voudra.

De l'éq. en x on déduira les transformées en $x - 1$, $x - 2$,... jusqu'à celle en $x - 10$; et, par les variations perdues à chaque transformation, on saura combien la proposée a de racines entre 0 et 1, combien entre 1 et 2,..., enfin combien entre 9 et 10.

Les racines dont l'existence est ainsi reconnue sont < 10; mais, quand on saura les calculer en décimales, il sera facile d'obtenir aussi les racines comprises de 10 à 100, de 100 à 1000, etc. En effet, il suffira de faire $x = 10x'$ dans l'éq. en x, et de chercher les valeurs de x' qui sont < 10; puis de faire $x' = 10x''$ dans l'éq. en x', et de chercher les valeurs de x'' qui sont < 10; ainsi de suite. Si, par exemple, après avoir trouvé l'éq. en x'', on cherche la transformée en $x'' - 10$, et que tous ses termes soient de même signe, on sera certain que la proposée n'a pas de racine positive > 1000. Par ces raisons, je me bornerai à expliquer comment on trouve les chiffres décimaux des racines < 10.

Supposons qu'une ou plusieurs racines soient comprises entre

le chiffre α et $\alpha+1$. Pour trouver les dixièmes de chacune, on fera $10(x-\alpha)=x'$ dans l'éq. en $x-\alpha$, puis on cherchera la partie entière des valeurs de x', par le même moyen qui a déterminé α : c'est-à-dire qu'on calculera les transformées en $x'-1$, $x'-2$, etc., en ayant soin de ne pas dépasser $x'-10$, et qu'ensuite on comptera les variations perdues à chaque transformation, ce qui apprendra s'il y a des valeurs de x' entre 0 et 1, entre 1 et 2, etc. : par là on connaîtra le chiffre des dixièmes de chacune des racines. Soit α' celui qui appartient à l'une d'elles, on fera $10(x'-\alpha')=x''$, on répétera sur l'éq. en x'' les opérations qui ont été faites sur l'éq. en x', et on connaîtra le chiffre α'' des centièmes. En continuant ainsi on pourra trouver autant de décimales qu'on voudra.

Il se peut que plusieurs racines aient les premières décimales communes. Mais comme l'éq. en x n'a pas de racines égales, on est sûr que les racines comprises entre α et $\alpha+1$ finiront toujours par se séparer. On reconnaît que la séparation d'une racine est complète, quand la dernière transformée n'a qu'une seule racine positive de moins que la transformée précédente, ou, ce qui est la même chose, quand elle n'a qu'une seule variation de moins.

La méthode que je viens d'exposer sommairement a été publiée en 1807 par Budan, dans un mémoire ayant pour titre *Méthode nouvelle pour la résolution des équations*. Cet auteur a aussi essayé d'étendre sa méthode à toutes les équations, lors même qu'on ignore la nature des racines; mais il s'est trompé en croyant y réussir au moyen de la seule règle de Descartes.

495. C'est une recherche importante que celle des conditions auxquelles on reconnaît que toutes les racines d'une équation sont réelles et inégales : on peut y parvenir en appliquant le théorème de Descartes à l'équation aux carrés des différences.

Soient $X=0$ l'équation donnée, et $D=0$ l'équation aux carrés des différences. S'il n'y a dans $X=0$ que des racines réelles et inégales, les carrés de leurs différences seront des quantités réelles et positives; donc l'éq. $D=0$ devra être complète et n'avoir que des variations de signes. Supposons qu'il y ait des racines imaginaires dans $X=0$, et admettons, ainsi qu'on l'a démontré (397), qu'elles s'y trouvent par couples de la forme $a\pm b\sqrt{-1}$, le carré de la différence entre les racines d'un tel couple est $(2b\sqrt{-1})^2$ ou $-4b^2$, quantité essentiellement négative. Si, parmi les racines réelles, il y en avait d'égales, les carrés de leurs différences seraient zéro.

Or, il est évident que l'éq. $D=0$ ne peut avoir ni racines négatives, ni racines nulles, quand elle est complète et que les signes + et — y sont alternatifs. Donc, *pour qu'une équation n'ait que des racines réelles et inégales, il faut et il suffit que l'équation aux carrés des différences soit complète et n'ait que des variations.*

Quand l'éq. $X=0$ n'a que des racines réelles, mais qu'il y en a d'égales, le dernier terme, ou même plusieurs termes consécutifs à partir du dernier, manquent dans l'éq. $D=0$; mais les termes restants doivent toujours se succéder sans lacune et n'offrir que des variations de signes.

Pour l'équation du 3e degré $x^3+Qx+R=0$, on a trouvé (440) que l'équation aux carrés des différences est

$$z^3+6Qz^2+9Q^2z+4Q^3+27R^2=0.$$

Si l'on veut que cette dernière soit complète et ne présente que des variations, il faut qu'on ait $Q<0$ et $4Q^3+27R^2<0$. Or, la seconde condition ne peut pas être remplie sans la première; donc, pour que les racines de l'équation du 3e degré soient réelles et inégales, une seule condition est nécessaire, savoir : $4Q^3+27R^2<0$.

Théorème de Budan. — Son utilité dans la résolution des équations.

494. Ce théorème a été publié, en 1807, dans l'ouvrage déjà cité (**492**). Après avoir observé qu'on pouvait facilement en apercevoir la vérité à l'égard des équations qui n'ont que des racines réelles, Budan ajoutait « qu'il avait de fortes raisons de le croire applicable à une équation quelconque. » Plus tard, en 1811, il mit cette assertion hors de doute par une démonstration qu'il communiqua à l'Institut. Lagrange et Legendre, qui furent chargés d'en faire l'examen, jugèrent que la démonstration était exacte et que le théorème était nouveau. Pour mieux le faire connaître, je reprends les choses de plus haut.

Une éq. en x étant donnée, et α étant un nombre positif quelconque, soit fait $x=y+\alpha$: on aura une transformée en y dont toutes les racines seront celles de la proposée diminuées de α; et il est évident qu'autant l'éq. en x renfermait de racines entre 0 et α, autant il y aura de racines positives de moins dans la transformée en y ou $x-\alpha$. Or, lorsque toutes les racines d'une équation sont réelles, on a vu que le nombre des racines positives de cette équation est égal à celui des variations de signes : donc, si

l'éq. en x n'a que des racines réelles, on devra trouver dans la transformée en $x-\alpha$ autant de variations de moins qu'il y avait de racines entre 0 et α dans la proposée. La présence des imaginaires empêche cette conclusion d'être générale; mais dans tous les cas on peut établir, et c'est là le théorème énoncé par BUDAN, que *le nombre des racines de l'équation en* x, *comprises entre* 0 *et* α, *ne peut point surpasser le nombre des variations perdues en passant de cette équation à la transformée en* $x-\alpha$.

Soit $X=0$ une équation du degré m en x, et soient X', X'',... $X^{(m-1)}$, $X^{(m)}$ la suite des fonctions dérivées de X, jusqu'à celle qui ne renferme plus l'inconnue x. Si on fait $x=y+\alpha$, on obtiendra la transformée en y ou $x-\alpha$; et, si on ordonne cette transformée à la manière ordinaire, ses coefficients seront les valeurs que prennent, pour $x=\alpha$, les fonctions

$$\frac{X^{(m)}}{1.2\ldots m},\ \frac{X^{(m-1)}}{1.2\ldots(m-1)},\ldots\ \frac{X''}{1.2},\ \frac{X'}{1},\ X.$$

D'un autre côté, pour $x=0$, ces fonctions doivent se réduire aux coefficients de l'éq. $X=0$; car alors la transformée doit devenir celle qu'on aurait eue en faisant $x=y$. Ainsi, le théorème revient à démontrer que si on compte les variations de la suite ci-dessus après y avoir fait $x=0$, et aussi après y avoir fait $x=\alpha$, le nombre des racines de $X=0$, comprises entre 0 et α, ne peut pas surpasser celui des variations qui se trouvent de moins après la seconde substitution. Dans cette suite de fonctions on peut d'ailleurs supprimer les diviseurs numériques, et même multiplier ou diviser chacune d'elles par tel facteur positif qu'on voudra, puisque alors les signes ne sont pas altérés. C'est à peu près ainsi que FOURIER présente le théorème dont il s'agit, dans son *Analyse des équations*, publiée par NAVIER, en 1831. Je vais en rapporter ici l'énoncé et la démonstration tels qu'on les trouve dans cet ouvrage.

495. THÉORÈME. *Étant donnée une équation quelconque* $X=0$, *de la forme* $x^m+Px^{m-1}\ldots+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0$, *si, dans la suite des* $m+1$ *fonctions*

$$[1]\qquad X^{(m)},\ X^{(m-1)},\ldots\ X'',\ X',\ X,$$

on substitue alternativement deux quantités réelles quelconques α *et* β, α *étant* $<\beta$, *et si après chaque substitution on compte les variations de signes que présente la suite des résultats : le nombre des racines comprises entre* α *et* β *ne peut jamais surpasser celui des*

variations perdues de $x=\alpha$ *à* $x=\beta$, *et, quand il est moindre, la différence est toujours un nombre pair.*

La démonstration se fera en examinant les changements de signes qui peuvent s'opérer dans la suite [1] lorsque x croît d'une manière continue. Or, il est clair qu'aucune fonction de cette suite ne doit changer de signe sans passer par zéro : car, si l'une d'elles change de signe en y substituant successivement deux quantités, on sait qu'il existe, entre ces quantités, au moins une valeur de x qui rend la fonction égale à zéro. C'est pourquoi l'on fera particulièrement attention aux altérations produites dans les signes lorsque x passe par une valeur a qui fait évanouir une ou plusieurs fonctions de la suite [1]. La clarté exige que l'on considère avec ordre différents cas. Je préviens ici que je représenterai le 1er membre de l'équation indifféremment par X ou par $F(x)$; et les polynomes dérivés, par X', X'', etc., ou par $F'(x)$, $F''(x)$, etc.

1° Supposons que la valeur $x=a$ ne rende nulle qu'une seule des fonctions, et que ce soit la dernière, X ou $F(x)$. Puisque a ne rend nulle aucune des fonctions précédentes, on est certain qu'en prenant une quantité h suffisamment petite, et en substituant successivement $a-h$ et $a+h$ au lieu de x dans ces fonctions, les deux suites de résultats devront offrir exactement les mêmes signes que si l'on avait substitué a. Il n'y a donc qu'à comparer les signes donnés par les substitutions de $a-h$ et de $a+h$ dans les deux dernières fonctions, $F'(x)$ et $F(x)$. Ces fonctions deviennent

$$F'(a-h) \text{ et } F(a-h), \text{ pour } x=a-h;$$
$$F'(a+h) \text{ et } F(a+h), \text{ pour } x=a+h.$$

Mais on sait que

$$F(a-h)=F(a)-hF'(a)+\text{etc.},$$
$$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\text{etc.};$$

donc, en observant que $F(a)=0$, on a

$$F(a-h)=-hF'(a)+\text{etc.},$$
$$F(a+h)=+hF'(a)+\text{etc.}$$

On peut prendre h assez petit pour que chaque développement représente une quantité de même signe pour son premier terme; par conséquent nous avons simplement à comparer les signes de $F'(a-h)$ et $-F'(a)$ avec ceux de $F'(a+h)$ et $+F'(a)$. Or, on a déjà remarqué que $F'(a-h)$ et $F'(a+h)$ ont le même signe

$F'(a)$; donc, en ne faisant attention qu'aux signes, on aura une des deux combinaisons suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pour } a-h \ldots +-\\ \text{Pour } a+h \ldots ++\end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}-+\\ --\end{array}\right.$$

Donc la substitution de $a+h$ dans la suite [1] donne une variation de moins que la substitution de $a-h$.

2° Supposons que plusieurs fonctions consécutives deviennent zéro, et qu'elles comprennent la dernière, $F(x)$. Soient

$$F^{(i-1)}(x),\quad F^{(i-2)}(x), \ldots \quad F'(x),\quad F(x),$$

ces fonctions consécutives, qui deviennent nulles quand on fait $x=a$. On sait que ce cas est celui où l'éq. $F(x)=0$ renferme i racines égales à a; et comme on suppose que ni la fonction $F^{(i)}(x)$ ni aucune des précédentes ne deviennent zéro par la valeur $x=a$, on est sûr que, si h est suffisamment petit, les signes de la suite [1] ne pourront être altérés, en passant de $x=a-h$ à $x=a+h$, que dans la partie qui vient après $F^{(i)}(x)$. Ainsi, il nous suffira de comparer les signes des deux lignes ci-dessous :

$$[2]\quad F^{(i)}(a-h),\quad F^{(i-1)}(a-h), \ldots \quad F'(a-h),\quad F(a-h),$$

$$[3]\quad F^{(i)}(a+h),\quad F^{(i-1)}(a+h), \ldots \quad F'(a+h),\quad F(a+h).$$

Développons $F^{(i-1)}(a-h)$, $F^{(i-2)}(a-h)$, etc. En ayant égard aux hypothèses $F(a)=0$, $F'(a)=0, \ldots$ $F^{(i-1)}(a)=0$, il vient

$$\begin{aligned} F^{(i-1)}(a-h) &= F^{(i-1)}(a) - hF^{(i)}(a) + \text{etc.} \\ &= -hF^{(i)}(a) + \text{etc.} \\ F^{(i-2)}(a-h) &= F^{(i-2)}(a) - hF^{(i-1)}(a) + \tfrac{1}{2}h^2F^{(i)}(a) - \text{etc.} \\ &= +\tfrac{1}{2}h^2F^{(i)}(a) - \text{etc.} \end{aligned}$$

etc.

La quantité h étant aussi petite qu'on veut, le premier développement est une quantité de signe contraire à $F^{(i)}(a)$, le second est une quantité de même signe, et ainsi de suite, en alternant les signes jusqu'à $F(a-h)$.

Si on développe de la même manière les valeurs correspondantes à $a+h$, il est évident qu'on aura des quantités toutes de même signe que $F^{(i)}(a)$. D'un autre côté, les signes de $F^{(i)}(a-h)$ et de $F^{(i)}(a+h)$ doivent être les mêmes que celui de $F^{(i)}(a)$. La ligne [2]

n'a donc que des variations, lesquelles sont en nombre i, tandis que la ligne [3] n'a que des permanences.

Ainsi, l'ensemble complet des signes de la suite [1], lorsque x passe de $a-h$ à $a+h$, doit perdre i variations, c'est-à-dire tout autant qu'il y a de racines égales à a.

3° Supposons encore que la valeur $x=a$ rende nulle une seule des fonctions, mais que ce soit une fonction intermédiaire $X^{(n)}$ ou $F^{(n)}(x)$. Écrivons la suite [1] comme ci-dessous, en mettant des points à la place des termes qui nous sont inutiles :

$$\ldots . X^{(n+1)}, X^{(n)}, X^{n-1}, \ldots .$$

$X^{(n)}$ étant la seule fonction qui devienne zéro pour $x=a$, il s'ensuit que chacune de celles qui sont avant ou après $X^{(n)}$ doit donner le même signe en y substituant $a-h$, $a+h$, ou a.

Si la suite précédente ne comprenait aucune des fonctions $X^{(n-1)}$, $X^{(n-2)}$.... qui sont après $X^{(n)}$, le cas que nous examinons serait semblable au premier, et on serait sûr que la suite des signes correspondants à $a-h$, comparée avec la suite des signes correspondants à $a+h$ perdrait une variation. Et même on a vu que cette perte a lieu, parce que les deux derniers signes présentent l'une de ces combinaisons :

Pour $a-h\ldots$	$+-$	ou	$-+$
Pour $a+h\ldots$	$++$		$--$

Par conséquent, si on écrit sur la même ligne les valeurs que prennent les trois fonctions $X^{(n+1)}$, $X^{(n)}$, $X^{(n-1)}$, par la substitution de $a-h$; et au-dessous, sur une autre ligne, les valeurs que prennent ces fonctions par la substitution de $a+h$, les signes ne pourront offrir qu'une de ces quatre combinaisons :

Pour $a-h\ldots$	$+-+$	$-++$	$+--$	$-+-$
Pour $a+h\ldots$	$+++$	$--+$	$++-$	$---$

Quelle que soit la combinaison, on voit qu'en passant de $a-h$ à $a+h$, la suite [1] perd deux variations ou n'en perd aucune.

4° Supposons que plusieurs fonctions consécutives deviennent nulles, et qu'elles ne comprennent point la dernière, X. Écrivons la suite [1] comme ci-après,

$$\ldots X^{(n+i)}, X^{(n+i-1)}, \ldots X^{(n)}, X^{(n-1)}, \ldots$$

et admettons que les i fonctions comprises entre $X^{(n+i)}$ et $X^{(n-1)}$

deviennent zéro, sans que cela arrive à aucune autre. Ce n'est que dans cette partie qu'il pourra y avoir des modifications de signes en passant de $x=a-h$ à $x=a+h$. Si la suite [1] finissait à $X^{(n)}$, on rentrerait dans le 2e cas, et l'on conclurait qu'il doit y avoir i variations perdues. Mais pour avoir égard à la fonction $X^{(n-1)}$, il faut distinguer l'hypothèse de i pair et celle de i impair.

Lorsque i est pair, le nombre des termes $X^{(n+i)}, \ldots X^{(n)}$ est impair. Or, d'après ce qui a été dit dans le 2e cas, si on descend de $X^{(n+i)}$ à $X^{(n)}$, les signes résultant de la substitution de $a-h$ seront alternatifs; donc $X^{(n)}$ sera de même signe que $X^{(n+i)}$. Au contraire, les signes résultant de la substitution de $a+h$ seront tous semblables à celui de $X^{(n+i)}$. Mais cette dernière fonction doit avoir le même signe après chaque substitution; donc aussi la fonction $X^{(n)}$ aura le même signe; donc, de $x=a-h$ à $x=a+h$, le nombre des variations perdues est égal à i.

Quand i est impair, le nombre des fonctions $X^{(n+i)}, \ldots X^{(n)}$ est pair; et le raisonnement ci-dessus prouve que les substitutions de $a-h$ et $a+h$ donnent pour $X^{(n)}$ des résultats de signes opposés. De là il suit que les deux termes $X^{(n)}$ et $X^{(n-1)}$ ne peuvent offrir, après ces substitutions, que l'une de ces quatre combinaisons :

$+\,+$	$+\,-$	$-\,+$	$-\,-$
$-\,+$	$-\,-$	$+\,+$	$+\,-$

Dans la première et la dernière, une permanence est remplacée par une variation; et dans les deux intermédiaires, une variation est remplacée par une permanence. Donc le nombre des variations perdues par la suite [1] n'est plus i, mais bien $i-1$ ou $i+1$.

Ainsi, quand i est pair, le nombre des variations perdues est i; et quand i est impair, ce nombre est $i-1$ ou $i+1$; donc ce nombre est toujours pair.

5° Supposons en dernier lieu que la substitution de a fasse évanouir des fonctions dans diverses parties de la suite [1]. Si dans ces fonctions il s'en trouve i consécutives parmi lesquelles soit comprise la dernière, X, l'éq. $X=0$ a i racines égales à a, et, par ce qui a été dit 1° et 2°, on sait que ces fonctions évanouissantes donnent lieu à une perte de i variations lorsqu'on passe de $x=a-h$ à $x=a+h$. Et quant aux fonctions intermédiaires évanouissantes, ce qui a été dit 3° et 4° montre qu'elles ne peuvent faire perdre qu'un nombre pair de variations.

Les cinq cas que nous venons de parcourir mettent en évidence les conséquences suivantes. Quand x croît d'une manière continue, les changements qui s'opèrent dans les signes de la suite [1] ne peuvent pas augmenter le nombre des variations, mais seulement le diminuer. Chaque fois que x vient à dépasser une racine a, il y a des variations perdues, dont le nombre est le même que celui des racines égales à a renfermées dans l'équation, ou le surpasse d'un nombre pair. Il peut aussi arriver qu'il y ait des variations perdues sans que x passe par une racine de l'équation, et alors elles sont toujours en nombre pair.

Donc enfin, si, après avoir substitué dans la suite [1] une valeur $x=\alpha$ on substitue une valeur plus grande $x=\beta$, le nombre des variations perdues sera ou égal au nombre des racines comprises entre α et β, ou le surpassera d'un nombre pair. C'est là le théorème qui était à démontrer.

496. Si la substitution d'une valeur $x=a$ faisait évanouir une ou plusieurs fonctions de la suite [1], on pourrait être embarrassé sur la manière de compter les variations. On élude la difficulté en substituant, au lieu de a, des nombres $a-h$ et $a+h$, qui en diffèrent aussi peu qu'on veut. Aucun calcul nouveau ne sera nécessaire pour déterminer les signes qui résultent de ces substitutions. D'abord, les fonctions qui ne s'évanouissent point par la valeur $x=a$ doivent conserver les mêmes signes; et quant aux fonctions évanouissantes, il suffira de rappeler ce qui a été dit au numéro précéd. (4°). On a vu en effet que la substitution $a-h$ remplace les zéros par des signes alternatifs dont le premier est contraire au signe à la droite duquel ces zéros sont placés, tandis que la substitution de $a+h$ amène ce même signe à la place de chaque zéro. Ce procédé est appelé par FOURIER *règle du double signe*. Il revient à remplacer les zéros d'abord par des signes tels qu'on ait le plus possible de variations, et ensuite par des signes tels qu'on en ait le moins possible.

Par exemple, supposons qu'on ait trouvé,

$$\text{Pour } x=a, \quad +0-+0000-0+;$$

en appliquant la règle du double signe, on aura

$$\text{Pour } x=a-h, \quad +--+-+-+-++,$$
$$\text{Pour } x=a+h, \quad ++-+++++--+.$$

On voit alors que x, en passant par la valeur a, fait perdre 4 variations à la série des signes. Il est d'ailleurs évident que l'équation n'admet point a pour racine, puisque la dernière fonction n'est pas devenue zéro pour $x=a$. On verra tout à l'heure que ces quatre variations perdues indiquent avec certitude la présence de quatre racines imaginaires.

497. Reprenons la suite

$$[1] \qquad X^{(m)},\ X^{(m-1)},\ \ldots\ X'',\ X',\ X.$$

Si on y met pour x des valeurs négatives au delà d'une certaine limite $x=-A$, les signes de ces fonctions seront ceux de leurs premiers termes. Mais, par la manière dont on forme les polynomes dérivés, il est clair que ces premiers termes sont composés des puissances x^0, x^1, x^2, ... x^m, multipliées par des coefficients qui sont tous de même signe; donc, après la substitution de $x=-A$, la suite des fonctions n'aura que des variations.

Pareillement des valeurs positives de x, au delà d'une certaine limite $x=+B$, feront acquérir aux fonctions de la suite [1] des valeurs qui seront toutes de même signe, de sorte que la suite des résultats n'offrira plus alors que des permanences.

Puisque la substitution de la limite $-A$, dans la suite des fonctions [1], ne doit donner que des variations, et que ces fonctions sont au nombre de $m+1$, il s'ensuit que le nombre des variations est égal à m, c'est-à-dire au degré de l'éq. $X=0$. Ainsi, m est le nombre total des variations que doit perdre la suite [1] en faisant augmenter x depuis $-A$ jusqu'à $+B$.

Cela posé, considérons le cas où les m racines de l'éq. $X=0$ sont réelles, et concevons qu'on substitue dans la suite [1] deux quantités α et β intermédiaires entre $-A$ et $+B$, α étant $<\beta$: je dis qu'alors le nombre des racines comprises entre α et β serait précisément égal à celui des variations perdues par la suite [1] quand on passe de $x=\alpha$ à $x=\beta$. En effet, on sait déjà que le nombre de ces racines ne peut pas être plus grand que celui des variations perdues (495); et, d'un autre côté, s'il était moindre, il faudrait, par compensation, qu'on trouvât, en passant de $-A$ à α ou de β à $+B$, plus de racines que de variations perdues, ce qui est impossible (498).

Maintenant, ne supposons plus que l'équation ait ses m racines réelles. Nommons n le nombre des variations perdues en passant

de α à β. Par le théorème du n° 495, il est clair que le nombre des racines réelles, qui sont en deçà de α et au delà de β, ne devra jamais excéder $m-n$; donc, s'il y a entre α et β moins de n racines réelles, on est certain que ce nombre doit être complété par des racines imaginaires.

Pour cette raison, et afin de rendre le discours plus général, Fourier propose de regarder l'intervalle de α à β comme comprenant n racines; mais alors il faut sous-entendre que quelques-unes d'entre elles peuvent être *déficientes* ou imaginaires.

498. Le théorème du n° 495 renferme comme corollaire celui de Descartes. Pour une certaine limite positive $x=+B$, la suite [1] ne doit avoir que des permanences. Mais si on fait $x=0$, les fonctions de cette suite se réduisent aux coefficients mêmes de l'éq. $X=0$, abstraction faite de certains multiplicateurs numériques et positifs : donc, de $x=0$ à $x=+B$, la suite doit perdre autant de variations qu'il y en a dans l'équation; donc le nombre des racines positives, lesquelles sont toutes entre 0 et $+B$, est tout au plus égal au nombre des variations de l'équation. Tel est en effet le théorème de Descartes (486).

Si l'équation manque de quelques termes, il y aura, dans la suite [1], des fonctions qui s'anéantiront pour $x=0$. Mais on peut supposer à ces zéros des signes tels que les variations soient en même nombre que si on ne tenait aucun compte des termes manquants; par conséquent le corollaire est vrai sans qu'il soit nécessaire de faire aucune attention à ces termes. Cette remarque s'accorde parfaitement avec ce qui a été dit au sujet du théorème de Descartes. Et ici encore on peut ajouter, comme conséquence immédiate du nouveau théorème, que si le nombre des variations de l'équation est plus grand que celui des racines positives, la différence sera toujours un nombre pair, qui indiquera dans l'équation un nombre égal de racines imaginaires.

499. L'utilité du nouveau théorème, pour la recherche des racines réelles, est facile à apercevoir. Dans les fonctions

[1] $$X^{(m)},\ X^{(m-1)},\ldots X'',\ X',\ X,$$

on substituera des quantités négatives croissantes de 0 vers $-\infty$, jusqu'à ce qu'on parvienne à une limite $-A$, qui ne donne que des variations de signes ; puis on substituera aussi des quantités positives croissantes de 0 vers $+\infty$, jusqu'à ce qu'on atteigne une

limite $+B$, qui ne donne que des permanences. Quant aux intervalles des substitutions, ils pourront varier selon telle loi qu'on jugera convenable. Parmi ces intervalles, il en faudra distinguer de plusieurs sortes.

Si un intervalle est compris entre deux quantités, dont l'une donne une variation de moins que l'autre, il y a entre ces quantités une racine réelle de l'équation, et il n'y en a qu'une.

Si un intervalle est formé par deux quantités, dont l'une donne plusieurs variations de moins, mais en nombre impair, on sera sûr qu'il y a dans cet intervalle un nombre impair de racines réelles; mais on ne saura pas encore s'il y en a une seule ou plusieurs.

Enfin, si un intervalle est formé par deux quantités, dont l'une donne plusieurs variations de moins, mais en nombre pair, cet intervalle pourra renfermer un nombre pair de racines ou n'en renfermer aucune.

500. Dans les deux derniers cas, il reste de l'incertitude sur le nombre des racines réelles que comprend l'intervalle. La première idée qui s'offre à la pensée est de partager l'intervalle en plusieurs intervalles moindres par des quantités intermédiaires qu'on substituera dans la suite [1], et d'appliquer à ces substitutions les règles précédentes. Si la séparation n'est pas encore complétement opérée, on subdivisera les derniers intervalles, et ainsi de suite. Lorsque l'intervalle primitif ne comprend que des racines réelles et inégales, ces subdivisions répétées doivent en opérer infailliblement la séparation. Nous écarterons ici le cas des racines égales, attendu qu'on a une méthode pour décomposer une équation, qui a des racines égales, en d'autres équations dont toutes les racines sont inégales.

Lorsque l'intervalle primitif ne comprend pas de racines réelles, la subdivision de cet intervalle n'aura aucun terme, et l'on ignorera toujours si la séparation est impossible en raison de ce que les racines sont imaginaires, ou si elle est seulement retardée en raison de ce que leurs différences sont extrêmement petites. De nouvelles règles sont donc nécessaires pour faire disparaître le doute; et c'est à quoi l'on parvient sûrement en employant, avec LAGRANGE, des substitutions intermédiaires, dont les intervalles soient moindres que la plus petite différence entre les racines.

Il reste donc encore à éviter l'équation aux carrés des différences dont le calcul est d'une prolixité si fastidieuse, et j'ai déjà dit que

BUDAN avait dirigé ses recherches vers ce but. Mais il n'a point pu y réussir, même avec le secours de son théorème; et la seule utilité qu'il en ait tirée consiste à reconnaître, comme on l'a fait plus haut, certains intervalles dans lesquels il n'y a point de racines réelles, ce qui peut diminuer considérablement le nombre des substitutions exigées par la méthode de LAGRANGE.

FOURIER, dans son *Analyse des équations*, n'a pas été plus heureux. Cependant ce géomètre, dans les Mémoires de l'Institut, année 1827, a énoncé qu'on pouvait procéder immédiatement au calcul des racines en fractions continues, comme si l'on était assuré que toutes les racines sont réelles, et que la distinction des racines réelles et des racines imaginaires ne doit pas manquer de s'opérer; mais cette propriété remarquable des fractions continues n'était appuyée d'aucune preuve. C'est à M. VINCENT qu'on doit de l'avoir mise hors de doute, et d'avoir montré qu'on en déduit, pour résoudre les équations, une méthode rigoureuse, entièrement affranchie de l'équation aux carrés des différences. Le théorème de BUDAN y est d'un grand secours pour diminuer le nombre des substitutions qu'elle pourrait encore exiger. Voy. le Mémoire de M. VINCENT, déjà cité, p. 417.

Théorème de M. STURM. — Son usage dans la résolution des équations. — Comment il donne les conditions de la réalité des racines.

301. Si l'on avait un théorème pour juger d'une manière précise combien une équation a de racines réelles entre deux nombres donnés, on pourrait procéder d'une manière certaine au calcul de ces racines, au moyen d'approximations successives, en subdivisant l'intervalle de deux nombres par intervalles partiels de plus en plus resserrés. Ce théorème important a été découvert par M. STURM, qui l'a communiqué à l'Institut en 1829; et depuis lors il est devenu une partie essentielle de la théorie des équations.

Soit une équation $X = 0$, qui n'a plus de racines égales, et dont le 1er membre est un polynome de la forme

$$X = Gx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U,$$

dans lequel tous les coefficients sont des nombres réels. Formons d'abord le polynome dérivé X_1 de X; divisons X par X_1, et, quand nous serons parvenus à un reste de degré inférieur à X_1, changeons

les signes de tous les termes de ce reste. Désignons par X_2 ce qu'il devient alors, divisons de la même manière X_1 par X_2, et changeons encore les signes du reste, on aura un nouveau polynome X_3, de degré moindre que X_2. Divisons semblablement X_2 par X_3, et continuons cette série de divisions comme s'il s'agissait de découvrir le plus grand commun diviseur de X et X_1, en ayant soin de changer toujours les signes des restes. On est sûr à la fin d'arriver à un reste numérique, c'est-à-dire qui ne contiendra plus x; et ce reste sera différent de zéro, autrement l'éq. $X = 0$ aurait des racines égales, ce qui est contre la supposition. Après avoir changé aussi le signe de ce reste, représentons-le par X_r.

On aura ainsi une suite de fonctions

$$(x) \qquad X,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ldots\ X_{r-1},\ X_r,$$

qui toutes contiendront x à l'exception de la dernière, X_r. Je désignerai cette suite de fonctions, ainsi écrites, en disant d'une manière abrégée, la *suite* (x); et pour indiquer ce qu'elle devient en y remplaçant x par une valeur particulière a, je dirai simplement la *suite* (a). Le nom de fonctions *intermédiaires* sera donné à celles qui sont placées entre X et X_r. Cela posé, voici une règle sûre pour connaître combien l'éq. $X = 0$ a de racines réelles comprises entre deux nombres quelconques α et β, α étant $< \beta$:

Substituez α *dans la suite* (x), *écrivez par ordre sur une même ligne les signes de tous les résultats, puis comptez le nombre des variations contenues dans cette suite de signes; écrivez semblablement sur une même ligne les signes qu'on obtient en substituant* β, *puis comptez le nombre des variations de cette seconde suite : autant elle aura de variations de moins que la première, autant l'éq.* $X = 0$ *aura de racines réelles entre* α *et* β.

Tel est le beau théorème dont M. Sturm a enrichi l'analyse algébrique, et dont la démonstration va nous occuper.

Nommons Y_1, Y_2, Y_3,... Y_{r-1}, les quotients qu'on trouve en divisant X par X_1, X_1 par X_2, etc.; et rappelons que les restes de ces divisions sont $-X_2$, $-X_3$,... $-X_r$. On aura les égalités

$$[1] \qquad \left\{\begin{array}{l} X = X_1Y_1 - X_2, \\ X_1 = X_2Y_2 - X_3, \\ X_2 = X_3Y_3 - X_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{r-2} = X_{r-1}\,Y_{r-1} - X_r. \end{array}\right.$$

Deux conséquences importantes se déduisent immédiatement de ces égalités.

1° Deux fonctions consécutives de la suite (x) ne peuvent pas devenir nulles pour une même valeur de x. En effet, si on pouvait avoir à la fois $X_{n-1} = 0$ et $X_n = 0$, l'égalité

$$X_{n-1} = X_n Y_n - X_{n+1},$$

qui se trouve parmi les précédentes, prouverait qu'on doit avoir aussi $X_{n+1} = 0$; et en descendant d'égalité en égalité on conclurait qu'on doit avoir $X_r = 0$, ce qui est contre la supposition.

2° Si une fonction intermédiaire de la suite (x) devient zéro pour une certaine valeur de x, les valeurs de la fonction précédente et de la suivante sont de signes contraires. En effet, lorsqu'on a $X_n = 0$, l'égalité ci-dessus se réduit à $X_{n-1} = - X_{n+1}$.

Maintenant concevons qu'à partir de $X = \alpha$ on fasse augmenter x d'une manière continue, et examinons comment peuvent s'introduire des changements dans les signes de la suite (x). Tant que x n'aura pas atteint une valeur propre à faire évanouir une ou plusieurs fonctions de la suite (x), il est clair qu'aucune de ces fonctions ne changera de signe, et que par conséquent la suite (x) présentera toujours les mêmes successions de signes. Supposons donc que x ait atteint une valeur a qui anéantisse une ou plusieurs des fonctions X, X_1, X_2, etc.; mais supposons d'abord que X n'en fasse point partie.

Soit X_n une fonction intermédiaire qui devient nulle par la valeur $x = a$. Suivant ce qui a été remarqué plus haut (1° et 2°), les fonctions X_{n-1} et X_{n+1}, pour la valeur $x = a$, devront être différentes de zéro et avoir des signes contraires : de sorte qu'en donnant à la fonction nulle tel signe qu'on veut, la suite des trois fonctions X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, présentera toujours une variation et n'en présentera qu'une seule.

Depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = a$, aucune des fonctions X_{n-1}, et X_{n+1} n'ayant changé de signe, elles ont dû être de signes contraires; par conséquent, quel qu'ait été le signe de X_n avant de faire $x = a$, la suite des trois fonctions présentait aussi une variation et n'en présentait qu'une seule.

Si on fait $x = a + h$, on pourra prendre h positif et assez petit pour qu'il n'y ait aucune racine des éq. $X_{n-1} = 0$ et $X_{n+1} = 0$ entre a et $a + h$. Dans cet intervalle, aucune des fonctions X_{n-1} et X_{n+1}

ne changera de signe; elles seront donc de signes contraires, et par conséquent, quel que soit le signe de X_n, il y aura encore une variation unique dans la suite des trois fonctions.

S'il y a quelque autre fonction intermédiaire qui soit zéro pour $x=a$, on est sûr qu'elle est placée entre deux fonctions qui ne s'anéantissent pas, et les raisonnements précédents seront tout à fait applicables à ces trois fonctions. Donc, après la valeur $x=a$, il y aura dans la suite (x) le même nombre de variations qu'auparavant, quoiqu'elles puissent être autrement distribuées.

La succession de signes, qui s'établit en substituant des valeurs de x un peu plus grandes que a, se maintient la même jusqu'à ce que x dépasse une valeur qui annule quelque fonction de la suite (x). Mais si cette valeur n'anéantit point la première, X, l'explication précédente prouve qu'après cette valeur les variations de la suite (x) seront encore en même nombre. Par là on voit clairement que ce nombre ne peut pas changer, à moins que x ne parvienne à dépasser une racine de l'éq. $X=0$. Il faut donc comparer les signes que prend alors cette suite avec ceux qu'elle avait auparavant, pour des valeurs de x un peu au-dessous de cette racine.

Soit a une racine de l'éq. $X=0$; faisons $x=a+h$, h étant une quantité positive aussi petite qu'on voudra. En désignant par A, A', A'',... les valeurs du polynome X et de ses dérivés pour $x=a$, et par H la valeur de X correspondante à $a+h$, on aura $H=A+A'h+\frac{1}{2}A''h^2+\text{etc.}$ Mais, puisque a est racine de $X=0$, on a $A=0$: donc

$$H=A'h+\tfrac{1}{2}A''h^2+\text{etc.};$$

et d'ailleurs on est sûr que A' est différent de zéro, attendu que l'éq. $X=0$ n'a pas de racines égales. En mettant h en facteur, on écrira

$$H=h(A'+\tfrac{1}{2}A''h+\text{etc.}).$$

Alors il est évident qu'en donnant à h de très-petites valeurs positives, la quantité entre parenthèses sera de même signe que son premier terme A'; donc H sera aussi de même signe A'.

Pour savoir ce qu'était X avant que x eût atteint la valeur a, on y fera $x=a-h$; et, pour obtenir le résultat H' de cette substitution, il suffira de changer h en $-h$ dans l'expression de H. De cette manière, on a

$$H'=-h(A'-\tfrac{1}{2}A''h+\text{etc.}),$$

et l'on voit clairement que, pour de très-petites valeurs de h, la quantité H' est de signe contraire à A'. Ainsi, avant que x eût atteint la racine a, il y avait dans la suite (x) une variation de X à X_1; et, après que x a dépassé a, cette variation se trouve remplacée par une permanence. Or, de ce qui a été dit plus haut il résulte que, pour les valeurs de x un peu moindres ou un peu plus grandes que a, le reste de la suite (x) doit toujours avoir un égal nombre de variations, quand même $x=a$ ferait disparaître quelque fonction intermédiaire; donc, lorsque x en croissant vient à dépasser une racine de l'éq. $X=0$, la suite (x) perd une variation.

En continuant d'augmenter x, le nombre actuel des variations de la suite (x) demeurera le même jusqu'à ce que x dépasse encore une racine, et alors une autre variation se perdra encore. La même chose arrivera chaque fois que x dépassera une nouvelle racine; de sorte que les variations perdues par la suite (x) seront toujours en même nombre que les racines de $X=0$, comprises entre la valeur $x=\alpha$, par laquelle on a commencé les substitutions, et la valeur $x=\beta$, à laquelle on les arrête. C'est ce qui était à démontrer.

302. *Remarques*. I. Dans les divisions successives qui servent à trouver X_2, X_3, etc., on peut multiplier ou diviser les dividendes et les diviseurs par tels nombres positifs qu'on voudra. Par là les fonctions X, X_1, X_2, etc., seront seulement multipliées ou divisées par des nombres positifs, ce qui ne changera point leurs signes.

II. Si dans la suite (x) il se trouve une fonction X_k qui ne puisse pas devenir zéro de $x=\alpha$ à $x=\beta$, et si on veut connaître le nombre des racines comprises entre α et β, on pourra arrêter la suite à cette fonction et faire abstraction de celles qui viennent après elles. En effet, il est facile de voir qu'en faisant varier x seulement depuis α jusqu'à β, on peut appliquer à la suite partielle X, $X_1, \ldots X_k$ tout ce qui a été dit de la suite complète.

III. Le cas où l'une des limites α et β ferait évanouir une des fonctions X, X_1, etc., ne peut donner lieu à aucune difficulté. Si c'est une fonction intermédiaire qui disparaît, on a vu qu'elle est toujours placée entre deux fonctions qui ne disparaissent pas et qui sont de signes contraires; de sorte qu'on peut indifféremment prendre la fonction nulle avec $+$ ou avec $-$, ou même n'en tenir aucun compte. Si X s'évanouit et que ce soit, par

exemple, en faisant $x=\beta$, on conclura d'abord que β est racine; puis on remarquera, d'après la démonstration du n° précédent, qu'en donnant à x des valeurs un peu au-dessus de β, il y a une permanence de X à X_1, tandis que dans le reste de la suite, à partir de X_1, il y a le même nombre de variations que pour $x=\beta$. On connaîtra donc par la règle générale le nombre des racines réelles comprises entre α et une quantité un peu plus grande que β.

IV. Ne supposons plus que X_1 soit la fonction dérivée de X, mais un polynome assujetti seulement aux conditions de n'avoir point de facteur commun avec X, et de prendre un signe contraire à X pour des valeurs de x très-peu au-dessous d'une racine quelconque de $X=0$; puis, servons-nous de ce polynome pour calculer X_2, X_3,... comme on s'est servi d'abord du polynome dérivé. Le théorème de M. STURM subsistera également avec la nouvelle suite, X, X_1, X_2,... En effet, d'un côté, si on reprend les détails de la démonstration, on verra que les nouvelles fonctions intermédiaires jouissent encore des mêmes propriétés; et, d'un autre côté, il est clair qu'en passant d'une valeur de x un peu au-dessous d'une racine de $X=0$ à une valeur un peu au-dessus, la fonction X devra changer de signe, tandis que la fonction X_1, qui n'a point de facteurs communs avec X devra conserver le même signe.

503. Je vais montrer à présent comment le théorème de M. STURM peut encore s'appliquer quand l'équation a des racines égales. Soit

$$X=(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)(x-d)\ldots$$

Les divisions prescrites pour déduire, du polynome X et de son dérivé X_1, les fonctions X_2, X_3, etc., conduiront à un diviseur exact X_r, fonction de x, qui sera le plus grand commun diviseur de X et de X_1; et, d'après la composition connue de ce diviseur (**414**), si on divise X et X_1 par X_r, les deux quotients seront

$$V=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots.$$
$$V_1=\begin{cases} n(x-b)(x-c)(x-d)\ldots.+n'(x-a)(x-c)(x-d)\ldots \\ +(x-a)(x-b)(x-d)\ldots.+\text{etc.}\end{cases}$$

On voit déjà que V n'a plus de facteurs égaux, et que V_1 n'a point de facteur commun avec V.

Soit $x-a$ un facteur réel de X : pour mieux le mettre en évidence, on fera

$$H=(x-b)(x-c)(x-d)\ldots,$$
$$H_1=n'(x-c)(x-d)\ldots+(x-b)(x-d)\ldots+\text{etc.};$$

et il viendra

$$V=(x-a)H,\quad V_1=nH+(x-a)H_1.$$

Par la nature même des opérations qui servent à découvrir le plus grand commun diviseur de X et X_1, et à trouver ensuite les quotients V et V_1, on est certain que ces quotients, et par conséquent aussi H et H', ne doivent pas avoir de coefficients imaginaires, puisqu'il n'y en a ni dans X ni dans X_1. Cela posé, il est facile de voir que, pour des valeurs de x très-peu au-dessous de a, le facteur $x-a$ étant très-petit, V_1 aura le signe de H, lequel signe est évidemment contraire à celui de V. Donc, d'après la dernière remarque du numéro précédent, en appliquant le théorème de M. STURM à l'éq. $V=0$, on peut employer le quotient V_1 au lieu de la fonction dérivée de V.

D'un autre côté, il est facile de reconnaître que les fonctions V_2, V_3,.... qu'il faudrait déduire de V et V_1 selon la règle prescrite (**501**), ne sont autres que les quotients de X_2, X_3,... X_r par X_r; donc les deux suites

$$X,\ X_1,\ X_2,\ldots\ldots\ X_r,$$
$$V,\ V_1,\ V_2,\ldots\ldots\ V_r,$$

ne diffèrent l'une de l'autre que par un facteur commun, et quel que soit le signe de ce facteur, il est évident qu'elles doivent présenter les mêmes variations lorsqu'on y substitue une valeur de x qui n'anéantit point X. Ainsi, en appliquant le théorème à la première suite, on pourra juger combien, entre deux nombres α et β, dont aucun n'anéantit X, il y a de racines de l'éq. $V=0$, ou bien, ce qui est la même chose, combien il y a de racines de l'éq. $X=0$, abstraction faite du degré de multiplicité.

504. L'usage du théorème de M. STURM se présente de lui-même. Supposons que l'équation à résoudre n'ait plus de racines égales, et formons la suite

$$(x)\qquad X,\ X_1,\ X_2,\ldots.\ X_r.$$

Il est évident que la substitution de 0 à la place de x réduit cha-

cune de ces fonctions à son dernier terme ; et d'ailleurs on sait que les valeurs de x au-dessus d'une certaine limite positive, $+L$, font prendre à chaque fonction le même signe qu'à son premier terme : donc, à la seule inspection de la suite (x) on pourra connaître le nombre des variations de la suite (0) et aussi celui des variations de la suite $(+L)$. La différence entre ces deux nombres indiquera combien l'équation a de racines positives.

On découvre avec la même facilité combien elle a de racines négatives, en observant qu'au delà d'une certaine limite, $-L'$, tous les nombres négatifs font acquérir à chaque fonction de la suite (x) le même signe qu'à son premier terme.

Pour plus de commodité, on prend $+\infty$ et $-\infty$ au lieu de $+L$ et $-L'$: c'est une manière abrégée de désigner deux nombres qui peuvent être aussi grands qu'on veut.

505. Comme les racines négatives deviennent positives en changeant x en $-x$, je ne parlerai plus que de ces dernières. Pour les séparer, on substituera, dans la suite (x), des nombres positifs croissants 0, α, β, γ, etc. ; et en notant le nombre des variations perdues à chaque substitution, on reconnaîtra le nombre des racines comprises entre 0 et α, entre α et β, etc. Ces substitutions devront être continuées jusqu'à ce qu'on trouve une suite dont les variations soient en même nombre que celles de la suite $(+\infty)$. On n'ira pas plus loin : car il ne peut point y avoir de racines au-dessus du dernier nombre substitué.

Admettons qu'il y ait plusieurs racines entre α et β, on fera une ou plusieurs substitutions intermédiaires ; et les variations que perdra la suite (x), après chaque substitution, indiqueront les racines comprises entre les nombres substitués. Il pourra se faire que quelques essais suffisent ainsi pour effectuer complétement la séparation des racines, c'est-à-dire pour assigner à chacune d'elles deux limites entre lesquelles elle soit seule comprise. Mais quand deux ou plusieurs racines seront très-rapprochées, il sera nécessaire de multiplier beaucoup les substitutions pour les séparer, et, comme l'équation n'a point de racines égales, on est sûr d'y parvenir toujours. La longueur des calculs sera rachetée par l'avantage d'avoir ces racines avec une grande approximation.

506. La loi suivant laquelle croissent les nombres 0, α, β, γ,... est arbitraire ; mais il sera bien de commencer par les nombres $0, 1, 10, 100, 1000$, etc. A l'avantage de n'avoir que des calculs

faciles, se joint celui de déterminer combien il y a de racines entre 0 et 1, entre 1 et 10, entre 10 et 100, etc.

S'il y a des racines entre 1 et 10, on déterminera la partie entière de chacune en substituant les nombres 1, 2, 3,... jusqu'à 10, s'il y a des racines entre 10 et 100, le chiffre des dizaines de chacune se connaîtra en substituant 10, 20, 30,... jusqu'à 100; et ainsi de suite. Semblablement, pour les racines <1, on connaîtrait le chiffre décimal de l'ordre le plus voisin de la virgule, en substituant les nombres de 0,1 à 1, ou bien de 0,01 à 0,1, etc.

En procédant de cette manière, on obtient le chiffre de l'ordre le plus élevé contenu dans chaque racine : voici comment on obtiendra celui de l'ordre immédiatement inférieur. Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse des racines comprises de 100 à 1000, et qu'on ait reconnu que quelques-unes d'elles sont entre 300 et 400. Il est évident que la substitution des nombres 300, 310, 320,... dans la suite (x) fera découvrir le chiffre des dizaines; mais, pour faciliter ces calculs, on changera d'abord x en $300+x'$ et on aura ainsi une nouvelle suite (x'), dans laquelle il n'y aura plus qu'à substituer les nombres 0,10, 20,...

Admettons maintenant qu'après la détermination des dizaines, on ait reconnu qu'il y a des racines entre 350 et 360. La substitution des nombres 350, 351, 352,... dans la suite (x) ferait découvrir le chiffre des unités, mais ici encore on peut simplifier le calcul. Le changement de x en $300+x'$ a déjà transformé la suite (x) en une autre suite (x'). Or, celle-ci se transformera pareillement en une suite (x'') en y remplaçant x' par $50+x''$; et il est clair que si on met dans cette dernière les nombres 0, 1, 2,... on aura les mêmes résultats qu'en substituant 50, 51, 52,... dans la suite (x'), ou bien 350, 351, 352,... dans la suite (x).

Rien n'empêche de continuer ces calculs pour connaître successivement les dixièmes, les centièmes, etc.; et, par cette voie, non-seulement on arrive à séparer les racines, mais encore à les calculer avec telle approximation qu'on voudra.

307. Le théorème de M. Sturm est encore d'un usage facile, quand on veut obtenir les racines en fractions continues. Après avoir reconnu qu'il y a des racines entre deux nombres entiers consécutifs, α et $\alpha+1$, que je suppose positifs, on fera $x=\alpha+\frac{1}{x'}$, dans la suite (x), et il en résultera une nouvelle suite (x'), avec

laquelle on trouvera les parties entières des valeurs de x' qui sont >1. Soit β une de ces parties entières, on fera $x'=\beta+\frac{1}{x''}$ dans la suite (x'), et l'on aura une nouvelle suite (x''), qui servira à trouver les parties entières des valeurs de x''. On continuera ainsi aussi loin qu'on le jugera convenable. Pour la facilité du calcul, on pourra, dans chaque fonction des suites (x'), (x''),... réduire tous les termes au même dénominateur et ne plus tenir aucun compte de ce dénominateur, pourvu qu'il soit positif.

308. Ce théorème donne aussi un moyen simple d'établir les conditions de la réalité des racines. Comme les racines réelles sont toutes comprises entre deux limites, $-L'$ et $+L$, l'une négative et l'autre positive, qu'on peut choisir aussi grandes qu'on voudra, la question revient à chercher les conditions nécessaires pour que, de $x=-L'$ à $x=+L$, la suite X, X_1, X_2, etc., perde un nombre de variations égal au degré de l'équation.

En supposant ce degré égal à m, il faudra donc qu'elle perde m variations. Or, pour qu'elle ait m variations, il faut qu'elle ait au moins $m+1$ termes; et comme elle ne peut pas en avoir davantage, on est sûr que les quantités X, X_1, X_2, etc. sont au nombre de $m+1$, et que par conséquent elles sont respectivement du degré m, $m-1$, $m-2$, etc. La dernière, qui ne contient plus x, sera alors représentée par X_m.

Lorsque, dans des polynomes en x, on substitue pour x de très-grands nombres, positifs ou négatifs, on sait que les résultats sont de mêmes signes que si chaque polynome était réduit à son premier terme : ainsi, dans la recherche qui nous occupe, on ne doit faire attention qu'au premier terme de chaque polynome. Prenons l'éq. $X=0$ sous la forme ordinaire

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\text{etc.}=0.$$

Le premier terme de X sera x^m, et celui du polynome dérivé X_1 sera mx^{-1}. Quant à ceux des polynomes X_2, X_3, etc., ils sont des fonctions qui se composent des coefficients P, Q, etc., et qui se déterminent par des divisions successives conformément à la règle. Représentons ces fonctions par G_2, G_3, ... G_m, et écrivons par ordre les $m+1$ quantités

$$x^m,\quad mx^{m-1},\quad G_2x^{m-2},\quad G_3x^{m-3},\ldots\ldots G_m.$$

La question sera réduite à chercher les conditions qui feront

perdre m variations à cette suite lorsqu'on passera de $x = -L'$ à $x = +L$. Pour que cela soit, il faut qu'elle ait m variations après la substitution de $-L'$, et m permanences après celle de $+L$. Mais, d'un autre côté, dans cette suite les puissances de x vont en diminuant d'une unité; par conséquent, si elle n'a que des permanences en faisant $x = +L$, elle n'aura que des variations en faisant $x = -L'$. Ainsi, les conditions cherchées se réduisent simplement à celles qui sont nécessaires pour que cette suite n'ait que des coefficients positifs : c'est-à-dire à celles-ci, $G_2 > 0$, $G_3 > 0, \ldots G_m > 0$.

Ces conditions ne seront jamais en nombre $> m-1$. Mais elles pourront être en nombre moindre, attendu que quelques-unes des inégalités ci-dessus peuvent rentrer dans les autres.

En se servant de l'équation aux carrés des différences (495), ces conditions se présentaient au nombre de $\frac{1}{2}m(m-1)$, lequel est, comme on voit, beaucoup trop considérable. Le perfectionnement que le théorème de M. Sturm ajoute à cette recherche importante mérite d'être remarqué.

509. Comme application, cherchons les conditions nécessaires pour la réalité des racines de l'éq. $x^3 + Qx + R = 0$. Ici on a $m = 3$, et les conditions sont seulement au nombre de deux, $G_2 > 0$ et $G_3 > 0$. Pour avoir G_2 et G_3, on calculera X_2 et X_3 par des divisions successives comme ci-après.

Première division.		*Deuxième division.*	
$x^3 + Qx + R$	$3x^2 + Q$	$3x^2 + Q$	$-2Qx - 3R$
$3x^3 + 3Qx + 3R$	x	$12Q^2x^2 + 4Q^3$	$-6Qx + 9R$
$-3x^3 - Qx$		$-12Q^2x^2 - 18QRx$	
$+2Qx + 3R$		$-18QRx + 4Q^3$	
$-2Qx - 3R$		$+18QRx + 27R^2$	
		$4Q^3 + 27R^2$	
		$-4Q^3 - 27R^2$	

Pour éviter les dénominateurs, on a multiplié le dividende par 3 dans la première division, et par $4Q^2$ dans la seconde. Les restes se trouvent ainsi multipliés par des facteurs positifs, ce qui est indifférent. On a d'ailleurs eu soin, suivant la règle, de changer le signe du reste après chaque division.

De cette manière il vient $X_2 = -2Qx - 3R$, $X_3 = -4Q^3 - 27R^2$; par conséquent les inégalités $G_2 > 0$, $G_3 > 0$, deviennent $-2Q > 0$, $-4Q^3 - 27R^2 > 0$. Mais si on change les signes, et si on observe

que la première inégalité est renfermée dans la deuxième, on n'aura plus que la condition déjà connue, $4Q^3+27R^2<0$.

Théorème de Rolle. — Comment il donne les conditions de réalité des racines.

510. Soit l'éq. $F(x)=0$ qui n'a plus de racines égales. On a vu qu'en faisant croître x d'une manière continue, la *suite* de M. Sturm perd une variation chaque fois que x dépasse une racine de l'éq. $F(x)=0$, et qu'elle n'en peut point perdre autrement. De plus, on a vu que cette variation se perd au commencement de la suite parce que $F(x)$ change de signe et que $F'(x)$ n'en change pas : de telle sorte que $F(x)$ est toujours de signe contraire à $F'(x)$ pour une valeur de x un peu moindre qu'une racine, et toujours de même signe pour une valeur un peu plus grande.

Ainsi, quand on s'élève d'une racine r à une racine r', qui est immédiatement au-dessus de r, $F(x)$ doit être de même signe que $F'(x)$ pour une valeur de x un peu plus grande que r, et de signe contraire à $F'(x)$ pour une valeur de x un peu moindre que r'. Or, dans l'intervalle de r à r', $F(x)$ ne change pas de signe; donc $F'(x)$ doit en changer au moins une fois; donc l'éq. $F'(x)=0$ a au moins une racine entre r et r'.

Soient a, b, c, d,... g, les racines réelles de $F(x)=0$, rangées par ordre de grandeur en commençant par la plus grande, et soient a_1, b_1, c_1,... g_1, les racines réelles de $F'(x)=0$, disposées de la même manière. On vient de reconnaître que ces dernières sont comprises, partie entre a et b, partie entre b et c, etc.; et rien n'empêche d'ailleurs qu'il n'y en ait quelques-unes au-dessus de a, et aussi quelques-unes au-dessous de g. De là on conclut que l'éq. $F(x)=0$ ne peut avoir qu'une seule racine au-dessus de a_1, qu'une seule entre a_1 et b_1, qu'une seule entre b_1 et c_1,... et enfin qu'une seule au-dessous de g_1. Cette propriété, connue depuis longtemps, n'est autre que le théorème de Rolle.

511. Ce théorème s'est présenté comme conséquence de celui de M. Sturm, mais on le démontre directement comme il suit :

Soient a, b, c,... g les racines réelles de $F(x)=0$, et soient a', b', c',... les racines imaginaires : si on pose

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots=\varphi(x),$$
$$(x-a')(x-b')(x-c')\ldots=\psi(x),$$

on aura $F(x) = \varphi(x) \times \psi(x)$; et, d'après ce qui a été dit (414) sur la composition du polynome dérivé $F'(x)$, on a

$$F'(x) = \frac{\varphi(x) \times \psi(x)}{x-a} + \frac{\varphi(x) \times \psi(x)}{x-b} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{\varphi(x) \times \psi(x)}{x-a'} + \frac{\varphi(x) \times \psi(x)}{x-b'} + \text{etc.},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$F'(x) = \left(\frac{\varphi(x)}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{x-b} + \frac{\varphi(x)}{x-c} + \text{etc.}\right) \times \psi(x)$$
$$+ \left(\frac{\psi(x)}{x-a'} + \frac{\psi(x)}{x-b'} + \frac{\psi(x)}{x-c'} + \text{etc.}\right) \times \varphi(x).$$

Supposons que les racines a, b, c, d,... g, soient rangées par ordre de grandeur en commençant par la plus grande, faisons successivement $x=a$, b, c,... et examinons les signes des valeurs correspondantes de $F'(x)$.

D'abord il est clair que chaque substitution fera évanouir $\varphi(x)$, mais que $\psi(x)$, qui ne renferme aucun facteur réel, ne pourra devenir ni nul ni négatif. Ensuite, si on observe que

$$\frac{\varphi(x)}{x-a} = (x-b)(x-c)\ldots, \quad \frac{\varphi(x)}{x-b} = (x-a)(x-c)\ldots,$$

$$\frac{\varphi(x)}{x-c} = (x-a)(x-b)\ldots, \quad \text{etc.}$$

il sera facile de voir que les substitutions de a, b, c,... amènent les résultats ci-dessous :

$$x = a \text{ donne } \frac{\varphi(x)}{x-a} > 0, \quad \text{donc } F'(a) > 0;$$

$$x = b \text{ donne } \frac{\varphi(x)}{x-b} < 0, \quad \text{donc } F'(b) < 0;$$

$$x = c \text{ donne } \frac{\varphi(x)}{x-c} > 0, \quad \text{donc } F'(c) > 0;$$

etc.

Ces résultats étant alternativement positifs et négatifs, l'équation $F'(x)=0$ a au moins une racine réelle entre a et b, au moins une entre b et c, au moins une entre c et d, et ainsi de suite.

Donc, en désignant, comme plus haut, par a_1, b_1, c_1,... g_1 les racines réelles de $F'(x)=0$ rangées par ordre décroissant, on sera certain qu'elles sont comprises, partie entre a et b, partie entre b et c, etc. Et ici encore on doit observer qu'il peut y en avoir de

plus grandes que a et de plus petites que g. Donc aussi l'équation $F(x)=0$ ne peut avoir qu'une seule racine au-dessus de a_1, qu'une seule entre a_1 et b_1, qu'une seule entre b_1 et $c_1,\ldots$, et enfin qu'une seule au-dessous de g_1.

Le théorème de ROLLE se trouve ainsi démontré de nouveau. Il n'établit pas que deux racines consécutives de l'équation dérivée $F'(x)=0$ *comprennent nécessairement* une racine de la proposée; mais qu'*elles ne peuvent pas en comprendre plus d'une.*

De là on tire cette conséquence, que dans une équation le nombre des racines réelles comprises entre deux quantités α et β ne peut pas surpasser de plus d'une unité le nombre des racines de la dérivée qui sont comprises entre les mêmes quantités α et β. Donc aussi le nombre des racines réelles d'une équation ne peut pas surpasser de plus d'une unité celui des racines réelles de la dérivée. Il est d'ailleurs bien entendu qu'il pourra être moindre.

Ce qui précède semble n'être applicable qu'aux équations dont les racines sont inégales, mais on y comprend aussi le cas des racines égales. En effet, on peut arriver à ce cas en partant d'une équation qui n'aurait que des racines inégales, et dans laquelle on supposerait que plusieurs racines, prises consécutivement, se rapprocheraient graduellement jusqu'à devenir égales entre elles. Alors, chaque racine de $F'(x)=0$, comprise entre deux racines qui deviennent égales, devra être elle-même égale à ces racines.

312. Les considérations qui mènent au théorème de ROLLE peuvent aussi fournir des caractères pour reconnaître si les m racines de l'éq. $F(x)=0$ sont réelles et inégales.

Admettons qu'elles le soient, et continuons de les désigner, dans l'ordre de leurs grandeurs, par a, b, c,.... On a vu que $F'(x)=0$ doit avoir au moins une racine réelle entre a et b, au moins une entre b et c, etc. Mais, comme elle ne doit pas avoir en tout plus de $m-1$ racines, on est sûr qu'entre deux nombres consécutifs de la suite $a, b, c,\ldots$ il y a une racine de l'équation $F'(x)=0$, et qu'il n'y en a qu'une. Plaçons aussi ces $m-1$ racines par ordre de grandeur, et nommons-les a_1, b_1, c_1, etc.

Puisque a_1 est entre a et b, b_1 entre b et c, etc., si on substitue successivement a_1, b_1, etc., à la place de x dans $F(x)$, les résultats seront alternativement négatifs et positifs : de sorte que,

Pour..... $F(a_1)$, $F(b_1)$, $F(c_1)$, etc.,
on a...... $-$, $+$, $-$, etc.

D'un autre côté, on peut appliquer à la fonction $F'(x)$ et à sa dérivée $F''(x)$ tout ce qu'on a dit de $F(x)$ et $F'(x)$, n° **511** ; donc,

$$\text{Pour....}\quad F''(a_1),\quad F''(b_1),\quad F''(c_1),\ \text{etc.,}$$
$$\text{on a.....}\quad +,\quad -,\quad +,\ \text{etc.}$$

Donc les produits $F(a_1)\times F''(a_1)$, $F(b_1)\times F''(b_1)$, etc. seront tous négatifs.

Or, si on fait $F(x)\times F''(x)=y$, et qu'on élimine x entre les deux équations

$$[2]\qquad F'(x)=0,\quad F(x)\times F''(x)=y,$$

les racines de l'équation finale en y seront précisément les produits ci-dessus; donc, puisque tous ces produits sont négatifs, l'éq. en y n'aura que des racines négatives, et par suite tous ses termes auront le signe $+$.

Ainsi, quand l'éq. $F(x)=0$ n'a que des racines réelles et inégales, il doit arriver que toutes celles de $F'(x)=0$ soient aussi réelles et inégales, et en outre qu'il n'y ait que des signes $+$ dans l'éq. en y, résultant de l'élimination de x entre les éq. [2].

Réciproquement, ces conditions étant remplies, on peut démontrer que toutes les racines de $F(x)=0$ seront réelles et inégales. D'abord, les $m-1$ racines de $F'(x)=0$ étant réelles, il est évident que les $m-1$ valeurs de y ou $F(x)\times F''(x)$ sont réelles; et, ces racines étant inégales, le n° **511** prouve que les quantités $F''(a_1)$, $F''(b_1)$, etc., doivent avoir les signes alternatifs $+-$ etc. Ensuite, de ce que l'éq. en y n'a que des signes $+$, on conclut qu'elle n'a point de racines positives; et, puisque d'ailleurs toutes ses racines sont réelles, elles ne peuvent être que négatives ; donc les $m-1$ produits

$$F(a_1)\times F''(a_1),\quad F(b_1)\times F''(b_1),\ \text{etc.}$$

sont négatifs. Or, les seconds facteurs ont les signes alternatifs $+-$ etc.; donc, les quantités $F(a_1)$, $F(b_1)$, etc. devront avoir alternativement les signes $-$ et $+$. Donc il existe, entre a_1 et la limite supérieure des racines de l'éq. $F(x)=0$, une racine de cette équation, il en existe une entre b_1 et a_1, une aussi entre c_1 et b_1, etc. Donc enfin les m racines de cette équation sont réelles et inégales.

Les conditions qui se tirent de l'éq. en y doivent être regardées comme actuellement connues : car on obtient cette équation par une simple élimination. Quant aux autres conditions qui exigent

qu'il n'y ait que des racines réelles dans l'équation dérivée $F'(x)=0$, elles sont encore à chercher. Or, cette équation n'est que du degré $m-1$, et en lui appliquant le même raisonnement qu'à $F(x)=0$, on réduira encore la question à chercher les conditions qui assurent la réalité des racines de la seconde dérivée $F''(x)=0$, laquelle n'est plus que du degré $m-2$. En continuant ainsi, on descendra jusqu'à une équation du deuxième degré, dont la dérivée, étant du premier degré, ne saurait avoir de racine imaginaire; alors la seule condition à remplir sera que l'équation en y, qui est aussi du premier degré, ait ses deux termes de même signe.

Remarque. Si on se reporte aux raisonnements qui ont conduit à faire usage de l'éq. $y=F(x)\times F''(x)$, on apercevra facilement qu'on peut la remplacer par celle-ci $y=M\times F(x)\times F''(x)$, M étant une quantité positive quelconque. Donc on peut introduire ou supprimer dans les polynomes $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, etc., tels facteurs positifs qu'on jugera convenables pour simplifier les calculs.

513. Le nombre des conditions auxquelles on parvient par ce procédé, pour une équation de degré quelconque m, est facile à déterminer. Elles doivent toutes se tirer des équations successives en y. Or, la première de ces équations résulte de l'élimination de x entre les éq. [2]

$$F'(x)=0, \quad y=F(x)\times F''(x);$$

et comme $F'(x)=0$ a $m-1$ racines, y doit aussi avoir $m-1$ valeurs. Donc l'éq. en y sera du degré $m-1$; donc, pour que tous ses termes soient de même signe, il y aura $m-1$ conditions.

Semblablement, la deuxième équation en y, résultant de l'élimination de x entre $F''(x)=0$ et $y=F'(x)\times F'''(x)$, devra donner $m-2$ conditions; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on tombe sur une équation du premier degré en y, laquelle ne donnera plus qu'une seule condition. Donc, en reprenant toutes ces conditions en ordre inverse, leur nombre sera

$$1+2+3\ldots.+(m-1)=\frac{m(m-1)}{2}.$$

Il est à remarquer que ce nombre est précisément celui qu'on trouve par l'équation aux carrés des différences (**493**).

514. Pour première application, soit l'équation

$$x^2+Px+Q=0.$$

Ici l'on a $F(x)=x^2+Px+Q$, $F'(x)=2x+P$, $F''(x)=2$; et sur-

le-champ on voit que l'éq. $F'(x)=0$ n'a pas de racine imaginaire, puisqu'elle est du 1[er] degré.

Pour avoir l'éq. en y, les deux équations entre lesquelles on doit éliminer x sont $2x+P=0$, $y=(x^2+Px+Q)\times 2$. Or, l'élimination donne

$$y+2(\tfrac{1}{4}P^2-Q)=0;$$

donc, pour que les termes de cette équation soient de même signe, il faut qu'on ait $\frac{1}{4}P^2-Q>0$; et cette condition est la seule nécessaire pour assurer la réalité des racines de l'équation du 2[e] degré.

Considérons encore l'équation du 3[e] degré. Si elle a son second terme, on peut le faire disparaître sans changer le nombre des racines réelles, c'est pourquoi je la prendrai sous la forme

$$x^3+Qx+R=0.$$

Dans ce cas $F(x)=x^3+Qx+R$, $F'(x)=3x^2+Q$, $F''(x)=6x$. Il faut d'abord que l'équation dérivée $3x^2+Q=0$ n'ait que des racines réelles et inégales; et, pour cela, la condition est évidemment $Q<0$.

Ensuite il faut éliminer x entre les deux équations

$$3x^2+Q=0,\quad y=(x^3+Qx+R)\times 6x.$$

La 2[e] revient à celle-ci, $y=6x^4+6Qx^2+6Rx$; et la 1[re] donne $x^2=-\frac{1}{3}Q$, $x^4=\frac{1}{9}Q^2$. Par suite on a $y=-\frac{4}{3}Q^2+6Rx$, d'où $x=\dfrac{3y+4Q^2}{18R}$; et, en mettant cette valeur dans l'éq. $3x^2+Q=0$, il vient, toute réduction faite,

$$y^2+\tfrac{8}{3}Q^2y+\tfrac{4}{9}Q(4Q^3+27R^2)=0.$$

Pour que les trois termes de cette équation aient même signe, il faut et il suffit que le terme tout connu soit positif. Déjà on a vu que Q doit être négatif; donc la nouvelle condition est $4Q^3+27R^2<0$.

Enfin, comme cette condition ne peut pas avoir lieu sans que Q soit négatif, on conclut, comme au n° **491**, qu'elle est la seule nécessaire pour que les racines de l'éq. du 3[e] degré soient réelles et inégales.

515. M. CAUCHY a donné aussi, sur les équations, un théorème fort remarquable, que j'ai inséré dans une précédente édition de ces LEÇONS D'ALGÈBRE; mais comme il exige l'emploi des considérations propres à la GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, c'est là que je le placerai désormais.

CHAPITRE XX.

ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS. — ÉQUATIONS RÉCIPROQUES. — ÉQUATIONS BINOMES.

Abaissement des équations lorsqu'on connaît quelque relation particulière entre les racines.

516. Une équation est toujours susceptible d'abaissement quand on connaît quelque relation particulière entre ses racines; mais dans tous ces cas on est ramené à cette question générale qu'il faut résoudre d'abord. *Comment peut-on reconnaître qu'une équation* $X=0$ *a des racines communes avec une autre,* $Y=0$, *et comment alors peut-on en abaisser le degré?*

Supposons que l'inconnue soit représentée par x dans les deux équations. Puisqu'elles ont des racines communes $a, b, c, \ldots$, les facteurs $x-a, x-b, x-c, \ldots$ doivent aussi leur être communs, et le produit de ces facteurs est le plus grand commun diviseur de leurs premiers membres X et Y. On cherchera donc ce plus grand commun diviseur; et, en le désignant par D, les racines communes dont il s'agit seront celles de l'éq. $D=0$. Si ensuite on divise X par D, et qu'on appelle X_1 le quotient, les autres racines de l'éq. $X=0$ seront celles de l'équation $X_1=0$.

Par exemple, soient les deux équations

$$x^4-15x^2+10x+24=0,$$
$$x^3+4x^2-4x-16=0.$$

En cherchant leur plus grand commun diviseur, et en l'égalant à zéro, on aura l'éq. $x^2+2x-8=0$, d'où l'on tire les racines communes $x=2$, $x=-4$.

Pour avoir les autres racines de la 1re équation, on la divise par x^2+2x-8 : il viendra $x^2-2x-3=0$, d'où $x=-1$, $x=3$. La troisième racine de la 2e équation est $x=-2$.

517. Maintenant, montrons de quelle manière on abaisse le degré d'une équation quand il existe une relation particulière entre quelques-unes de ses racines. Les généralités seraient trop difficiles à saisir : commençons par un exemple simple.

On propose d'abaisser une équation $F(x)=0$, *dans laquelle on sait qu'il y a deux racines, dont la somme est égale à une quantité connue* k.

Ces deux racines étant représentées par x et x', on devra avoir les trois équations $F(x)=0$, $F(x')=0$, $x+x'=k$. La dernière donne $x'=k-x$; et, en substituant cette valeur dans la seconde, on aura deux équations en x qui devront avoir lieu en même temps, savoir :

$$[1] \qquad F(x)=0, \quad F(k-x)=0.$$

L'éq. $F(k-x)=0$, considérée isolément, a pour racines toutes les quantités qui, étant retranchées de k, donnent pour reste une racine de $F(x)=0$; donc les éq. [1] doivent avoir pour racines communes toutes celles de l'éq. $F(x)=0$ qui, retranchées de k, reproduisent une racine de cette même équation. En conséquence, on cherchera le plus grand commun diviseur D de $F(x)$ et de $F(k-x)$; et toutes ces racines seront contenues dans l'éq. $D=0$. On divisera ensuite l'éq. $F(x)=0$ par D, et l'on aura celle qui doit renfermer les autres racines.

Si l'équation contient véritablement deux racines a et b telles qu'on ait $a+b=k$, on doit avoir également $k-a=b$ et $k-b=a$; par conséquent le diviseur commun D serait alors au moins du deuxième degré. Il sera d'un degré supérieur lorsque, parmi les racines de l'équation, il y aura plusieurs manières d'en prendre deux dont la somme soit k. Il pourra aussi être du 1er degré, et ce cas arrive lorsqu'il y a dans l'équation une racine égale à $\frac{1}{2}k$.

Rien de si facile que de former *à priori* des exemples qui présentent ces différents cas. En voici dans lesquels $k=6$.

1°
$$\begin{aligned} F(x) &= (x-2)(x-4)(x-5)^2(x-8)^2, \\ F(6-x) &= (x-4)(x-2)(x-1)^2(x+2)^2, \\ D &= (x-2)(x-4). \end{aligned}$$

2°
$$\begin{aligned} F(x) &= (x-2)(x-3)(x-4)^2(x-8)^2, \\ F(6-x) &= (x-4)(x-3)(x-2)^2(x+2)^2, \\ D &= (x-2)(x-3)(x-4). \end{aligned}$$

3°
$$\begin{aligned} F(x) &= (x-3)(x-4)(x-5)^2(x-8)^2, \\ F(6-x) &= (x-3)(x-2)(x-1)^2(x+2)^2, \\ D &= x-3. \end{aligned}$$

Remarque. Lorsqu'il y a des racines égales à $\frac{1}{2}k$ dans $F(x)=0$,

il est facile de le reconnaître en substituant $\frac{1}{2}k$ dans cette équation, et de supprimer ensuite ces racines par la division. Lorsque l'équation contient en outre d'autres racines égales entre elles, on sait comment on peut l'en débarrasser : de sorte que si, après ces simplifications, il existe dans l'équation des racines qui, étant soustraites de k, reproduisent des racines de cette équation, on sera certain qu'elles pourront être distribuées par couples a et b, c et d, etc., tels qu'on ait $a+b=k$, $c+d=k$, etc.

518. Les explications précédentes ne souffriraient que de légères modifications, si, au lieu de la somme de deux racines, on supposait que c'est leur produit, ou leur différence, ou leur quotient, qui est égal à un nombre donné k.

On a vu que les équations qui renferment des racines égales pouvaient subir un abaissement considérable. Ce cas est celui de plusieurs racines qui ont entre elles une différence k qu'on ferait égale à zéro, ou un quotient k qu'on ferait égal à l'unité.

Si l'on veut considérer la question sous le point de vue le plus général, il faudra supposer qu'il existe entre plusieurs racines d'une équation telles relations qu'on voudra. Il est facile de voir qu'alors on aura, entre ces racines inconnues, plus d'équations qu'il n'y a de ces racines, de sorte qu'on sera toujours ramené à reconnaître que plusieurs équations à une seule inconnue doivent avoir des racines communes. Mais pour arriver à ces équations, l'emploi des méthodes d'élimination peut être nécessaire.

519. Il y a certains cas où l'abaissement ne peut s'opérer qu'à l'aide de procédés nouveaux. Pour être mieux compris, je reprends l'exemple du nº **517**, dans lequel on doit avoir entre x et x' la relation $x+x'=k$; et, pour plus de netteté, je suppose qu'on ait effectué les simplifications dont il a été parlé dans la remarque. Soient alors

$$[3] \qquad F(x)=0, \quad F(k-x)=0,$$

les deux équations qui doivent avoir des racines communes.

Il peut arriver que toutes les racines de $F(x)=0$ se distribuent par couples, a et b, c et d, etc., pour chacun desquels on ait la même relation, $a+b=k$, $c+d=k$, etc. Alors il est évident qu'en mettant successivement chaque racine a, b, c,... à la place de x dans la valeur $x'=k-x$, on retrouverait toutes ces mêmes racines dans un ordre différent : de sorte que les deux équations [3] se-

raient identiques et l'abaissement n'aurait plus lieu. C'est ce qu'on voit dans l'exemple ci-dessous, où l'on suppose $k=6$:

$$\mathrm{F}(x)=(x-1)(x-2)(x-4)(x-5),$$
$$\mathrm{F}(6-x)=(x-5)(x-4)(x-2)(x-1).$$

Cependant je vais montrer que l'équation proposée pourra s'abaisser à un degré moitié moindre, au moyen d'une inconnue auxiliaire z, choisie convenablement. La condition essentielle à remplir en choisissant cette inconnue, c'est qu'elle soit égale à une fonction tellement composée avec les deux racines x et x' d'un même couple, qu'on soit assuré d'avance que les différentes valeurs de z dépendent d'une équation de degré moindre que la proposée. Ce qu'il y a de plus simple sera de prendre pour inconnue la différence des deux racines x et x', ou mieux encore leur demi-différence, et de poser $x-x'=2z$. De cette manière, on est certain que chaque couple de racines donnera pour z deux valeurs égales et de signes contraires, savoir :

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}(a-b), \\ z=\frac{1}{2}(b-a), \end{cases} \qquad \begin{cases} z=\frac{1}{2}(c-d), \\ z=\frac{1}{2}(d-c), \end{cases} \text{ etc.}$$

A la vérité, l'éq. en z sera de même degré que $\mathrm{F}(x)=0$, mais elle ne devra contenir que des puissances paires de z ; par conséquent, en prenant z^2 pour inconnue, elle sera d'un degré moitié moindre.

Quant à la manière d'avoir l'équation en z, rien de plus facile. On a ces trois équations $\mathrm{F}(x)=0$, $x+x'=k$, $x-x'=2z$. Des deux dernières on tire $x=z+\frac{1}{2}k$; et, en substituant cette valeur dans la première, on a la transformée

$$\mathrm{F}(z+\tfrac{1}{2}k)=0.$$

On peut aisément reconnaître *à posteriori* que cette transformation atteint véritablement le but qu'on se propose. Si on décompose $\mathrm{F}(x)$ en ses facteurs simples, on aura

$$\mathrm{F}(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots,$$
$$\mathrm{F}(z+\tfrac{1}{2}k)=(z+\tfrac{1}{2}k-a)(z+\tfrac{1}{2}k-b)\ldots.$$

Mais par hypothèse, $k=a+b=c+d=\ldots$; donc

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(z+\tfrac{1}{2}k)&=[z+\tfrac{1}{2}(a+b)-a][z+\tfrac{1}{2}(a+b)-b]\ldots\\ &=[z+\tfrac{1}{2}(b-a)][z-\tfrac{1}{2}(b-a)]\ldots\\ &=[z^2-\tfrac{1}{2}(b-a)^2]\ldots\end{aligned}$$

On n'a mis ici en évidence que les deux facteurs correspondant à

un couple de racines, mais cela suffit pour comprendre que l'équation en z ne contiendra que des puissances paires de z.

La transformation précédente n'est point la seule qu'on puisse employer avec succès. Par exemple, si on pose $z = xx'$, les deux racines d'un même couple ne feront prendre qu'une seule valeur à z, et par conséquent la transformée sera de degré moitié moindre que $F(x)$. Par une raison semblable, on pourrait poser $z = x^2 + x'^2$; et, en général, on peut faire l'inconnue auxiliaire égale à telle fonction de x et x' qu'on voudra, pourvu que cette fonction reste la même quand on y change ces deux racines l'une dans l'autre. Seulement, on ne devra pas recourir à la somme $x + x'$, qui est déjà connue.

Équations réciproques.

520. J'appliquerai ici les considérations précédentes à une classe d'équations dont la forme même fait découvrir une relation entre leurs racines : je veux parler des *équations réciproques*. On nomme ainsi celles dont on reproduit toutes les racines, mais dans un ordre différent, en divisant successivement l'unité par chacune d'elles. Telle est évidemment l'équation

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Px + 1 = 0 :$$

car, en changeant x en $\frac{1}{x}$, elle devient

$$\frac{1}{x^4} + \frac{P}{x^3} + \frac{Q}{x^2} + \frac{P}{x} + 1 = 0;$$

et celle-ci, en la multiplant par x^4 et renversant l'ordre des termes, n'est autre que la proposée.

521. Avant tout, cherchons quelles relations doivent avoir entre eux les coefficients d'une équation pour qu'elle soit réciproque. Soit d'abord une équation de degré impair

$$x^5 + Px^4 + Qx^3 + Rx^2 + Sx + T = 0.$$

Si on y remplace x par $\frac{1}{x}$, la transformée devra avoir les mêmes racines; donc, en la ramenant à la forme ordinaire $x^5 + \text{etc.} = 0$, elle devra être identique avec la proposée. Or, cette transformée est

$$x^5 + \frac{S}{T}x^4 + \frac{R}{T}x^3 + \frac{Q}{T}x^2 + \frac{P}{T}x + \frac{1}{T} = 0;$$

donc, pour qu'elle soit identique avec la proposée, il faut qu'on ait

$$\frac{S}{T}=P,\ \frac{R}{T}=Q,\ \frac{Q}{T}=R,\ \frac{P}{T}=S,\ \frac{1}{T}=T;$$

La dernière égalité donne $T^2=1$, d'où $T=\pm 1$; et par suite les autres s'accordent à donner $S=\pm P$, $R=\pm Q$. L'équation proposée, pour être réciproque, doit donc avoir l'une de ces formes

$$[1]\qquad x^5+Px^4+Qx^3+Qx^2+Px+1=0,$$

$$[2]\qquad x^5+Px^4+Qx^3-Qx^2-Px-1=0.$$

Donc, *pour qu'une équation de degré impair soit réciproque, il faut et il suffit que les termes à égale distance des extrêmes aient des coefficients égaux et de même signe, ou égaux et de signe contraire.*

En second lieu, soit une équation de degré pair

$$x^6+Px^5+Qx^4+Rx^3+Sx^2+Tx+U=0.$$

En changeant x en $\frac{1}{x}$, et en ramenant encore la transformée à la forme ordinaire, on trouve

$$x^6+\frac{T}{U}x^5+\frac{S}{U}x^4+\frac{R}{U}x^3+\frac{Q}{U}x^2+\frac{P}{U}x+\frac{1}{U}=0;$$

et pour rendre cette équation identique avec la proposée, il faut poser les conditions

$$\frac{T}{U}=P,\ \frac{S}{U}=Q,\ \frac{R}{U}=R,\ \frac{Q}{U}=S,\ \frac{P}{U}=T,\ \frac{1}{U}=U.$$

De la dernière on tire $U=\pm 1$. Si on prend $U=+1$, les autres donnent $T=P$, $S=Q$, $R=R$. Si on prend $U=-1$, elles donnent $T=-P$, $S=-Q$, $R=0$. Donc l'équation proposée doit avoir l'une de ces formes

$$[3]\qquad x^6+Px^5+Qx^4+Rx^3+Qx^2+Px+1=0,$$

$$[4]\qquad x^6+Px^5+Qx^4-Qx^2-Px-1=0;$$

et toutefois il faut remarquer que rien ne s'oppose à ce que R soit zéro dans la première.

Ainsi, *pour qu'une équation de degré pair soit réciproque, il faut et il suffit, en général, que les coefficients à égale distance des extrêmes soient égaux et de même signe; mais lorsque le terme du milieu manque, elle sera encore réciproque si ces coefficients sont égaux et de signe contraire.*

522. Maintenant voyons comment s'abaissent les équations ré-

ciproques. Si on considère l'éq. [1] et qu'on rapproche les termes également éloignés des extrêmes, on peut l'écrire ainsi :

$$(x^5+1)+Px(x^3+1)+Qx^2(x+1)=0.$$

Alors on voit que $x=-1$ est une racine ; et en divisant par $x+1$ chacun des binomes x^5+1, x^3+1, $x+1$, on obtient l'équation

$$\left.\begin{array}{r}x^4-1\\+P\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}x^3+1\\-P\\+Q\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}x^2-1\\+P\end{array}\right|x+1=0,$$

qui est encore réciproque, mais de même forme que l'éq. [3].

Si on considère l'éq. [2], on reconnaît que $x=1$ est une racine. Pour faciliter la division par $x-1$, on l'écrira ainsi :

$$(x^5-1)+Px(x^3-1)+Qx^2(x-1)=0;$$

puis on trouvera facilement l'équation suivante, encore de même forme que l'éq. [3],

$$\left.\begin{array}{r}x^4+1\\+P\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}x^3+1\\+P\\+Q\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}x^2+1\\+P\end{array}\right|x+1=0.$$

Si on considère l'équation [4], on voit qu'elle admet $+1$ et -1 pour racines. Écrivons-la ainsi

$$(x^6-1)+Px(x^4-1)+Qx^2(x^2-1)=0:$$

on voit qu'en effet elle se divise par x^2-1, et l'on a pour quotient une équation encore de même forme que l'éq. [3], savoir :

$$x^4+Px^3+(1+Q)x^2+Px+1=0.$$

Quoique nous ayons pris des équations d'un degré déterminé, il n'en est pas moins clair qu'en simplifiant convenablement une équation réciproque quelconque, on la ramènera toujours à celles de la forme [3]. Par cette raison, la dénomination d'équations réciproques est plus spécialement appliquée à ces dernières, et c'est d'elles seules que nous avons à nous occuper.

323. Considérons d'une manière générale l'équation réciproque

[5] $$x^{2m}+Px^{2m-1}+Qx^{2m-2}\ldots+Qx^2+Px+1=0.$$

Puisque toutes ses racines doivent se reproduire en divisant l'unité successivement par chacune, on en conclut qu'elles peuvent se distribuer par couples s que a et $\frac{1}{a}$, b et $\frac{1}{b}$, c et $\frac{1}{c}$, etc., dans chacun desquels se trouvent deux racines dont le produit est 1.

Par les considérations du n° 519 on pourra donc transformer l'équation en une autre de degré moitié moindre au moyen d'une inconnue auxiliaire; et le mieux sera de prendre

$$[6] \qquad x + \frac{1}{x} = z.$$

Il est d'ailleurs évident qu'en mettant chaque racine à son tour dans cette expression à la place de x, le nombre des différentes valeurs de z est égal à celui des couples; d'où il suit que l'éq. en z doit être d'un degré moitié moindre que celui de la proposée.

Pour former cette équation, il faut éliminer x entre [5] et [6], et l'on y parvient par un moyen aussi simple qu'élégant. En divisant par x^m et rapprochant les termes également distants des extrêmes, l'éq. [5] devient

$$x^m + \frac{1}{x^m} + \mathrm{P}\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \mathrm{Q}\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \ldots = 0;$$

et il ne s'agit plus que d'exprimer en fonction de z les binomes $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}, \ldots\ x^m + \frac{1}{x^m}$. A cet effet, remarquons d'une manière générale qu'en multipliant $x^n + \frac{1}{x^n}$ par $x + \frac{1}{x}$, on a

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right),$$

et que de là on tire, en remplaçant $x + \frac{1}{x}$ par z,

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) z - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Cette formule résout la question, car elle montre comment chaque binome peut se déduire des deux précédents. Si l'on fait successivement $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ on trouve

$$x + \frac{1}{x} = z, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = z^4 - 4z^2 + 2, \quad x^5 + \frac{1}{x^5} = z^5 - 5z^3 + 5z, \text{ etc.}$$

On reconnaît, à la forme de ces expressions, que la transformée en z sera en effet du degré m, ainsi qu'on l'avait prévu.

Quand on aura les valeurs de z, on trouvera les racines de la proposée au moyen de l'éq. [6]. Or elle équivaut à celle-ci

$$x^2 - zx + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \tfrac{1}{2}z \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{z^2 - 4};$$

par conséquent, il n'y aura plus qu'à substituer successivement les m valeurs de z pour obtenir les $2m$ valeurs de x.

On trouve des exemples d'équations réciproques dans les équations binomes dont je vais m'occuper à présent.

Équations binomes.

524. Les équations binomes sont celles qu'on ramène à la forme

$$[1] \qquad x^m = \text{A} \quad \text{ou} \quad x^m - \text{A} = 0,$$

A étant une quantité connue quelconque.

On aperçoit sur-le-champ que les m racines de cette équation sont différentes entre elles ; car le premier membre $x^m - \text{A}$ n'a point de facteur commun avec sa fonction dérivée mx^{m-1}.

Ces racines, si on les élève à la puissance m, doivent reproduire A ; donc elles sont les mêmes que les valeurs renfermées dans l'expression

$$x = \sqrt[m]{\text{A}}.$$

Ainsi, on est sûr que ce radical a m valeurs différentes, et la proposition admise n° **245** se trouve démontrée. On peut même ajouter que si A est une quantité de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, les valeurs du radical auront aussi cette forme : car on a prouvé (**389**) que cette forme est celle des racines de l'éq. [1].

525. Lorsque m est un nombre composé, la résolution de l'éq. [1] se ramène à celle de plusieurs équations binomes, dont les degrés sont les facteurs de m. Supposons $m = pqr$: au lieu de l'équation $x^{pqr} = \text{A}$, on peut prendre celles-ci

$$x^p = x', \quad x'^q = x'', \quad x''^r = \text{A},$$

dans lesquelles x' et x'' sont de nouvelles inconnues. Il est évident qu'après avoir résolu $x''^r = \text{A}$, l'éq. précédente $x'^q = x''$ fera connaître les valeurs de x' et qu'ensuite l'éq. $x^p = x'$ donnera toutes les racines de l'équation proposée.

Au reste, cette remarque revient à une formule déjà connue par la théorie des radicaux (**256**), savoir :

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{\text{A}}}} = \sqrt[pqr]{\text{A}}.$$

526. Désignons par a une quantité dont la puissance m est A,

et posons $x = ay$. L'éq. $x^m = A$ deviendra $a^m y^m = a^m$, et en divisant par a^m,

$$y^m = 1 ;$$

donc $y = \sqrt[m]{1}$, et par suite $x = a\sqrt[m]{1}$.

De là on conclut que les racines de l'éq. $x^m = A$ peuvent se former en multipliant l'une quelconque d'entre elles par celles de l'éq. $y^m = 1$: ou bien encore, comme au n° **246**, que les différentes racines $m^{\text{èmes}}$ d'une quantité peuvent s'obtenir en multipliant l'une d'elles par les racines $m^{\text{èmes}}$ de l'unité.

527. Considérons plus spécialement le cas où A est une quantité réelle ; et, pour distinguer les hypothèses de A positif ou négatif, écrivons l'équation binome comme il suit :

$$x^m = \pm A.$$

On sait déterminer, au moins par approximation, une quantité positive a telle qu'on ait $a^m = A$. Posons encore $x = ay$, l'équation ci-dessus deviendra

$$y^m = \pm 1,$$

et c'est de celle-ci que je m'occuperai exclusivement.

528. On peut, sur cette équation, faire plusieurs remarques.

Lorsque m est impair et que l'équation est $y^m = 1$ ou $y^m - 1 = 0$, elle admet évidemment la racine $y = 1$. Elle n'a pas d'autre racine réelle ; car toute autre valeur positive de y donnerait $y^m > 1$ ou $y^m < 1$, et une valeur négative rendrait y^m négatif. Pour avoir l'équation d'où dépendent les $m - 1$ racines imaginaires, on divisera $y^m - 1$ par $y - 1$, et il viendra l'équation

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \ldots + y + 1 = 0,$$

qui appartient à la classe de celles qu'on nomme *réciproques*.

Lorsque m est impair et que l'équation est $y^m = -1$ elle a évidemment pour racine $y = -1$. Des raisonnements analogues aux précédents prouveraient que les autres racines sont imaginaires ; et on aurait l'équation dont elles dépendent en divisant $y^m + 1 = 0$ par $y + 1$. Mais pour avoir toutes les racines de l'éq. $y^m = -1$, il est mieux de remarquer que cette équation se déduit de $y^m = 1$ en changeant y en $-y$; de sorte qu'il suffira de prendre toutes les racines de $y^m = 1$ avec des signes contraires.

Supposons m pair, et soit $m = 2n$: l'éq. $y^{2n} = 1$ ou $y^{2n} - 1 = 0$ a pour racines $y = +1$ et $y = -1$. Les autres sont imaginaires, et

l'équation qui les renferme s'obtiendrait en divisant $y^{2n}-1=0$ par $(y-1)(y+1)$ ou y^2-1; mais il sera mieux d'observer que $y^{2n}-1=(y^n-1)(y^n+1)$, et que par suite l'éq. $y^{2n}-1=0$ peut être remplacée par deux autres plus simples,

$$y^n-1=0,\quad y^n+1=0.$$

Enfin, lorsque l'équation est $y^{2n}=-1$ ou $y^{2n}+1=0$, on remarquera que les puissances paires des quantités réelles donnent toujours des résultats positifs; et de là on conclura que toutes les racines sont imaginaires. En posant $y^2=z$, l'équation s'abaisse au degré n et devient simplement $z^n=-1$.

529. Maintenant je vais développer les solutions des équations $y^m-1=0$ et $y^m+1=0$ dans quelques cas particuliers.

Soit $m=2$: les équations à résoudre sont

$$y^2-1=0 \quad \text{d'où} \quad y=\pm 1,$$
$$y^2+1=0 \quad \text{d'où} \quad y=\pm\sqrt{-1}.$$

Soit $m=3$: pour résoudre l'éq. $y^3-1=0$, on remarque qu'elle a pour racine $y=1$, on la divise par $y-1$, et il vient

$$y^2+y+1=0,\quad \text{d'où} \quad y=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

Donc les trois racines sont, comme on le savait déjà (**246**),

$$y=1,\quad y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

S'il s'agit de l'éq. $y^3+1=0$, on observera que ses racines sont les mêmes, au signe près, que celles de $y^3-1=0$: en conséquence elles seront

$$y=-1,\quad y=\frac{1-\sqrt{-3}}{2},\quad y=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Soit $m=4$: l'éq. $y^4-1=0$ se décomposera en deux autres, $y^2-1=0$ et $y^2+1=0$; et de celles-ci on tirera les quatre racines

$$y=\pm 1,\quad y=\pm\sqrt{-1}.$$

L'éq. $y^4+1=0$ se résoudra différemment. En ajoutant $2y^2$ aux deux membres, on l'écrira ainsi $(y^2+1)^2=2y^2$; puis on la décomposera en deux autres,

$$y^2+1=y\sqrt{2},\quad y^2+1=-y\sqrt{2};$$

et enfin, de celles-ci on tire les quatre valeurs de y,

$$y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2},\quad y=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}.$$

On aurait pu traiter l'éq. $y^4+1=0$ comme *réciproque*. On aurait pu encore remarquer qu'elle donne $y^2=\pm\sqrt{-1}$, et qu'en prenant successivement $+\sqrt{-1}$, et $-\sqrt{-1}$, on a

$$y=\pm\sqrt{+\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad y=\pm\sqrt{-\sqrt{-1}}:$$

alors on n'aurait plus qu'à ramener ces valeurs à la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et c'est ce qui a déjà été fait n° **197**.

En s'élevant successivement jusqu'au 10ᵉ degré, on reconnaîtra que l'éq. $y^m\mp1=0$ se résout par les cas précédents ou par des équations réciproques qui s'abaissent à un degré moindre que le 5ᵉ. Parcourons d'abord les degrés impairs.

Si on a l'éq. $y^5-1=0$, après avoir remarqué qu'elle admet la racine $y=1$, on la divise par $y-1$, et il vient

$$y^4+y^3+y^2+y+1=0,$$

équation réciproque qu'on abaissera au 2ᵉ degré. A cet effet on l'écrit d'abord sous cette forme

$$\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+1=0.$$

Alors on pose $y+\frac{1}{y}=z$, ce qui donne $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$; et par suite l'éq. en y se changera en celle-ci

$$z^2+z-1=0, \quad \text{d'où} \quad z=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Ces valeurs étant connues, celles de y le seront par la relation $y+\frac{1}{y}=z$. En effet cette relation donne

$$y=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4}}{2},$$

et il n'y a plus qu'à substituer, au lieu de z, successivement chacune de ses deux valeurs, pour trouver les quatre valeurs imaginaires de y. En y joignant la valeur $y=1$, on aura donc les cinq racines de l'éq. $y^5-1=0$, savoir :

$$y=1,$$

$$y=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1},$$

$$y=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}.$$

L'équation $y^7-1=0$ mènerait à l'équation $z^3+z^2-2z-1=0$; et l'éq. $y^9-1=0$ à celle-ci, $z^4+z^3-3z^2-2z+1=0$.

Les équations $y^5+1=0$, $y^7+1=0$, $y^9+1=0$, ont, au signe près, les mêmes racines que si leur second terme était -1.

Parcourons les degrés pairs. Les équations $y^6-1=0$, $y^8-1=0$, $y^{10}-1=0$, n'offrent aucune difficulté, puisque chacune d'elles se décompose en deux autres dont les racines sont connues.

En prenant $+1$ au lieu de -1, les équations analogues sont

$$y^6+1=0,\quad \text{d'où}\quad y=\sqrt{\sqrt[3]{-1}};$$
$$y^8+1=0,\quad \text{d'où}\quad y=\sqrt{\sqrt[4]{-1}};$$
$$y^{10}+1=0,\quad \text{d'où}\quad y=\sqrt{\sqrt[5]{-1}}.$$

Or, on connaît les valeurs de $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[5]{-1}$; il n'y aurait donc plus qu'à en extraire les racines carrées par les procédés du nº **197**. Mais il sera plus simple de traiter ces équations comme réciproques : car les transformées en z, dont elles dépendent, ont leurs racines réelles et sont très-faciles à résoudre.

330. Les éq. en z du 3ᵉ et 4ᵉ degré auxquelles conduisent les éq. $y^7-1=0$ et $y^9-1=0$ sont complètes, et nous donnerons plus tard des méthodes pour résoudre les équations générales de ces deux degrés. Pour le moment je me bornerai à remarquer que ces méthodes étant connues depuis longtemps, la résolution de l'éq. $y^m+1=0$ l'était aussi pour les dix premiers degrés. Dans les degrés supérieurs on pouvait bien encore, d'après la remarque du nº **325**, regarder comme résolus ceux dont les exposants sont des nombres composés des facteurs premiers 2, 3, 5, 7. Mais quand on passait à l'éq. $y^{11}-1=0$, tout ce qu'on pouvait faire était de la ramener à une transformée du 5ᵉ degré, qui était complète aussi, et qu'on ne savait pas résoudre.

On en était là lorsque Vandermonde donna l'expression de la racine de l'éq. $y^{11}-1=0$, dans un mémoire inséré parmi ceux de l'*Acad. des Sc.*, 1771. Elle est restée longtemps ignorée, et elle l'était encore en 1801, époque où Gauss publia un procédé fort ingénieux pour résoudre tous les cas de l'éq. $y^m-1=0$. Plus tard, ce procédé a encore été perfectionné par Lagrange, et c'est dans cet auteur qu'il convient de l'étudier aujourd'hui : *Résolution des équations numériques*, NOTE XIV. Au reste, les expressions qu'il fournit pour les racines sont en général peu utiles à cause des

imaginaires qui les compliquent. Quand on veut les obtenir sous la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, il vaut mieux recourir à d'autres procédés, fondés sur les propriétés des lignes trigonométriques. Voy. ma *Trigonométrie* ou ma *Géométrie analytique*.

331. J'exposerai encore ici une propriété des racines de l'unité, curieuse par elle-même, et dont les analystes font un usage fréquent. Elle a déjà été remarquée pour le 3[e] degré (**247**), et elle consiste en ce qu'*on peut, dans chaque degré, reproduire toutes les racines de l'unité par les puissances d'une des racines imaginaires.*

Reprenons l'équation

$$[2] \qquad y^m - 1 = 0,$$

et supposons d'abord que m soit un nombre premier. Soit α l'une quelconque des racines imaginaires de cette équation, on devra avoir $\alpha^m = 1$; par conséquent, en désignant par n un nombre entier quelconque positif ou négatif, on aura $\alpha^{mn} = 1$ ou $(\alpha^n)^m = 1$: donc toutes les puissances de α satisfont à l'éq. [2].

Il n'en résulte pas cependant plus de m valeurs pour y; car de $\alpha^m = 1$, on conclut $\alpha^{m+1} = \alpha$, $\alpha^{m+2} = \alpha^2$, etc. : c'est-à-dire qu'on n'obtient plus de nouvelle racine au delà de α^m. Il en serait encore de même si on prenait des puissances négatives : car on a $\alpha^{m-1} = \alpha^m \times \alpha^{-1} = \alpha^{-1}$, $\alpha^{m-2} = \alpha^m \times \alpha^{-2} = \alpha^{-2}$, etc.

D'un autre côté il sera facile de prouver que si m est un nombre premier, les m quantités $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{m-1}$ sont inégales. En effet, admettons pour un moment que n et $n+r$ étant deux nombres moindres que m, on puisse avoir $\alpha^{n+r} = \alpha^n$, on en déduirait $\alpha^r = 1$; donc α serait une racine commune aux deux équations

$$y^r - 1 = 0, \quad y^m - 1 = 0.$$

Or cela est impossible quand m est un nombre premier : car si on cherche leur plus grand commun diviseur, les réductions successives qui s'opéreront dans les exposants de y seront les mêmes que dans les restes qu'on trouve en cherchant le plus grand commun diviseur de m et r; et comme m est un nombre premier, on reconnaîtra que $y - 1$ est le plus grand commun diviseur des deux équations. Donc α ne peut pas être racine commune à ces équations; donc toutes les racines de l'éq. [2] sont représentées par la suite

$$1, \ \alpha, \ \alpha^2, \ \alpha^3, \ldots \ \alpha^{m-1}.$$

La même propriété s'étend aux cas où l'exposant m est un

nombre composé, mais alors il faut faire un choix parmi les racines imaginaires de l'équation, pour en avoir une dont les puissances reproduisent les autres racines. Pour ces détails, je renverrai encore à la *Résolution des équations numériques*, NOTE XIII.

CHAPITRE XXI.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

Calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation.

332. Il existe certaines fonctions des racines qu'on sait exprimer d'une manière générale au moyen des coefficients des équations, sans qu'on ait besoin pour cela de résoudre les équations. Ces fonctions, qui forment une classe très-étendue, sont désignées par la dénomination de *fonctions rationnelles et symétriques*, ou, plus simplement, par celle de *fonctions symétriques*.

Elles sont dites *rationnelles*, parce que les racines ne doivent point y entrer sous des radicaux, c'est-à-dire qu'elles n'y sont combinées que par addition, soustraction, multiplication et division; et elles sont dites *symétriques*, parce que les racines doivent y être combinées de telle sorte qu'on puisse les échanger entre elles, suivant tel ordre qu'on voudra, sans que la fonction change.

Par exemple, les expressions

$$a^2+b^2+c^2,\quad \frac{ab}{2c^2}+\frac{ac}{2b^2}+\frac{bc}{2a^2}-3abc,$$

sont des fonctions de a, b, c, rationnelles et symétriques. La première est entière, et la seconde est fractionnaire.

Plusieurs quantités a, b, c, d, etc., étant données, si on les arrange deux à deux de toutes les manières possibles, et que dans chaque arrangement, tel que ab, on donne l'exposant α au premier facteur, et l'exposant β au second, on aura une suite de produits tels que $a^\alpha b^\beta$, dont la somme est évidemment une fonction symétrique des quantités a, b, c, d, etc. On dit que cette fonction est *double*, parce que chaque terme renferme deux de ces quantités, et on la représente d'une manière abrégée par $S(a^\alpha b^\beta)$: la lettre S

est employée ici pour désigner le mot *somme*. On comprend de même ce que doivent être les fonctions symétriques *triples*, *quadruples*, etc., représentées par $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$, $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta)$, etc.

En suivant cette notation, les fonctions *simples*, telles que $a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha +$ etc., seraient représentées par $S(a^\alpha)$; mais, pour abréger davantage, on écrit ordinairement S_α. Ainsi, on a

$$S_1 = a + b + c + \text{etc.},$$
$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 + \text{etc.},$$
$$S_3 = a^3 + b^3 + c^3 + \text{etc.},$$
$$\text{etc.}$$

Quand les fonctions sont fractionnaires, on commence par les réduire au même dénominateur, et alors on a une fraction dont les deux termes sont des fonctions symétriques et entières. C'est pourquoi l'on n'aura à s'occuper que de ces dernières.

333. La première question à résoudre sera celle-ci : *Une équation étant donnée, trouver les sommes* S_1, S_2, *etc., des puissances semblables et entières de ses racines.*

Soit l'équation $X = 0$ ou

$$[1] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + Tx + U = 0,$$

dont je désigne les m racines par a, b, c, d..... On a trouvé n° **390** le quotient de X par $x - a$, et on peut avoir de même les quotients de X par chacun des autres facteurs $x - b$, $x - c$, etc. Or, en ajoutant ces m quotients, on sait que la somme doit être égale au polynome dérivé X' ou

$$mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + (m-2)Qx^{m-3} + (m-3)Rx^{m-4} \ldots + T;$$

il faudra donc que les multiplicateurs des mêmes puissances de x soient égaux de part et d'autre. De là résulte la détermination des sommes S_1, S_2, etc.

Reprenons donc le quotient de X par $x - a$,

$$\frac{X}{x-a} = x^{m-1} \begin{array}{l} +a \\ +P \end{array} \Bigg| x^{m-2} \begin{array}{l} +a^2 \\ +Pa \\ +Q \end{array} \Bigg| x^{m-3} \begin{array}{l} +a^3 \\ +Pa^2 \\ +Qa \\ +R \end{array} \Bigg| x^{m-4} \ldots \begin{array}{l} +a^{m-1} \\ +Pa^{m-2} \\ +Qa^{m-3} \\ +Ra^{m-4} \\ \ldots\ldots\ldots \\ +T. \end{array}$$

Pour avoir les autres quotients, il suffira de changer successivement dans celui-ci a en b, en c, en d, etc. Si on les ajoute et qu'on mette S_1, S_2, S_3, etc., au lieu des sommes $a + b + c....$, $a^2 + b^2 + c^2....$, $a^3 + b^3 + c^3....$, il vient

$$\begin{array}{r|r|r|r}
mx^{m-1} + S_1 & x^{m-2} + S_2 & x^{m-3} + S_3 & x^{m-4} .... + S^{m-1} \\
+ mP & + PS_1 & + PS_2 & + PS^{m-2} \\
 & + mQ & + QS_1 & + QS^{m-3} \\
 & & + mR & + RS^{m-4} \\
 & & & .... \\
 & & & + mT.
\end{array}$$

Donc, en comparant ce résultat avec le polynome dérivé X', on doit avoir ces relations :

$$\begin{aligned}
&S_1 + mP = (m-1)P, \\
&S_2 + PS_1 + mQ = (m-2)Q, \\
&S_3 + PS_2 + QS_1 + mR = (m-3)R, \\
&.................................. \\
&S_{m-1} + PS_{m-2} + QS_{m-3} .... + mT = T,
\end{aligned}$$

ou, en simplifiant,

$$[2] \quad \left\{\begin{aligned}
&S_1 + P = 0, \\
&S_2 + PS_1 + 2Q = 0, \\
&S_3 + PS_2 + QS_1 + 3R = 0, \\
&.......................... \\
&S_{m-1} + PS_{m-2} + QS_{m-3} .... + (m-1)T = 0.
\end{aligned}\right.$$

Au moyen de ces équations, il sera facile de calculer successivement S_1, S_2, S_3,.... et enfin S_{m-1}.

Ces déterminations s'arrêtent à la somme S_{m-1}, mais il est facile de s'élever aux sommes S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, etc. A cet effet, observons qu'en substituant successivement a, b, c,.... dans l'éq. [1], on doit avoir

$$\begin{aligned}
&a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} .... + Ta + U = 0, \\
&b^m + Pb^{m-1} + Qb^{m-2} .... + Tb + U = 0, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

multiplions ces m égalités respectivement par a^n, b^n, etc., puis ajoutons-les : d'après la notation adoptée, il viendra

$$S_{m+n} + PS_{m+n-1} + QS_{m+n-2} .... + TS_{n+1} + US_n = 0.$$

On peut faire successivement $n = 0, 1, 2$, etc., et l'on aura, pour déterminer S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, etc., ces relations:

$$[3] \quad \begin{cases} S_m + PS_{m-1} + QS_{m-2} \ldots + TS_1 + US_0 = 0, \\ S_{m+1} + PS_m + QS_{m-1} \ldots + TS_2 + US_1 = 0, \\ S_{m+2} + PS_{m+1} + QS_m \ldots + TS_3 + US_2 = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Dans la première on peut remplacer le terme US^0 par mU, car $S^0 = a^0 + b^0 + c^0 + \text{etc.} = m$; et alors on voit qu'elle est comprise dans la même loi que les éq. [2]. Cette relation fera trouver S_m au moyen des sommes S_1, S_2,... S_{m-1} déjà connues; et en passant successivement à chacune des relations suivantes, on déterminera chaque somme nouvelle au moyen de sommes déjà calculées.

Il est utile d'observer que toutes les sommes S_1, S_2, etc. seront exprimées, sans aucun dénominateur, en fonctions des coefficients P, Q, R, etc. Cette conséquence résulte de ce que le premier terme, dans chacune des relations [2] et [3], a l'unité pour coefficient.

Pour présenter une application numérique, prenons l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Dans cet exemple on a $P = 0$, $Q = -7$, $R = 7$. Puisque $P = 0$, la relation $S_1 + P = 0$ donne $S_1 = 0$; par suite les relations qui déterminent les sommes S_1, S_2,... S_6 se réduisent à celles-ci

$$S_1 = 0, \qquad S_2 + 2Q = 0, \qquad S_3 + 3R = 0,$$
$$S_4 + QS_2 = 0, \quad S_5 + QS_3 + RS_2 = 0, \quad S_6 + QS_4 + RS_3 = 0;$$

et en y substituant les valeurs de Q et de R, on trouve facilement

$$S_1 = 0,\ S_2 = 14,\ S_3 = -21,\ S_4 = 98,\ S_5 = -245,\ S_6 = 833.$$

354. *Remarque.* Dans l'éq. $S_{m+n} + \text{etc.} = 0$ trouvée plus haut, n peut être un nombre négatif, et par suite cette équation peut déterminer les sommes des puissances négatives des racines. Ainsi, en faisant $n = -1, -2$, etc., on aura

$$S_{m-1} + PS_{m-2} \ldots + TS_0 + US_{-1} = 0,$$
$$S_{m-2} + PS_{m-3} \ldots + TS_{-1} + US_{-2} = 0,$$
$$\text{etc.}$$

Ces équations font connaître successivement S_{-1}, S_{-2}, etc.; mais il sera plus simple de changer x en $\frac{1}{x}$, et de chercher ensuite, au moyen des formules [2] et [3], les sommes des puissances positives

des racines de la transformée. Il est clair, en effet, que ces puissances sont les puissances négatives de a, b, c,...

355. Je passe à *la détermination des fonctions doubles, triples, etc. représentées par* $S(a^\alpha b^\beta)$, $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$, etc.

Pour trouver $S(a^\alpha b^\beta)$, on multiplie entre elles les deux sommes

$$a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha \ldots = S_\alpha,$$
$$a^\beta + b^\beta + c^\beta \ldots = S_\beta.$$

Le produit contient deux sortes de termes : 1° la somme de toutes les puissances $\alpha+\beta$ des racines; 2° la somme de tous les produits qu'on forme en combinant la puissance α d'une racine quelconque avec la puissance β d'une autre racine. Or, la première somme est dénotée par $S_{\alpha+\beta}$, et la seconde par $S(a_\alpha b_\beta)$: donc

$$S_{\alpha+\beta} + S(a^\alpha b^\beta) = S_\alpha S_\beta;$$

et de là on tire pour les fonctions doubles, la formule

$$S(a^\alpha b^\beta) = S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta}.$$

Pour trouver la fonction triple $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$, on multiplie entre elles les trois sommes

$$a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha \ldots = S_\alpha,$$
$$a^\beta + b^\beta + c^\beta \ldots = S_\beta,$$
$$a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma \ldots = S_\gamma.$$

Le produit est une fonction symétrique qui renfermera évidemment tous les termes compris dans chacune des cinq formes

$$a^{\alpha+\beta+\gamma}, \quad a^{\alpha+\beta}b^\gamma, \quad a^{\alpha+\gamma}b^\beta, \quad a^{\beta+\gamma}b^\alpha, \quad a^\alpha b^\beta c^\gamma;$$

donc, en vertu de la notation convenue, on aura

$$\left.\begin{array}{l} S_{\alpha+\beta+\gamma} + S(a^{\alpha+\beta}b^\gamma) + S(a^{\alpha+\gamma}b^\beta) \\ \quad + S(a^{\beta+\gamma}b^\alpha) + S(a^\alpha b^\beta c^\gamma) \end{array}\right\} = S_\alpha S_\beta S_\gamma.$$

Mais la formule des fonctions doubles donne

$$S(a^{\alpha+\beta}b^\gamma) = S_{\alpha+\beta}S_\gamma - S_{\alpha+\beta+\gamma},$$
$$S(a^{\alpha+\gamma}b^\beta) = S_{\alpha+\gamma}S_\beta - S_{\alpha+\beta+\gamma},$$
$$S(a^{\beta+\gamma}a^\alpha) = S_{\beta+\gamma}S_\alpha - S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

En substituant donc ces valeurs dans l'égalité précédente, et tirant ensuite de cette égalité la valeur de $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$, on obtient, pour les fonctions triples, la formule

$$S(a^\alpha b^\beta c^\gamma) = S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_{\alpha+\beta}S_\gamma - S_{\alpha+\gamma}S_\beta - S_{\beta+\gamma}S_\alpha + 2S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Pour avoir les fonctions quadruples, etc., on se conduira d'une manière analogue : le procédé ne présente aucune difficulté.

Ici encore il importe d'observer que S_1, S_2, S_3, etc., s'exprimant sans dénominateurs, en fonctions des coefficients de l'équation proposée, il doit en être de même des sommes $S(a^\alpha b^\beta)$, $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$, etc.

536. Les formules auxquelles on est parvenu pour ces dernières sommes doivent être modifiées quand quelques-uns des exposants sont égaux. En effet, une somme quelconque $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots)$, dans laquelle chaque terme renferme n lettres, se compose en formant tous les arrangements n à n des lettres a, b, c,... et en donnant respectivement aux n lettres de chacun d'eux les exposants α, β, γ,... Or, supposons que dans un terme la lettre a ait l'exposant α, et b l'exposant β, il y aura nécessairement un autre terme qui ne différera de celui-là qu'en ce que a et b auront été échangés ; donc, si β est égal à α, l'ensemble des termes différents n'est plus que la moitié de la formule générale.

S'il y a trois exposants égaux, il est clair que chacun des termes différents de la formule y sera répété autant de fois qu'il y a d'arrangements 3 à 3 avec trois lettres ; donc, pour n'avoir que la somme des termes différents, la formule générale doit être divisée par 2×3. Et en général, si p est le nombre des exposants égaux, il faudra diviser la formule générale par $2 \times 3 \ldots \times p$.

Ces divisions s'effectueront sans laisser aucun dénominateur dans les formules, mais il serait difficile de le reconnaître par ce qui précède : le procédé suivant mettra cette propriété en évidence.

Méthode de M. Cauchy pour le calcul des fonctions symétriques.

537. Cette méthode consiste à éliminer successivement de la fonction symétrique chacune des racines a, b, c, d,... : elle se fonde sur la proposition suivante.

Soit Σ une fonction symétrique rationnelle et entière des racines d'une équation $X = 0$ ou

$$[1] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + U = 0.$$

Désignons par a l'une de ses racines, et admettons que d'une manière quelconque on transforme Σ en un polynome ordonné par rapport à a, de telle sorte qu'on ait

$$\Sigma = La^n + Ma^{n-1} + Na^{n-2} \ldots,$$

L, M, N,... étant des coefficients composés avec P, Q, R,... U. Si alors on divise ce polynome par

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + Ra^{m-3} \dots + U,$$

je dis qu'on obtiendra un reste indépendant de a, et que ce reste sera précisément la valeur de Σ.

Quel que soit a, cette division doit donner un reste de la forme $\lambda a^{m-1} + \mu a^{m-2} \dots + \theta a + \rho$. Pour abréger, nommons r ce reste, q le quotient, et A le diviseur; on aura $\Sigma = Aq + r$. Or, a étant racine de l'équation donnée, on doit avoir $A = 0$; donc $\Sigma = r$, ou, ce qui est la même chose,

$$\Sigma = \lambda a^{m-1} + \mu a^{m-2} \dots + \theta a + \rho.$$

On aurait pu conserver dans le calcul au lieu de a, l'une quelconque des autres racines de $X = 0$; et comme Σ est une fonction symétrique des m racines, il est clair qu'on serait arrivé à une valeur toute semblable à la précédente, avec cette seule différence que a y serait remplacé par l'une quelconque des $m-1$ autres racines. Or, la valeur de Σ doit demeurer la même quelle que soit la racine que l'on conserve dans le calcul; donc, en posant

$$\lambda x^{m-1} + \mu x^{m-2} \dots \theta x + \rho = \Sigma;$$

cette équation, de degré inférieur à m, devrait admettre m racines, ce qui est impossible, à moins qu'on n'ait $\lambda = 0$, $\mu = 0$,.... $\theta = 0$, $\rho = \Sigma$. C'est la proposition qu'il s'agissait d'établir. Remarquez que le polynome diviseur $a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \dots$ n'est autre que X où l'on change x en a.

Dans cette démonstration on regarde les m racines de l'éq. [1] comme inégales entre elles, mais la conclusion n'en est pas moins générale. Pour s'en convaincre, on peut supposer d'abord, comme nous l'avons fait, que toutes les racines soient inégales, et ensuite faire varier les coefficients P, Q, ... U par degrés insensibles, de telle manière que la différence entre deux racines, ou même plusieurs différences, approchent aussi près de zéro qu'on voudra. Or les dernières égalités ne cessent point de subsister, quelque petites que soient ces différences; donc elles seront encore vraies quand ces différences s'évanouiront, c'est-à-dire quand les racines de l'éq. [1] cesseront d'être inégales.

338. Dans la proposition qui fait l'objet du n° précédent, j'ai supposé qu'on avait déjà éliminé de la fonction Σ toutes les racines

excepté une. Maintenant je vais expliquer comment, par l'emploi répété de cette proposition, l'on peut en effet éliminer de la fonction Σ successivement chacune des racines qui la composent.

Soient $a, b, c, \ldots i, k, l$, les m racines de l'éq. $X=0$: en divisant successivement X par les $m-1$ facteurs $x-a$, $x-b, \ldots x-k$, l'on aura différentes équations, dont la dernière sera du 1er degré et aura l pour racine : arrêtons l'attention sur cette suite d'équations. X étant un polynome de la forme

$$X = x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots,$$

pour faciliter la division de X par $x-a$, on s'y prendra comme dans la remarque du n° **390**, et l'on aura un quotient

$$X_1 = x^{m-1} + P_1x^{m-2} + Q_1x^{m-3} + R_1x^{m-4} \ldots,$$

dans lequel P_1, Q_1, $R_1, \ldots$ sont composés comme il suit :

$$\begin{aligned} P_1 &= a + P, \\ Q_1 &= a^2 + Pa + Q, \\ R_1 &= a^3 + Pa^2 + Qa + R, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Semblablement, en divisant X_1 par $x-b$, on trouvera un quotient

$$X_2 = x^{m-2} + P_2x^{m-3} + Q_2x^{m-4} + R_2x^{m-5} \ldots,$$

dans lequel on a

$$\begin{aligned} P_2 &= b + P_1, \\ Q_2 &= b^2 + P_1b + Q_1, \\ R_2 &= b^3 + P_1b^2 + Q_1b + R_1, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

En continuant ainsi on arrivera à une division où $x-i$ sera pris pour diviseur, et où le quotient sera du 2e degré; puis enfin à une division où ce sera $x-k$ qu'on prendra pour diviseur, et où le quotient ne sera plus que du 1er degré. Il est bon de remarquer ici que les divisions par $x-a$, $x-b$, etc. ne peuvent amener aucun dénominateur dans les différents quotients, et que dans tous ces quotients le coefficient du 1er terme est l'unité.

Remplaçons x par a dans X, par b dans le 1er quotient, par c dans le 2e, ... et enfin par k, l, dans les deux derniers : on aura ainsi des polynomes que je désignerai par A, B, C, ... K, L. Le 1er sera ordonné par rapport à a, et ses coefficients ne seront autres que P, Q, R, ... Le 2e sera ordonné par rapport à b, et ses

coefficients seront composés avec a et P, Q, R,... Le 3e sera ordonné par rapport à c, et ses coefficients seront composés avec a, b, et P, Q, R,... Ainsi de suite, de telle sorte que le polynome K, ordonné par rapport à k, renferme dans ses coefficients les $m-2$ quantités $a, b, c, \ldots i$, tandis que le polynome L, ordonné par rapport à l, renferme les $m-1$ quantités $a, b, c, \ldots i, k$.

Maintenant reprenons la fonction symétrique Σ, telle qu'elle doit être composée avec les m racines $a, b, c, \ldots i, k, l$. Si on n'y fait d'abord attention qu'à la seule racine l, on l'éliminera en y substituant, au lieu de cette racine, sa valeur tirée de l'éq. $L=0$. On peut encore, ce qui est la même chose (536), ordonner Σ par rapport à l, diviser Σ par L, et alors le reste sera égal à Σ.

Cette valeur Σ, où n'entre plus l, est encore fonction symétrique rationnelle et entière des $m-1$ racines $a, b, c, \ldots i, k$. On pourra en éliminer k, en l'ordonnant par rapport à k, et en la divisant ensuite par K : le reste, qui doit être indépendant de k, sera encore égal à Σ.

En continuant ainsi, on élimine successivement de Σ toutes les autres racines. Quand Σ ne renfermera plus que a, on l'ordonnera par rapport à a, puis on divisera Σ par A. Le reste devra être indépendant de a, et il sera la valeur de Σ qu'il s'agissait de trouver.

539. Le premier terme des polynomes employés comme diviseurs dans ces éliminations successives, ayant toujours l'unité pour coefficient, il s'ensuit que les différents restes ne renferment point d'autres dénominateurs que ceux des coefficients de l'équation proposée : de sorte que si ces coefficients sont des nombres entiers, la valeur de Σ sera aussi un nombre entier.

Cette conséquence, qui découle immédiatement du procédé de M. CAUCHY, nous sera utile tout à l'heure (542).

Application à un exemple. — Comment M. CAUCHY évite l'équation aux carrés des différences.

540. *Proposons-nous de déterminer la fonction symétrique égale au produit des carrés des différences des racines d'une équation* $X=0$, *de la forme*

$$[1] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{etc.} = 0.$$

Le mieux ici sera d'employer la méthode des éliminations successives de M. CAUCHY. D'après l'énoncé, si on désigne toujours

par $a, b, c, d, \ldots$ les m racines, et par Σ la fonction symétrique, on doit avoir

$$\Sigma = (a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2\ldots \times (b-c)^2(b-d)^2\ldots \times (c-d)^2\ldots$$

Lorsque l'équation est du 2[e] degré, on a $X = x^2 + Px + Q$: alors il n'y a que deux racines, a et b, liées entre elles par les relations $a + b = -P$, $ab = Q$. Par suite, on a simplement

$$\Sigma = (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = P^2 - 4Q.$$

On pourrait chercher la valeur de Σ, pour les degrés supérieurs, en s'élevant du 2[e] au 3[e], du 3[e] au 4[e], et ainsi successivement. Mais je suivrai une marche un peu différente; et, supposant qu'on sache déterminer la fonction Σ pour le degré $m-1$, je vais montrer comment alors on pourra la trouver par le degré m.

Dans l'expression générale de Σ, considérons à part les facteurs qui ne contiennent point a. En désignant leur produit par Σ_1, on aura

$$\Sigma_1 = (b-c)^2(b-d)^2\ldots \times (c-d)^2\ldots$$
$$\Sigma = \Sigma_1 \times (a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2\ldots$$

Si l'on divise, comme au n° 537, X par $x-a$, on aura l'éq. $X_1 = 0$, dont la composition est rappelée dans ce n°, savoir :

$$x^{m-1} + (a+P)x^{m-2} + (a^2 + Pa + Q)x^{m-3} + \text{etc.} = 0.$$

Or, Σ_1 n'est autre chose que le produit des carrés des racines de cette équation; donc, d'après notre hypothèse, on saura déterminer Σ_1 au moyen des coefficients de cette équation; et par suite Σ_1 sera exprimé en fonction de P, Q, R, ... et de a.

D'un autre côté, le quotient de X par $x-a$ étant égal à $(x-b)(x-c)(x-d)\ldots$, on a $(x-b)(x-c)(x-d)\ldots = x^{m-1} + (a+P)x^{m-2} + (a^2 + Pa + Q)x^{m-3}\ldots$. En faisant $x = a$, cette égalité devient

$$(a-b)(a-c)(a-d)\ldots = ma^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3}\ldots;$$

donc

$$\Sigma = \Sigma_1 \times [ma^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3}\ldots]^2;$$

donc, après avoir remplacé Σ_1 par sa valeur, on pourra mettre Σ sous la forme d'un polynome ordonné par rapport à a. Alors, pour éliminer a, il suffira de diviser Σ par $a^m + Pa^{m-1} + \text{etc.}$ Le reste, qui doit être indépendant de a, sera la valeur de Σ, exprimée au moyen des coefficients P, Q, R,....

541. J'appliquerai ce qui précède à l'équation du 3ᵉ degré

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0.$$

Pour avoir Σ_1, je la divise par $x - a$, et il vient

$$x^2 + (a + P)x + (a^2 + Pa + Q) = 0.$$

Quand l'équation du 2ᵉ degré était $x^2 + Px + Q = 0$, on a trouvé, pour cette équation, $\Sigma = P^2 - 4Q$. On aura donc Σ_1 en remplaçant, dans cette formule, P par $a + P$, et Q par $a^2 + Pa + Q$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= (a + P)^2 - 4(a^2 + Pa + Q) \\ &= -3a^2 - 2Pa + P^2 - 4Q; \end{aligned}$$

donc, par suite,

$$\Sigma = (-3a^2 - 2Pa + P^2 - 4Q)(3a^2 + 2Pa + Q)^2.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer a au moyen de l'équation $a^3 + Pa^2 + Qa + R = 0$. A cet effet, on pourra se servir de la division comme au nº **537**, ou de tout autre procédé qu'on jugera préférable; et il viendra pour résultat final

$$\Sigma = P^2Q^2 - 4P^3R - 4Q^3 - 27R^2 + 18PQR.$$

Quand l'éq. du 3ᵉ degré n'a point de second terme, il faut faire $P = 0$; et la valeur de Σ se réduit à celle-ci, $\Sigma = -4Q^3 - 27R^2$.

542. La fonction Σ, que nous avons calculée dans le nº **540**, donne le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines de l'éq. $X = 0$; mais elle suffit à elle seule pour faire connaître une quantité δ moindre que la plus petite des différences entre deux quelconques des racines réelles. Cette quantité δ, comme on sait, règle l'intervalle des substitutions successives qu'exige la méthode de Lagrange (474) : or voici comment δ se déduit de Σ.

Désignons par v le module de Σ, et par u, u', u'',... les modules des différences des racines. Par les propriétés connues des modules (**266**), on doit avoir $\sqrt{v} = uu'u''$.... On sait trouver une limite supérieure des modules des racines, nommons ω cette limite : chacun des modules u, u', u'',... sera $< 2\omega$. Pour abréger, posons $m(m-1) = 2n$: le degré de l'éq. aux carrés des différences sera n, et le nombre des quantités u', u'',... sera $n - 1$; donc on aura $u'u''\ldots < (2\omega)^{n-1}$; donc $\sqrt{v} < u(2\omega)^{n-1}$, d'où $\dfrac{\sqrt{v}}{(2\omega)^{n-1}} < u$. Or on peut supposer que u représente l'une quelconque des diffé-

rences entre deux racines réelles de l'équation ; par conséquent on pourra prendre $\delta = \frac{\sqrt{v}}{(2\omega)^{n-1}}$.

343. Quand l'équation proposée n'a que des cofficients entiers (celui du 1[er] terme étant égal à 1), la remarque qui termine le n° **339** prouve que Σ aura une valeur entière ; donc le module v de Σ sera au moins égal à 1 ; donc alors on peut prendre $\delta = \frac{1}{(2\omega)^{n-1}}$.

Ainsi, lorsqu'une équation $x^m + \text{etc.} = 0$ n'a que des coefficients entiers, on peut calculer immédiatement, au moyen de ces coefficients, une quantité moindre que la plus petite différence des racines réelles, ce que personne ne savait faire avant M. Cauchy.

Emploi des fonctions symétriques pour la transformation des équations. — Équation aux carrés des différences.

344. Les fonctions symétriques se présentent d'elles-mêmes dans la transformation des équations, toutes les fois que les racines de la transformée doivent être des fonctions *rationnelles* des racines de l'équation donnée.

Soient a, b, c,... les racines de l'équation donnée : pour fixer les idées ; je suppose qu'il n'entre que deux de ses racines dans la composition de chaque racine de la transformée, et je représente par $F(a, b)$ la fonction rationnelle qui exprime la loi de cette composition. Imaginons qu'après avoir fait tous les arrangements deux à deux de a, b, c,... on mette successivement dans $F(a, b)$, au lieu de a et b, les deux racines de chaque arrangement, il est clair qu'on aurait ainsi toutes les racines de la transformée, savoir :

$$F(a, b), \quad F(a, c), \ldots \quad F(b, a), \quad F(b, c), \ldots \quad \text{etc.}$$

Par conséquent cette équation, décomposée en facteurs, serait

$$[z - F(a, b)][z - F(a, c)] \ldots = 0.$$

Ce produit ne varie pas en faisant entre a, b, c,... tel échange qu'on voudra, car alors les facteurs ne font que se placer dans un autre ordre ; on est donc sûr qu'après la multiplication, les coefficients des différentes puissances de z seront des fonctions symétriques et rationnelles de a, b, c,... Ainsi, en se servant des procédés expliqués dans ce chapitre, on pourra exprimer ces coefficients au moyen de ceux de la proposée.

545. Mais il existe une autre manière, souvent préférable, d'employer les fonctions symétriques. Elle est fondée sur cette remarque très-simple que les relations [2] et [3] du n° 535, entre les coefficients d'une équation et les sommes des puissances semblables des racines, peuvent servir à découvrir les coefficients de l'équation quand ils sont inconnus, pourvu qu'on connaisse ces sommes jusqu'à celle des puissances dont l'ordre est égal au nombre des coefficients inconnus, c'est-à-dire au degré de l'équation.

En conséquence, pour arrivée à la transformée, on détermine d'abord à quel degré elle doit s'élever; ensuite on cherche les sommes des puissances premières, secondes, etc., de ses racines jusqu'aux puissances dont l'ordre est égal au degré de cette transformée; puis, à l'aide de ces sommes, on calcule les coefficients inconnus. Et quant à ces différentes sommes, il est clair qu'elles sont des fonctions symétriques des racines de la proposée, et qu'elles peuvent s'exprimer par les coefficients de cette équation.

546. Comme exemple, je reprendrai ici la question de l'équation aux carrés des différences, déjà traitée n° 438. Les fonctions symétriques en donnent la solution la plus simple et la plus élégante dont elle soit susceptible. La question est celle-ci :

Trouver l'équation dont les racines sont les carrés des différences de celles d'une équation donnée

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots = 0.$$

Représentons l'équation cherchée par

$$[B] \qquad z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} \ldots + tz + u = 0.$$

Les m racines de [A] étant $a, b, c, \ldots$, celles de [B] seront $(a-b)^2$, $(a-c)^2$, $(a-d)^2, \ldots$, $(b-c)^2$, $(b-d)^2, \ldots$ $(c-d)^2, \ldots$ etc. Le nombre de ces carrés est évidemment celui des combinaisons deux à deux qu'on peut faire avec les m quantités a, b, c, etc.; donc le degré de l'équation cherchée sera $n = \frac{1}{2}m(m-1)$.

Les coefficients p, q, $r, \ldots$ seront faciles à trouver quand on connaîtra les sommes des puissances semblables et entières des racines de l'équation [B], depuis la somme des premières puissances jusqu'à celle des puissances $n^{\text{èmes}}$. Désignons donc par f_1, f_2, f_3, etc. ces nouvelles sommes, et cherchons la valeur générale de f_α, α étant un nombre quelconque, entier et positif.

Les racines de cette équation sont les carrés $(a-b)^2$, etc., rapportés plus haut; donc en les élevant à la puissance α, on a

$$\int_\alpha = (a-b)^{2\alpha} + (a-c)^{2\alpha} + (a-d)^{2\alpha} \ldots + (b-c)^{2\alpha} + \text{etc.}$$

Pour trouver cette somme, considérons l'expression

$$\varphi(x) = (x-a)^{2\alpha} + (x-b)^{2\alpha} + (x-c)^{2\alpha} + \text{etc.},$$

qui comprend les m binomes $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc. Si on y fait successivement $x=a$, b, c, etc., et qu'on ajoute les m résultats, il vient évidemment

$$2\int_\alpha = \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + \text{etc.}$$

Si on développe les puissances qui composent $\varphi(x)$, on trouve

$$\varphi(x) = \left\{ \begin{array}{l} x^{2\alpha} - 2\alpha a x^{2\alpha-1} + \dfrac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} a^2 x^{2\alpha-2} \ldots + a^{2\alpha} \\ + x^{2\alpha} - 2\alpha b^{\alpha} x^{2\alpha-1} + \dfrac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} b^2 x^{2\alpha-2} \ldots + b^{2\alpha} \\ + \text{etc.}, \end{array} \right.$$

ou plus simplement, en se servant de la notation S_1, S_2, etc.

$$\varphi(x) = mx^{2\alpha} - 2\alpha S_1 x^{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} S_2 x^{2\alpha-2} \ldots + S_{2\alpha},$$

donc, en substituant successivement a, b, c,... au lieu de x, et ajoutant les résultats, il viendra

$$2\int_\alpha = mS_{2\alpha} - 2\alpha S_1 S_{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} S_2 S_{2\alpha-2} \ldots + mS_{2\alpha}.$$

Dans le second membre, il est aisé de reconnaître que les termes à égale distance des extrêmes sont égaux, par conséquent, en s'arrêtant au terme du milieu, et ne prenant que la moitié de ce terme, on aura la valeur générale de $\int_\alpha$, savoir :

$$\int_\alpha = mS_{2\alpha} - 2\alpha S_1 S_{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} S_2 S_{2\alpha-2} \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{1}{2} \frac{2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\ldots(\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} S_\alpha S_\alpha.$$

Comme les signes sont alternativement $+$ et $-$, il n'y aura jamais d'incertitude sur le dernier. Voici maintenant quelles opérations sont à effectuer :

1° On calculera les sommes S_1, S_2, S_3,..., jusqu'à S_{2n}, par les relations connues $S_1 + P = 0$, $S_2 + PS_1 + 2Q = 0$, etc.

2° Dans la formule qui exprime $\int_\alpha$, on fera successivement $\alpha=1, 2, 3,$ jusqu'à n; et ainsi, pour déterminer les n sommes $\int_1, \int_2,\ldots \int_n$, on aura $\int_1=mS_2-S_1S_1, \int_2=mS_4-4S_1S_3+3S_2S_2$, etc.

3° Enfin les relations entre ces n sommes et les n coefficients $p, q, r,\ldots$ donneront les valeurs de ces coefficients, savoir :

$$p=-\int_1,\ q=-\tfrac{1}{2}(\int_2+p\int_1),\ r=-\tfrac{1}{3}(\int_3+p\int_2+q\int_1),\ \text{etc.}$$

On ne voit point, par ces valeurs mêmes, si les fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{3},\ldots$ disparaîtront à la fin, mais la remarque faite au n° 539 prouve qu'il en doit être ainsi : de sorte que, si l'équation proposée n'a que des coefficients entiers, l'équation aux carrés des différences n'aura aussi que des coefficients entiers.

547. Une marche tout à fait analogue à celle qu'on a suivie pour trouver l'équation aux carrés des différences peut encore être employée dans un grand nombre de cas, et notamment dans ceux où les racines de la transformée devraient être des puissances semblables et entières de la différence, de la somme, du produit ou du quotient de deux racines quelconques de l'équation donnée.

Par exemple, supposons que chaque nouvelle racine soit la puissance k de la somme $a+b$ de deux racines de l'éq. [A]. En posant $n=\frac{1}{2}m(m-1)$, la transformée devra être de la forme

$$\text{[C]} \qquad z^n+pz^{n-1}+qz^{n-2}\ldots+tz+u=0;$$

et si on fait $\int_\alpha=(a+b)^{k\alpha}+(a+c)^{k\alpha}\ldots+(b+c)^{k\alpha}+$ etc., le calcul se réduira à exprimer $\int_\alpha$ par une formule générale. A cet effet, on prendra la fonction

$$\varphi(x)=(x+a)^{k\alpha}+(x+b)^{k\alpha}+(x+c)^{k\alpha}+\text{etc.},$$

dont le développement est

$$\varphi(x)=mx^{k\alpha}+k\alpha S_1x^{k\alpha-1}+\frac{k\alpha(k\alpha-1)}{1.2}S_2x^{k\alpha-2}\ldots.+S_{k\alpha}.$$

Or, si avant le développement, on substitue dans $\varphi(x)$ successivement $a, b, c,\ldots$ au lieu de x, la somme des résultats sera égale à $2\int_\alpha+2^{k\alpha}S_{k\alpha}$; par suite il est aisé d'apercevoir qu'en faisant les mêmes opérations sur le développement, on aura

$$2\int_\alpha+2^{k\alpha}S_{k\alpha}=mS_{k\alpha}+k\alpha S_1S_{k\alpha-1}\ldots.+mS_{k\alpha};$$

et enfin de là on tire la formule cherchée

$$\int_\alpha=(m-2^{k\alpha-1})S_{k\alpha}+k\alpha S_1S_{k\alpha-1}+\frac{k\alpha(k\alpha-1)}{1.2}S_2S_{k\alpha-2}+\text{etc.}$$

Lorsque $k\alpha$ sera pair, on s'arrêtera au terme qui contient S avec deux indices égaux, et on n'en prendra que la moitié; mais lorsque $k\alpha$ sera impair, on s'arrêtera au terme dans lequel les deux indices sont $\frac{1}{2}(k\alpha - 1)$ et $\frac{1}{2}(k\alpha + 1)$, et on le prendra tout entier.

Élimination par les fonctions symétriques. — Degré de l'équation finale.

548. Les fonctions symétriques fournissent encore un procédé d'élimination qui a l'avantage de faire connaître le degré de l'équation finale. Soient les deux équations

$$[1] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots = 0,$$

$$[2] \qquad x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + R'x^{n-3} \ldots = 0,$$

dans lesquelles P, Q,... P', Q',... sont des fonctions de y. Si on pouvait résoudre la 1re par rapport à x, on en déduirait m valeurs a, b, c,... qui seraient fonctions de y, et en les substituant dans la 2e, il viendrait, pour déterminer les valeurs de y, m équations délivrées de x, savoir :

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} a^n + P'a^{n-1} + Q'a^{n-2} + R'a^{n-3} \ldots = 0, \\ b^n + P'b^{n-1} + Q'b^{n-2} + R'b^{n-3} \ldots = 0, \\ c^n + P'c^{n-1} + Q'c^{n-2} + R'c^{n-3} \ldots = 0, \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Mais, en général, la résolution de l'éq. [1] est impossible, et la question est de trouver une équation finale qui renferme indistinctement toutes les valeurs de y.

On aura une équation qui remplira cette condition en multipliant entre elles les m éq. [3] : car la résultante sera satisfaite par chaque valeur de y tirée de l'une d'elles, et elle ne peut pas l'être autrement. Or, les facteurs de cette résultante ne font que changer de place, quelque permutation qu'on opère entre les quantités a, b, c, etc.; le produit ne renfermera donc que des fonctions symétriques, entières et rationnelles, de ces quantités; donc on pourra les exprimer au moyen de coefficients de l'éq. [1], et de cette manière on aura l'équation finale en y. Ce procédé d'élimination conduit en général à des calculs très-prolixes : mais il fait trouver l'équation finale avec toutes les racines qu'elle doit renfermer, et sans complication de racines étrangères,

549. Ce procédé a surtout l'avantage de conduire à un théorème général sur le degré de l'équation finale. Dans ce qui vient

d'être dit, la 1re équation est du degré m, la 2e est du degré n; et P, Q, etc., P', Q', etc., sont des fonctions quelconques de y : mais, pour le théorème dont il s'agit, ces fonctions doivent être, comme au n° **419**, des polynomes tels que la somme des exposants de x et de y soit au plus égale à m dans chaque terme de l'éq. [1], et au plus égale à n dans chaque terme de l'éq. [2]. Alors nous avons à examiner à quel degré y peut s'élever dans les fonctions symétriques qui composent le produit des équations [3].

Chaque terme de ce produit est lui-même le produit de m termes pris respectivement dans ces m équations, de sorte qu'en désignant ces termes par Ya^α, $Y'b^\beta$, $Y''c^\gamma$,.... le terme du produit sera $YY'Y''.... \times a^\alpha b^\beta c^\gamma$.... Mais le produit des m équations étant symétrique par rapport aux quantités a, b, c,.... on doit y trouver tous les termes de même forme qu'on peut faire avec ces quantités; par conséquent on est sûr qu'il renferme tous les termes représentés par

$$[4] \qquad YY'Y''.... \times S(a^\alpha b^\beta c^\gamma ....).$$

Il s'agit maintenant d'évaluer le degré de y dans cette expression. D'après les suppositions, le degré de y est au plus égal à $n-\alpha$ dans Y, à $n-\beta$ dans Y', à $n-\gamma$ dans Y'', etc.; donc, dans $YY'Y''$..., il sera au plus égal à $mn-\alpha-\beta-\gamma$... D'un autre côté, si on se reporte (**333**) aux relations d'où se tirent les sommes S_1, S_2, S_3, etc., on voit que P étant au plus du 1er degré en y, Q du 2e, R du 3e, etc., le degré de y dans ces sommes ne doit point surpasser l'indice de S; et semblablement, si on se reporte (**334**) aux formules qui expriment les fonctions doubles, triples, etc., on reconnaît encore que dans $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma ....)$ le degré de y ne doit point surpasser $\alpha+\beta+\gamma$.... Donc, dans l'expression [4], le degré de y sera au plus égal à mn. La même chose peut se dire de toutes les fonctions symétriques dont la somme compose le produit des m éq. [3]; donc, enfin, l'*équation finale ne peut point être d'un degré supérieur à* mn.

La démonstration semble exiger que l'éq. [1] renferme le terme x^m. Mais on peut supposer qu'il y ait d'abord devant x^m un coefficient A, indépendant de y, et qu'on ait divisé toute l'équation par A. Alors, l'équation finale en y devant subsister quel que soit A, on pourra y faire $A=0$, et il est clair que cette supposition ne saurait en élever le degré. Du reste, il faut entendre le théorème

en ce sens, que l'élimination entre deux équations générales, l'une du degré m et l'autre du degré n, doit donner une équation finale du degré mn; mais que, dans des cas particuliers, ce degré peut devenir moindre.

Les deux éq. $x - y^m = 0$, $x^n + ay^n + by + c = 0$, quoique très-simples, donneront véritablement une équation finale du degré mn; car, en substituant dans la 2e la valeur de x, tirée de la 1re, il vient $y^{mn} + ay^n + by + c = 0$.

Au contraire, en éliminant x entre les équations $x^n - y^m = 0$, $x^n + ay^n + by + c = 0$, on aurait une équation finale de degré moindre que mn, savoir : $y^m + ay^n + by + c = 0$.

550. En étendant le théorème à un nombre quelconque d'équations, on aura le théorème général dû à Bezout, et dont on a déjà rapporté l'énoncé n° 435, savoir : que *Si, entre des équations en nombre pareil à celui des inconnues, on élimine toutes les inconnues hors une, le degré de l'équation finale devra être tout au plus égal au produit des degrés de ces équations.*

Avant Bezout, le théorème était connu pour deux équations; et Cramer, dans un appendice de son *Introduction à l'analyse des lignes courbes,* en avait donné une démonstration fort simple qui, au fond, ne diffère point de celle que nous avons exposée. Il était à désirer que la démonstration fût étendue à tous les autres cas; et c'est ce qu'a fait Poisson dans un Mémoire imprimé dans le onzième cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

CHAPITRE XXII.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU 3e ET DU 4e DEGRÉ.

Résolution de l'équation du 3e degré.

551. Je supposerai qu'on ait fait disparaître le second terme de l'équation du 3e degré, et, pour éviter les fractions, j'écrirai cette équation sous la forme

[1] $$x^3 + 3px + 2q = 0.$$

Parmi les différentes manières de la résoudre, la plus simple consiste à former *à priori* une équation du troisième degré sans

second terme, laquelle admette une racine connue, mais exprimée avec des indéterminées, et à se servir ensuite de ces indéterminées pour rendre cette équation identique avec la proposée [1]. Pour établir cette identité il faudra poser deux égalités, et par ce motif on emploiera deux indéterminées.

Soit fait $x = a + b$: le cube sera $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$; puis, en remplaçant $a + b$ par x et transposant, on aura

[2] $$x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0,$$

équation qui admet la racine $x = a + b$, et qu'il faut rendre identique avec l'éq. [1]. En conséquence on posera

[3] $$ab = -p, \quad a^3 + b^3 = -2q.$$

La première de ces égalités donne $a^3b^3 = -p^3$. Ainsi, on connaît la somme $a^3 + b^3$ et le produit a^3b^3. Donc les valeurs de a^3 et b^3 sont racines d'une équation du 2e degré, dans laquelle le coefficient du second terme est égal à $+2q$, et le dernier terme égal à $-p^3$; de sorte que cette équation sera, en appelant z l'inconnue,

$$z^2 + 2qz - p^3 = 0.$$

C'est elle qu'on nomme la *réduite* de l'équation [1].

Ses deux racines représentent les valeurs de a^3 et b^3; et d'ailleurs on peut indifféremment prendre l'une ou l'autre pour la valeur de a^3, car cela revient à changer a en b et b en a dans la valeur $x = a + b$. Je prendrai $a^3 = -q + \sqrt{q^2 + p^3}$, $b^3 = -q - \sqrt{q^2 + p^3}$; et par suite il viendra

$$a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} \quad b = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Chaque radical carré n'a ici qu'une seule valeur, mais chacun des radicaux cubiques en a trois. Si on pouvait satisfaire aux éq. [3] sans faire aucun choix entre ces valeurs, on pourrait aussi, par les mêmes valeurs, rendre l'éq. [1] identique à l'éq. [2]; et puisque $a + b$ est racine de la seconde, on devrait satisfaire à la première en prenant

[4] $$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Mais une remarque importante se présente d'elle-même : c'est que chaque radical cubique ayant trois valeurs, il s'ensuit que l'expression ci-dessus en a neuf, tandis que l'éq. [1] ne doit avoir

que trois racines. Il faut donc expliquer d'où vient cette multiplicité de valeurs, et discerner parmi elles celles qui sont véritablement racines de l'équation [1].

A cet effet observons qu'à proprement parler, ce ne sont pas les éq. [3] qui ont été résolues pour avoir a et b, mais bien les équations

$$[5] \qquad a^3b^3 = -p^3, \quad a^3 + b^3 = -2q.$$

Or, si on désigne par α et α^2 les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, lesquelles, comme on sait, sont le carré l'une de l'autre (531), il est clair que l'éq. $a^3b^3 = -p^3$ peut provenir également de l'élévation au cube de chacune de celles-ci :

$$ab = -p, \quad ab = -\alpha p, \quad ab = -\alpha^2 p.$$

De là il suit que les neuf valeurs renfermées dans la formule [4] doivent donner les racines des trois équations

$$[6] \quad x^3 + 3px + 2q = 0, \quad x^3 + 3\alpha px + 2q = 0, \quad x^3 + 3\alpha^2 px + 2q = 0.$$

On peut encore considérer ces neuf valeurs comme les racines de l'équation du 9e degré qu'on obtiendrait en multipliant entre elles les trois équations ci-dessus. Mais il sera plus simple, et cela revient au même, d'élever au cube l'une quelconque de ces équations, après avoir transposé dans le 2e membre le terme qui contient p. De cette manière on trouvera sur-le-champ

$$(x^3 + 2q)^3 = -27p^3x^3.$$

Quant aux racines qui se rapportent spécialement à chacune des trois équations, ce qui précède donne le moyen de les distinguer : car, selon que le coefficient de x sera $3p$ ou $3\alpha p$ ou $3\alpha^2 p$; il est clair qu'on ne devra ajouter que les valeurs de a et b pour lesquelles on a $ab = -p$ ou $ab = -\alpha p$ ou $ab = -\alpha^2 p$.

Par cette règle, il sera facile de former les racines de la proposée $x^3 + 3px + 2q = 0$, la seule dont nous ayons à nous occuper. Désignons par A une des valeurs du premier radical cubique, et par B une des valeurs du second, les valeurs de a et b seront

$$a = \text{A}, \quad \alpha\text{A}, \quad \alpha^2\text{A}; \quad b = \text{B}, \quad \alpha\text{B}, \quad \alpha^2\text{B}.$$

De plus supposons, ce qui est permis, que A et B représentent des valeurs dont le produit soit $-p$. D'après ce qui vient d'être dit,

on ne devra ajouter que les valeurs, dont le produit est AB; donc, en se rappelant que $\alpha^3=1$, il faudra prendre

$$x=\mathrm{A}+\mathrm{B},\quad x=\alpha\mathrm{A}+\alpha^2\mathrm{B},\quad x=\alpha^2\mathrm{A}+\alpha\mathrm{B};$$

et d'ailleurs on sait (**529**) qu'on a

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \alpha^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Si on remplace A et B par les deux radicaux cubiques, et α, α^2 par leurs valeurs, il viendra

$$x=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}},$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}},$$

$$x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

Telles sont les racines de l'équation proposée : mais il faut avoir soin d'attacher aux deux radicaux cubiques le même sens restreint qu'à A et à B, sans quoi l'on pourrait trouver de fausses racines.

552. Pour discuter ces valeurs il sera plus commode d'y laisser subsister A et B au lieu des radicaux cubiques, et d'isoler ce qui multiplie $\sqrt{-3}$. De cette manière, on a

$$x=\mathrm{A}+\mathrm{B},$$

$$x=-\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}+\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\sqrt{-3},$$

$$x=-\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}-\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\sqrt{-3}.$$

Je supposerai aussi, comme on le fait ordinairement, que les coefficients $3p$ et $2q$ représentent des quantités réelles. Alors l'éq. [1] étant de degré impair, a toujours une racine réelle, et il est permis de supposer que A et B sont les valeurs de a et b qui donnent cette racine; de sorte que A+B sera une quantité réelle. Cela posé, reportons-nous aux deux radicaux

$$a=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}},\quad b=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

Si $q^2+p^3>0$, chacun d'eux a une valeur réelle; donc on peut supposer A et B réels. Par suite A + B et A — B le seront aussi; donc la première racine $x=\mathrm{A}+\mathrm{B}$, est réelle, et les deux autres sont imaginaires.

Si $q^2+p^3=0$, on aura A=B, et alors les trois racines sont

$x = 2A$, $x = -A$, $x = -A$. Elles sont toutes trois réelles, et les deux dernières sont égales entre elles.

Enfin soit $q^2 + p^3 < 0$, ce qui exige que p soit < 0. Alors a et b n'ont plus de détermination réelle, et par suite les trois valeurs de x se trouvent compliquées d'imaginaires. Cependant on sait que l'une d'elles doit être réelle; et même il est évident que les cas où les trois racines de l'éq. [1] sont réelles et inégales ne peuvent se trouver que dans l'hypothèse actuelle $q^2 + p^3 < 0$. On aurait donc tort d'affirmer que les valeurs de x sont imaginaires. Je vais prouver en effet qu'aucune d'elles ne l'est; et comme on peut toujours supposer que A et B sont des déterminations telles que $A + B$ représente la racine réelle dont l'existence est démontrée, tout se réduit à faire voir que la partie $\frac{1}{2}(A - B)\sqrt{-3}$, qui se trouve dans les deux autres valeurs de x, doit être réelle.

Par les seules règles du calcul on a $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$; donc $A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2} = \frac{A^3 - B^3}{(A + B)^2 - AB}$.

A cause des valeurs de a^3 et de b^3, on a $A^3 - B^3 = 2\sqrt{q^2 + p^3}$; et, par la manière dont A et B ont été choisis, on a $AB = -p$; donc, en faisant $A + B = x'$, il vient $A - B = \frac{2\sqrt{q^2 + p^3}}{x'^2 + p}$; donc

$$\frac{A - B}{2}\sqrt{-3} = \frac{\sqrt{-3(q^2 + p^3)}}{x'^2 + p}.$$

Or, par hypothèse, on a $q^2 + p^3 < 0$; donc la quantité ci-dessus est réelle; donc les trois valeurs de x le sont aussi.

Il est démontré par là que, dans l'hypothèse $q^2 + p^3 < 0$, les imaginaires qui affectent les trois valeurs de x doivent se détruire; par conséquent il semble que le calcul doive fournir les moyens de les faire disparaître. Cependant il n'en est point ainsi; et, à moins de recourir à des séries non terminées, l'algèbre ne peut point opérer cette réduction. C'est cette raison qui a fait donner le nom de cas *irréductible* à celui que nous examinons. Toutes les fois que l'équation tombera dans ce cas, les expressions générales des racines ne seront d'aucune utilité pour calculer les valeurs numériques de ces racines, et alors on pourra recourir aux procédés du chapitre XVIII. On trouvera aussi dans la *Trigonométrie* une solution fort simple de l'équation du 3ᵉ degré, non-seulement pour le cas irréductible, mais encore pour tous les autres.

553. Au reste, quand on connaît une racine réelle x', il est facile d'avoir les deux autres racines. On le voit d'abord par la valeur de A—B, trouvée ci-dessus ; car au moyen de cette valeur on a évidemment

$$x = x',\quad x = -\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{-3(q^2+p^3)}}{x'^2+p},\quad x = -\frac{x'}{2} - \frac{\sqrt{-3(q^2+p^3)}}{x'^2+p}.$$

Mais on le voit aussi en divisant l'équation proposée par $x-x'$. Pour le faire plus commodément, on observe qu'on doit avoir $x'^3 + 3px' + 2q = 0$; par suite l'éq. [1] pourra s'écrire ainsi $x^3 - x'^3 + 3p(x-x') = 0$. Alors, en divisant par $x-x'$, il vient

$$x^2 + xx' + x'^2 + 3p = 0 ;$$

et de cette dernière équation on tire

$$x = -\tfrac{1}{2}x' \pm \sqrt{-3(\tfrac{1}{4}x'^2 + p)}.$$

Voici maintenant comment on reconnaît que ces valeurs s'accordent avec les précédentes. Remarquons d'abord que

$$\sqrt{-3(\tfrac{1}{4}x'^2+p)} = \frac{\sqrt{-3(\frac{1}{4}x'^2+p)(x'^2+p)^2}}{x'^2+p}$$
$$= \frac{\sqrt{-3(\frac{1}{4}x'^6 + \frac{6}{4}px'^4 + \frac{9}{4}p^2x'^2 + p^3)}}{x'^2+p}.$$

D'un autre côté, la relation $x'^3 + 3px' + 2q = 0$ donnera $q^2 = (\frac{1}{2}x'^3 + \frac{3}{2}px')^2 = \frac{1}{4}x'^6 + \frac{6}{4}px'^4 + \frac{9}{4}p^2x'^2$; donc enfin

$$\sqrt{-3(\tfrac{1}{4}x'^2+p)} = \frac{\sqrt{-3(q^2+p^3)}}{x'^2+p}.$$

Résolution de l'équation du 4e degré.

554. Après avoir fait disparaître le second terme, l'équation générale du 4e degré est

$$[1] \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Soit fait $x = a + b + c$: en élevant au carré, il vient $x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$, ou, en transposant,

$$x^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + ac + bc).$$

Élevant de nouveau au carré, on a $x^4 - 2(a^2+b^2+c^2)x^2 + (a^2+b^2+c^2)^2 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 8abc(a+b+c)$; puis, remplaçant $a+b+c$ par x et transposant, on obtient

$$x^4 - 2(a^2+b^2+c^2)x^2 - 8abcx + (a^2+b^2+c^2)^2$$
$$- 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 0.$$

Cette équation est sans second terme, et, par la manière même dont on l'a formée, on sait qu'elle admet pour racine $x=a+b+c$. Ainsi, on résoudra l'éq. [1] en déterminant a, b, c, par la condition qu'elle soit identique avec la précédente, ce qui donne

$$-2(a^2+b^2+c^2)=p,$$
$$-8abc=q,$$
$$(a^2+b^2+c^2)^2-4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=r.$$

Ces égalités font voir qu'en prenant a^2, b^2, c^2, pour inconnues, ces trois quantités sont les racines d'une équation du 3e degré dont les coefficients sont

$$-(a^2+b^2+c^2)=\frac{p}{2},$$
$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\frac{p^2-4r}{16},$$
$$-a^2b^2c^2=-\frac{q^2}{64};$$

par conséquent cette équation du 3e degré est

[2] $$z^3+\frac{p}{2}z^2+\frac{p^2-4r}{16}z-\frac{q^2}{64}=0:$$

telle est la *réduite* d'où dépend la résolution de l'équation [1].

Supposons qu'on ait déterminé les trois valeurs de z, et désignons-les par z', z'', z''', on aura

$$a=\pm\sqrt{z'},\quad b=\pm\sqrt{z''},\quad c=\pm\sqrt{z'''}.$$

Si on combine les signes de toutes les manières, on a huit valeurs pour $a+b+c$ ou x. Mais comme le dernier terme de la réduite [2] a été formé en élevant au carré l'éq. $abc=-\frac{1}{8}q$, il en résulte que ces valeurs renferment non-seulement les racines de la proposée, mais encore celles de l'équation qui en différerait par le signe de q.

En même temps on voit que pour avoir seulement les racines de la proposée, il faut n'ajouter qne les valeurs de a, b, c, pour lesquelles on a $abc=-\frac{1}{8}q$, et dont le produit est par conséquent de signe contraire à q. Dans chaque cas particulier, il sera facile de déterminer pour les radicaux trois valeurs A, B, C, qui remplissent cette condition; et ensuite, avec ces valeurs, on formera les quatre racines de la proposée, savoir :

$$x=+\text{A}+\text{B}+\text{C},\qquad x=+\text{A}-\text{B}-\text{C},$$
$$x=-\text{A}+\text{B}-\text{C},\qquad x=-\text{A}-\text{B}+\text{C}.$$

Le plus souvent, au lieu de A, B, C, on met les trois radicaux $+\sqrt{z'}$, $+\sqrt{z''}$, $-\sqrt{z'''}$; et les valeurs de x s'écrivent ainsi:

$$x=+\sqrt{z'}+\sqrt{z''}-\sqrt{z'''},\quad x=+\sqrt{z'}-\sqrt{z''}+\sqrt{z'''},$$
$$x=-\sqrt{z'}+\sqrt{z''}+\sqrt{z'''},\quad x=-\sqrt{z'}-\sqrt{z''}-\sqrt{z'''}.$$

Mais alors il faut sous-entendre qu'en appliquant ces formules à des cas particuliers, on prendra pour $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$, $\sqrt{z'''}$, trois déterminations dont le produit soit de même signe que q. Cette observation est importante : faute d'y avoir égard, on pourrait trouver de fausses racines.

555. La nature des racines de la réduite fera connaître la nature des racines de la proposée. Or la réduite, ayant son dernier terme négatif, a toujours une racine positive, et le produit des deux autres racines doit être positif; donc, si ces dernières ne sont pas imaginaires, elles seront toutes deux positives ou toutes deux négatives. Je laisse de côté les cas où l'on aurait $q=0$, parce qu'alors la proposée se résout directement par le 2ᵉ degré. En conséquence, trois cas seulement sont à examiner.

1° *Cas où les trois racines de la réduite sont positives.* Alors les quatre valeurs de x sont évidemment réelles, et si l'on regarde les radicaux $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$, $\sqrt{z'''}$, comme représentant des déterminations positives, leur produit sera positif; donc les formules précédentes seront spécialement applicables à l'hypothèse de $q>0$. Pour $q<0$, il faudrait changer le signe de l'un des radicaux.

2° *Cas où la réduite a une racine positive* z' *et deux racines négatives* z'', z'''. Le radical $\sqrt{z'}$ sera réel, mais les radicaux $\sqrt{z''}$ et $\sqrt{z'''}$ seront imaginaires; par suite, les quatre valeurs de x seront imaginaires aussi, à moins qu'on n'ait $z''=z'''$. Quand $z''=z'''$, l'une des deux quantités $\sqrt{z''}+\sqrt{z'''}$ et $\sqrt{z''}-\sqrt{z'''}$ deviendra zéro, et en supposant que ce soit la dernière, les valeurs de x seront simplement

$$x=\sqrt{z'},\quad x=\sqrt{z'},\quad x=-\sqrt{z'}+2\sqrt{z''},\quad x=-\sqrt{z'}-2\sqrt{z''},$$

Les deux premières sont réelles puisque z' est positif, et les deux autres sont imaginaires puisque z'' est négatif. D'ailleurs, comme dans la réduction on a supposé $\sqrt{z''}=\sqrt{z'''}$, on doit avoir ici $\sqrt{z'}\sqrt{z''}\sqrt{z'''}=z''\sqrt{z'}$; de sorte que ce produit ne pourra avoir le signe de q qu'en choisissant pour $\sqrt{z'}$ un signe contraire à q.

3° *Cas où la réduite a une racine positive* z' *et deux racines imaginaires* z'', z'''. La racine positive z' étant connue, on pourra diviser la réduite par $z-z'$, et l'on aura une équation du 2e degré qui donnera, pour z'' et z''', des valeurs imaginaires de la forme $z''=f+g\sqrt{-1}$, $z'''=f-g\sqrt{-1}$. Donc, deux des valeurs de x renfermeront la somme $\sqrt{f+g\sqrt{-1}}+\sqrt{f-g\sqrt{-1}}$; et les deux autres renfermeront la différence $\sqrt{f+g\sqrt{-1}}-\sqrt{f-g\sqrt{-1}}$.

Mais par des formules connues (**263**), on a

$$\sqrt{f+g\sqrt{-1}}+\sqrt{f-g\sqrt{-1}}=\sqrt{2f+2\sqrt{f^2+g^2}},$$
$$\sqrt{f+g\sqrt{-1}}-\sqrt{f-g\sqrt{-1}}=\sqrt{2f-2\sqrt{f^2+g^2}};$$

et il faut, ainsi qu'on l'a remarqué au numéro cité, associer les déterminations des deux radicaux $\sqrt{f+g\sqrt{-1}}$ et $\sqrt{f-g\sqrt{-1}}$ de telle sorte que leur produit ait même signe que $\sqrt{f^2+g^2}$. Supposons donc qu'on prenne $\sqrt{f^2+g^2}$ positivement, on devra choisir pour $\sqrt{z'}$ une détermination de même signe que q. Avec cette attention les quatre valeurs de x pourront s'écrire ainsi :

$$x=-\sqrt{z'}\pm\sqrt{2f+2\sqrt{f^2+g^2}},$$
$$x=+\sqrt{z'}\pm\sqrt{2f-2\sqrt{f^2+g^2}}.$$

Deux de ces valeurs sont réelles, les deux autres sont imaginaires.

Sur les expressions irrationnelles analogues à celles qu'on trouve dans la résolution des équations du 3e degré.

556. L'une de ces expressions est celle-ci $\sqrt[n]{A\pm\sqrt{B}}$: or, il arrive fréquemment que A et B sont des nombres rationnels, et alors on peut se proposer de réduire ces radicaux à des expressions plus simples, dans lesquelles il n'y ait plus de radicaux superposés. Cette question a déjà été résolue pour les radicaux carrés (**196**), et il s'agit maintenant d'atteindre à des cas plus élevés.

Je commencerai par le radical cubique $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$. On ne peut pas supposer pour cette racine une quantité de la forme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$: car on a

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3=a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}$$
$$=(a+3b)\sqrt{a}+(3a+b)\sqrt{b},$$

résultat qui contient les radicaux $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$. Mais le calcul précédent montre qu'on aurait un résultat de la forme $A+\sqrt{B}$ en élevant au cube $a+\sqrt{b}$ et $(a+\sqrt{b})\sqrt[3]{c}$. Je choisirai cette dernière expression, comme plus générale, et je poserai

$$[1] \qquad \sqrt[3]{A+\sqrt{B}}=(a+\sqrt{b})\sqrt[3]{c}.$$

En élevant au cube, il vient d'abord $A+\sqrt{B}=c(a^3+3ab)+c(3a^2+b)\sqrt{b}$; puis, en égalant les parties rationnelles entre elles, et les parties irrationnelles entre elles,

$$[2] \quad A=c(a^3+3ab), \qquad [3] \quad \sqrt{B}=c(3a^2+b)\sqrt{b}.$$

La question est donc de trouver pour a, b, c, des valeurs rationnelles qui satisfassent à ces deux équations. Or, en élevant ces équations au carré et en les retranchant ensuite l'une de l'autre, on a

$$A^2-B=c^2(a^6-3a^4b+3a^2b^2-b^3)=c^2(a^2-b)^3;$$

donc

$$a^2-b=\frac{\sqrt[3]{(A^2-B)c}}{c}.$$

Puisque a et b doivent être rationnels, il faudra prendre c de manière que $(A^2-B)c$ soit un cube entier ou fractionnaire, ce qui est toujours possible. Alors, en nommant M le second membre ci-dessus, on aura $a^2-b=M$, d'où $b=a^2-M$; et, en substituant cette valeur de b dans l'éq. [2], il viendra

$$[4] \qquad 4ca^3-3Mca-A=0.$$

Cette équation devra donner pour a au moins une valeur commensurable, sans quoi la transformation [1] sera impossible.

Si, au lieu de $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$, on avait à réduire $\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}$, il suffirait de changer partout, dans ce qui précède, le signe de $\sqrt{b}$.

Pour exemple, soit l'expression $\sqrt[3]{14\pm\sqrt{200}}$. On aura $A=14$, $B=200$, $A^2-B=-4$; donc $(A^2-B)c=-4c$; donc on aura le cube -8 en prenant $c=2$. Par suite $M=-1$, $b=a^2+1$, et l'éq. [4] devient $8a^3+6a-14=0$. On y satisfait par la valeur commensurable $a=1$, ce qui donne $b=2$. D'ailleurs on a déjà $c=2$; donc enfin

$$\sqrt[3]{14\pm\sqrt{200}}=(1\pm\sqrt{2})\sqrt[3]{2}.$$

Soit encore l'expression $\sqrt[3]{-11\pm2\sqrt{-1}}$. On fera passer 2 sous le radical carré, et l'on aura $A=-11$, $B=-4$, $A^2-B=125$.

Comme 125 est le cube de 5, il suffit de faire $c=1$. En conséquence, on a $M=5$, $b=a^2-5$, et l'éq. [4] devient $4a^3-15a+11=0$. Or, elle est satisfaite par $a=1$; donc $b=-4$, et par suite

$$\sqrt[3]{-11\pm 2\sqrt{-1}}=(1\pm\sqrt{-4})\sqrt[3]{1}.$$

557. Considérons l'expression plus générale $\sqrt[n]{A\pm\sqrt{B}}$. Posons

[5] $$\sqrt[n]{A\pm\sqrt{B}}=(a\pm\sqrt{b})\sqrt[n]{c}\ :$$

La question est encore de déterminer des nombres rationnels pour a, b, c, si cela est possible.

En élevant à la puissance n et égalant séparément les parties rationnelles, il vient

[6] $$A=c\left[a^n+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^2+\text{etc.}\right],$$

[7] $$\sqrt{B}=c\left[na^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b+\text{etc.}\right]\sqrt{b}.$$

On pourrait, comme pour le cas du radical cubique, élever ces deux égalités au carré et les retrancher l'une de l'autre : mais les réductions s'aperçoivent immédiatement en observant qu'on doit avoir en même temps

$$A+\sqrt{B}=c(a+\sqrt{b})^n,\quad A-\sqrt{B}=c(a-\sqrt{b})^n,$$

et que par suite $A^2-B=c^2(a+\sqrt{b})^n(a-\sqrt{b})^n=c^2(a^2-b)^n$, d'où

$$a^2-b=\frac{\sqrt[n]{(A^2-B)c^{n-2}}}{c},$$

Par là on voit qu'il faut choisir c de telle sorte que le second membre ci-dessus soit rationnel. En le nommant M, on aura $a^2-b=M$, d'où $b=a^2-M$; et, en substituant cette valeur de b dans [6], l'équation résultante en a devra avoir une racine commensurable toutes les fois que la transformation [5] sera possible.

558. Dans la résolution des équations du 3e degré, ce qui rend le cas irréductible si remarquable, c'est qu'alors, quoiqu'on soit assuré que les trois racines sont réelles, il est cependant impossible de faire disparaître les imaginaires autrement que par la voie des séries. Cette difficulté n'est point propre uniquement au 3e degré : elle se rencontre également dans la formule générale

[8] $$\sqrt[n]{A+B\sqrt{-1}}+\sqrt[n]{A-B\sqrt{-1}},$$

sur laquelle je vais m'arrêter un moment.

A considérer cette expression dans toute sa généralité, on devrait combiner les n déterminations de la première partie avec les n déterminations de la seconde; de sorte qu'il y aurait en tout n^2 valeurs pour x. Mais elle se prend rarement dans un sens aussi étendu, et je vais préciser celui qu'on y attache ordinairement.

Comme les deux radicaux qui ont l'indice n représentent des racines d'équations binomes, leurs déterminations sont égales à des quantités de la forme $f+g\sqrt{-1}$. De plus, il est manifeste qu'à chaque détermination du premier radical, il en correspond une du second, laquelle n'est différente que par le signe de $\sqrt{-1}$. Or, on suppose que ces valeurs correspondantes sont celles qui doivent s'ajouter dans la formule [8], et avec cette restriction les valeurs de x sont toutes réelles et au nombre de n seulement.

Le produit de ces deux valeurs radicales, ainsi prises dans un même couple, est réel et positif. Or, pour le produit des deux radicaux, on a en général

$$\sqrt[n]{A+B\sqrt{-1}}\times\sqrt[n]{A-B\sqrt{-1}}=\sqrt[n]{A^2+B^2},$$

et le radical qui exprime ce produit ne peut avoir qu'une seule valeur réelle et positive; donc, si on la représente par K^3, on pourra encore caractériser les valeurs conjuguées, qui doivent être ajoutées dans la formule [8], par la condition que leur produit soit égal à K^2.

La formule [8] peut être regardée comme l'expression générale des racines d'une équation, dont le degré est marqué par le nombre des valeurs dont cette expression est susceptible; donc, suivant qu'elle sera prise dans sa plus grande extension ou avec la restriction dont on vient de parler, le degré de l'équation doit être ou n^2 ou n.

559. Cette dernière remarque nous conduit à expliquer comment on forme une équation lorsqu'on connaît l'expression de sa racine. C'est-à-dire, qu'une expression donnée étant susceptible de prendre différentes valeurs, à raison du sens multiple des radicaux qu'elle contient, il faut trouver une équation débarrassée de radicaux, qui ait ces valeurs pour racines. Je prendrai pour exemple l'expression [8] elle-même.

Pour abréger, faisons

$$A+B\sqrt{-1}=a,\quad A-B\sqrt{-1}=b;$$

la question reviendra à éliminer y et z entre les trois équations

$$y+z=x,\quad y^n=a,\quad z^n=b.$$

Mais ici l'élimination peut être dirigée d'après un procédé fort simple, analogue à celui qui a été employé pour les équations réciproques. Par les règles de la multiplication, on a

$$(y^m+z^m)(y+z)=y^{m+1}+z^{m+1}+yz(y^{m-1}+z^{m-1}).$$

Or, $y+z=x$ et $yz=\sqrt[n]{ab}$; donc, en faisant $\sqrt[n]{ab}=c$, il viendra

$$y^{m+1}+z^{m+1}=x(y^m+z^m)-c(y^{m-1}+z^{m-1}).$$

Au moyen de cette formule on exprimera, en fonction de x et de c, successivement toutes les quantités y^2+z^2, y^3+z^3, etc. Quand on sera parvenu à y^n+z^n, on remplacera y^n+z^n par $a+b$, et alors on aura l'équation cherchée, laquelle sera de degré n en x.

Cette équation contient c : or, on a $c=\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{A^2+B^2}$; donc c est en général susceptible de n valeurs différentes. En mettant dans l'équation chacune de ces n valeurs à son tour, on aura n équations, et par suite $n\times n$ ou n^2 valeurs de x. C'est en effet ce qui doit être, d'après ce qui a été dit à la fin du numéro précédent. Si on voulait avoir une équation unique qui eût toutes ces valeurs pour racines, il resterait encore à éliminer c entre l'équation de degré n en x et l'équation $c^n=ab$.

Mais si dans la formule [8] on ne veut associer que les valeurs radicales dont le produit est réel, alors ce sera uniquement cette valeur réelle qu'il faudra choisir pour c, et on n'aura plus qu'une seule équation, de degré n, pour déterminer toutes les valeurs de x.

CHAPITRE XXIII.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES SÉRIES.

Définitions. — Règles sur la convergence.

360. On appelle *suite infinie, série infinie,* ou simplement *suite*, *série,* une expression composée d'un nombre illimité de termes. La série est dite *régulière,* lorsqu'à partir d'un certain terme tous les suivants peuvent être formés d'après une même loi. On nomme *terme général* celui dont le rang dépend d'une indéterminée, et

qui deviendra tel ou tel terme de la série, selon la valeur particulière qu'on attribuera à cette indéterminée.

Les séries sont employées le plus souvent pour représenter des quantités dont elles font connaître la valeur avec approximation; et cette approximation s'obtient en prenant dans la série un certain nombre de termes consécutifs à partir du premier. Alors le *reste* de la série, c'est-à-dire l'ensemble des termes qu'on néglige, exprime l'*erreur* de l'approximation; et, pour que la série atteigne le but qu'on se propose, il faut qu'en prenant un nombre de termes assez considérable, cette erreur puisse être rendue aussi petite qu'on voudra. Les séries qui remplissent cette condition sont appelées *convergentes*. Par opposition, les autres se nomment *divergentes*.

De la définition même il suit que si une série est convergente, il existe une certaine limite de laquelle on approchera autant qu'on voudra en prenant un nombre de termes très-considérable, et qu'on ne pourra atteindre qu'en supposant ce nombre égal à l'infini. Cette limite est la valeur complète ou la *somme* de la série.

Par exemple, soit la série

$$[1] \qquad a + ax + ax^2 + ax^3 + \text{etc.},$$

dans laquelle je supposerai, pour mieux fixer les idées, que x soit positif. Si on prend la somme S_n des n premiers termes, on aura

$$S_n = a(1 + x + x^2 \ldots + x^{n-1}) = \frac{a(1-x^n)}{1-x} = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}.$$

Soit $x < 1$: plus n est grand, plus la quantité $\frac{ax^n}{1-x}$ est petite; et même on a reconnu (316) qu'on peut choisir n assez grand pour qu'elle soit aussi petite qu'on voudra. Donc, en prenant un nombre de termes de plus en plus grand, la somme S_n approche continuellement de $\frac{a}{1-x}$ et peut en différer aussi peu qu'on voudra; donc la série [1] est convergente et a pour somme cette limite.

Mais si l'on a $x > 1$, alors on voit immédiatement, sur la série elle-même, que les termes peuvent croître au delà de toute limite; donc les sommes qu'on formerait en prenant successivement un terme, deux termes, trois termes, etc., peuvent croître aussi au delà de toute limite; donc la série est divergente.

361. Il ne faut pas croire qu'une série soit toujours convergente

lorsque ses termes vont en convergeant vers zéro. Par exemple, on se tromperait si on considérait comme convergente la série

$$[2] \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\text{etc.}$$

Pour rendre l'erreur évidente, remarquons d'abord que si, à partir d'un terme quelconque $\frac{1}{n}$, on ajoute entre eux les n termes suivants, on aura une somme $>\frac{1}{2}$. En effet, cette somme est $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\cdots+\frac{1}{2n}$; et, puisque les termes vont en décroissant, elle est visiblement $>\frac{1}{2n}\times n$ ou $\frac{1}{2}$.

Cela posé, groupons les termes de la série comme ci-dessous :

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\cdots+\frac{1}{16}\right)+\text{etc.};$$

toutes les sommes entre parenthèses seront $>\frac{1}{2}$; la série est donc composée d'une infinité de parties toutes $>\frac{1}{2}$; par conséquent la somme de ses termes n'a pas de limite.

562. Les séries convergentes étant les seules qu'on doive employer dans l'analyse, il est important de reconnaître si une série remplit la condition de convergence établie dans la définition; et, pour y parvenir, il existe quelques règles qu'on va expliquer.

Soit une série quelconque

$$[A] \qquad u_0+u_1+u_2+u_3+\text{etc.},$$

que l'on suppose convergente. Désignons d'une manière générale par S_n la somme des n premiers termes, de sorte qu'on ait

$$S_n = u_0+u_1+u_2\ldots\ldots+u_{n-1},$$
$$S_{n+1} = u_0+u_1+u_2\ldots\ldots+u_{n-1}+u_n,$$
$$S_{n+2} = u_0+u_1+u_2\ldots\ldots+u_{n-1}+u_n+u_{n+1},$$
etc.

La définition de la convergence exige qu'en choisissant n suffisamment grand, les sommes S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, etc., approchent autant qu'on voudra d'une certaine limite S. Il suit de là que les différences entre ces sommes pourront être rendues aussi petites qu'on voudra, en choisissant n suffisamment grand. Or, les diffé-

rences entre S_n et chacune des sommes suivantes sont respectivement

$$S_{n+1} - S_n = u_n,\quad S_{n+2} - S_n = u_n + u_{n+1},$$
$$S_{n+3} - S_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},\ \text{etc.};$$

donc, en ne faisant d'abord attention qu'à la différence $S_{n+1} - S_n$, on peut conclure qu'en prenant n suffisamment grand, tous les termes à partir de u_n devront être aussi petits qu'on voudra.

Cette condition est simple et d'un usage facile, mais on a déjà remarqué qu'elle ne suffit pas (**561**); et comme ce qui vient d'être dit de la différence $S_{n+2} - S_n$ s'applique de la même manière aux différences $S_{n+2} - S_n$, $S_{n+3} - S_n$, etc., on peut conclure, comme conditions également nécessaires, que chacune des sommes $u_n + u_{n+1}$, $u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$, etc., considérée séparément, et quel que soit le nombre de ses termes, doit devenir aussi petite qu'on veut quand on prend pour n des nombres très-considérables. Avec ces nouvelles conditions, il est évident que la convergence est assurée : car alors, en choisissant n suffisamment grand, les sommes S_n, S_{n+1}, etc., seront aussi peu différentes entre elles qu'on voudra, et par conséquent il existe une limite dont elles approcheront aussi près qu'on voudra.

563. Pour éclaircir ce qui précède, reprenons la série

$$[1] \qquad a + ax + ax^2 + ax^3 + \text{etc.},$$

dont le terme général est ax^n. Considérons d'abord ce terme isolément, puis ajoutons-le au suivant, puis aux deux suivants, et ainsi de suite : on aura ces différentes expressions,

$$ax^n,\qquad ax^n + ax^{n+1} = \frac{ax^n(1-x^2)}{1-x},$$
$$ax^n + ax^{n+1} + ax^{n+2} = \frac{ax^n(1-x^3)}{1-x},\ \text{etc.}$$

Quand x est < 1, chacune d'elles peut devenir aussi petite qu'on veut en prenant pour n un nombre suffisamment grand; donc, quand x est < 1, les conditions de convergence sont remplies par la série [1].

Reprenons aussi la série numérique

$$[2] \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \text{etc.}$$

Si on considère comme terme général celui qui a le dénominateur

$n+1$, il est évident qu'en faisant n très-grand, il peut devenir aussi petit qu'on veut, ce qui est une condition nécessaire pour la convergence de la série. Mais il faut encore qu'en ajoutant à ce terme général un nombre quelconque de termes, la somme puisse devenir aussi petite qu'on voudra : or, c'est ce qui n'a pas lieu, car on a vu que la somme $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cdots+\frac{1}{2n}$ est $>\frac{1}{2}$.

364. Une remarque importante doit être faite ici, c'est que si dans la série [2] on élève tous les dénominateurs à une même puissance $m>1$, la nouvelle série deviendra convergente. Pour le démontrer, désignons par S la somme des termes de cette nouvelle série, et écrivons-la comme il suit :

$$S=\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}\right)+\left(\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}\cdots+\frac{1}{7^m}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{8^m}+\frac{1}{9^m}\cdots+\frac{1}{15^m}\right)+\text{etc.}$$

Alors observons qu'on a

$$\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}<\frac{2}{2^m},$$

$$\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}\cdots+\frac{1}{7^m}<\frac{4}{4^m},$$

$$\frac{1}{8^m}+\frac{1}{9^m}\cdots+\frac{1}{15^m}<\frac{8}{8^m},$$

etc.

Par suite, il est clair qu'on doit avoir $S<\frac{2}{2^m}+\frac{4}{4^m}+\frac{8}{8^m}+\text{etc.}$, ou, sous une autre forme,

$$S<\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{2m-2}}+\frac{1}{2^{3m-3}}+\text{etc.}$$

La suite qui forme le 2e membre de cette inégalité doit être convergente, car c'est une progression géométrique décroissante, donc à plus forte raison la série S doit-elle être convergente.

Il est en général assez difficile de vérifier toutes les conditions de convergence : c'est pourquoi je placerai ici quelques théorèmes qui embrassent des cas assez nombreux, dans lesquels la convergence est certaine.

Quelques théorèmes sur la convergence. — Limite de l'erreur.

365. THÉORÈME I. *Si dans une série*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_n + u_{n+1} + \text{etc.}$$

tous les termes, à partir d'un certain rang, sont positifs, et si de très-grandes valeurs de n *font converger le rapport* $r = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *vers une limite* R : *la série sera convergente lorsqu'on aura* $R < 1$, *et divergente lorsqu'on aura* $R > 1$.

Si au delà d'un certain rang tous les termes étaient négatifs, le théorème s'appliquerait à la série $-U$.

Supposons d'abord $R < 1$, et choissons à volonté un nombre R' intermédiaire entre 1 et R. Puisque les très-grandes valeurs de n font converger r vers R, il s'ensuit qu'à partir d'un certain termé u_n, qu'on prendra aussi éloigné qu'on voudra, les rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$, $\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}$, etc. pourront différer aussi peu qu'on voudra de la limite R; par conséquent alors ils seront $< R'$. Donc on aura

$$u_{n+1} < R'u_n, \quad u_{n+2} < R'u_{n+1}, \quad u_{n+3} < R'u_{n+2}, \text{ etc.};$$

et à plus forte raison,

$$u_{n+1} < R'u_n, \quad u_{n+2} < R'^2u_n, \quad u_{n+3} < R'^3u_n, \text{ etc.}:$$

ainsi u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, etc., sont des termes respectivement moindres que ceux de la progression géométrique $R'u_n + R'^2u_n + \text{etc.}$ Or cette progression est convergente, puisque la raison R' est < 1 (n° 363); donc, à plus forte raison, la série $u_{n+1} + u_{n+2} + \text{etc.}$ sera convergente, et par conséquent la série U l'est aussi.

En second lieu, soit $R > 1$, et choisissons encore à volonté R' entre 1 et R. On fera voir, comme plus haut, qu'on peut choisir u_n assez éloigné pour que les termes u_{n+1}, u_{n+2}, etc., soient respectivement plus grands que leurs correspondants de la suite géométrique $R'u_n + R'^2u_n + \text{etc.}$ Or, R' étant > 1, on peut arriver dans cette suite à des termes aussi grands qu'on voudra; donc, pour les très-grandes valeurs de n, les termes de la série U ne seront pas aussi peu différents de zéro qu'on voudra. Dès que cette condition vient à manquer, la convergence de la série est impossible.

Appliquons le théorème aux séries suivantes, dans lesquelles on suppose x positif :

$$U' = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \text{etc.},$$

$$U'' = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \ldots + \frac{x^n}{n} + \text{etc.},$$

$$U''' = 1 - \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 \ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}x^n \mp \text{etc.}$$

Dans la première série, U', deux termes consécutifs quelconques sont $\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$; donc $r = \frac{x}{n+1}$. Or, si on fait croître n indéfiniment, la limite de r est $R = 0$, donc, quel que soit x, la série U' est convergente.

Dans la série U'', deux termes consécutifs quelconques sont $\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$; donc $r = \frac{nx}{n+1}$. Or, il est facile de voir qu'on a

$$r = \frac{(n+1-1)x}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)x;$$

donc, si on fait croître n indéfiniment, la limite de r est $R = x$; donc, suivant qu'on aura $x < 1$ ou $x > 1$, la série U'' sera convergente ou divergente.

Enfin, considérons la série U''', dans laquelle m est un nombre donné. Le rapport r sera

$$r = -\frac{(m-n)x}{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{m+1}{n+1}\right)x = \left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right)x,$$

et l'on voit qu'à partir d'une valeur de n suffisamment grande, r sera toujours positif; de sorte que tous les termes de la série U''', à partir d'un certain rang, seront de même signe, comme l'exige l'énoncé du théorème. On voit aussi que la limite de r est $R = x$; donc, x étant positif, suivant qu'on aura $x < 1$ ou > 1, la série U''' sera convergente ou divergente.

366. THÉORÈME II. *Si, dans une série*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_n + \text{etc.},$$

tous les termes sont positifs à partir d'un certain rang, et si, pour les très-grandes valeurs de n, *la racine* $r = \sqrt[n]{u_n}$ *converge vers une limite* R, *la série sera convergente ou divergente, suivant qu'on aura* $R < 1$ *ou* $R > 1$.

Si les termes au delà d'un certain rang étaient négatifs, le théorème s'appliquerait à la série — U.

Soit $R < 1$, et prenons encore une quantité R' entre R et 1. D'après l'énoncé, on peut choisir n assez grand pour que les racines $\sqrt[n]{u_n}$, $\sqrt[n+1]{u_{n+1}}$, $\sqrt[n+2]{u_{n+2}}$, etc. soient aussi approchées de R qu'on voudra, et par conséquent toutes $< R'$: de sorte qu'on aura

$$u_n < R'^n, \quad u_{n+1} < R'^{n+1}, \quad u_{n+2} < R'^{n+2}, \quad \text{etc.}$$

Donc les termes de la suite $u_n + u_{n+1} +$ etc. seront moindres que ceux de la progression géométrique $R'^n + R'^{n+1} +$ etc. Or, cette progression est convergente, à cause de $R' < 1$; donc *à fortiori* la suite $u_n + u_{n+1} +$ etc. doit l'être; donc la série U l'est aussi.

Soit $R > 1$. Si on prend encore R' entre 1 et R, alors R' sera une quantité moindre que R, et un raisonnement analogue au précédent prouvera que la série est divergente.

Scolie. Les deux théorèmes qu'on vient d'établir ne laissent d'incertitude sur la convergence ou la divergence de la série U que dans les cas où l'on aurait $R = 1$; et alors la question ne sera pas toujours facile à décider. M. Cauchy, à qui j'ai emprunté les considérations générales contenues dans ce chapitre, a donné, dans son *Cours d'Analyse*, imprimé en 1821, plusieurs propositions à l'aide desquelles on y réussit quelquefois. Le théor. VI (p. 501), que j'extrais du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, offre un cas assez simple où la difficulté est résolue.

367. Théorème III. *Soit une série* $U = u_0 + u_1 + u_2 +$ etc., *décroissante, et soient* 1, α, β, γ,... *des nombres entiers croissant en progression géométrique : si, dans la série* U, *l'on prend les termes* u_0, $u_{\alpha-1}$, $u_{\beta-1}$, etc., *et qu'on forme la nouvelle série* $U_1 = u_0 + \alpha u_{\alpha-1} + \beta u_{\beta-1} + \gamma u_{\gamma-1} +$ etc., *les deux séries* U *et* U_1 *seront toujours convergentes ensemble et divergentes ensemble.*

Puisque les termes de la série U vont en décroissant, on a évidemment

$$u_0 + u_1 + u_2 \ldots\ldots\ldots + u_{\alpha-2} < (\alpha - 1)u_0,$$
$$u_{\alpha-1} + u_\alpha + u_{\alpha+1} \ldots + u_{\beta-2} < (\beta - \alpha)u_{\alpha-1},$$
$$u_{\beta-1} + u_\beta + u_{\beta+1} \ldots + u_{\gamma-2} < (\gamma - \beta)u_{\beta-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, la somme des premiers membres de ces inégalités n'est autre que la série U; donc $U < (\alpha-1)u_0 + (\beta-\alpha)u_{\alpha-1} + (\gamma-\beta)u_{\beta-1} +$ etc.

Mais les nombres 1, α, β, γ,... formant une progression géométrique, on a $\beta-\alpha=\alpha^2-\alpha=\alpha(\alpha-1)$, $\gamma-\beta=\alpha\beta-\beta=\beta(\alpha-1)$, etc.; donc $U<(\alpha-1)[u_0+\alpha u_{\alpha-1}+\beta u_{\beta-1}+\text{etc.}]$; donc $U<(\alpha-1)U_1$.

Si on suppose la série U_1 convergente, il est clair qu'en multipliant tous ses termes par $\alpha-1$, elle ne cesse point d'être convergente; donc alors la valeur de la série U sera inférieure à celle d'une série convergente; donc, à plus forte raison, cette série U devra elle-même être regardée comme convergente.

Reprenons la série U : en y groupant les termes convenablement, on a évidemment

$$u_1+u_2+u_3\ldots\ldots+u_{\alpha-1}>(\alpha-1)u_{\alpha-1},$$
$$u_\alpha+u_{\alpha+1}+u_{\alpha+2}\ldots+u_{\beta-1}>(\beta-\alpha)u_{\beta-1},$$
$$u_\beta+u_{\beta+1}+u_{\beta+2}\ldots+u_{\gamma-1}>(\gamma-\beta)u_{\gamma-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc $U>u_0+(\alpha-1)u_{\alpha-1}+(\beta-\alpha)u_{\beta-1}+(\gamma-\beta)u_{\gamma-1}+\text{etc.}$ On a déjà observé que $\beta-\alpha=\alpha(\alpha-1)$, $\gamma-\beta=\beta(\alpha-1)$. Observons en outre qu'on a $u_0>\frac{(\alpha-1)}{\alpha}u_0$: alors on pourra écrire $U>\frac{\alpha-1}{\alpha}u_0+(\alpha-1)u_{\alpha-1}+\alpha(\alpha-1)u_{\beta-1}+\beta(\alpha-1)u_{\gamma-1}+\text{etc.}$, ou bien, $U>\frac{\alpha-1}{\alpha}[u_0+\alpha u_{\alpha-1}+\beta u_{\beta-1}+\gamma u_{\gamma-1}+\text{etc.}]$; donc $U>\frac{\alpha-1}{\alpha}U_1$.

Or, si la série U_1 est divergente, elle le sera encore après qu'on aura multiplié tous ses termes par $\frac{\alpha-1}{\alpha}$; donc à plus forte raison la série U sera-t-elle divergente aussi. Donc enfin, la série U est convergente ou divergente en même temps que U_1.

Pour exemple, soit $U=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\text{etc.}$ Prenons la progression géométrique croissante ∺ 1 : 2 : 4 : 8 : ....., et servons-nous-en pour composer la série U_1, conformément au théorème. Il viendra $U_1=1+\frac{2}{2^m}+\frac{4}{4^m}+\frac{8}{8^m}+\text{etc.}$, ou, en simplifiant, $U_1=1+\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{4^{m-1}}+\frac{1}{8^{m-1}}+\text{etc.}$

Cette suite n'est autre qu'une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{2^{m-1}}$. Or, si l'on prend $m<1$ ou $=1$, cette progression

est évidemment divergente; donc la série U le sera aussi. Mais si l'on prend $m > 1$ la progression est décroissante; donc alors la série U sera convergente.

568. Théorème IV. *Lorsqu'une série*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc.}$$

est entremêlée de termes positifs et négatifs, et qu'en les prenant tous positivement la nouvelle série est convergente, on peut affirmer que la série U *l'est aussi.*

Soit R l'ensemble des termes positifs contenus dans la série U à partir du terme quelconque u_n, et soit —R' celle des termes négatifs, de sorte qu'on ait $R - R' = u_n + u_{n+1} + \text{etc.}$

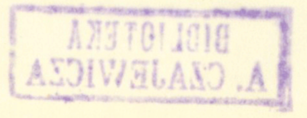
Puisqu'on doit avoir une série convergente en prenant positivement tous les termes de U, il s'ensuit qu'on peut choisir n assez grand pour que $R + R'$ soit une quantité aussi petite qu'on voudra; donc, à plus forte raison, il en sera ainsi de $R - R'$; donc la série U est convergente.

Pour donner des exemples, reportons-nous aux séries U', U'', U''', du n° 565. On y supposait x positif afin que tous les termes, à partir d'un certain rang, fussent positifs; et alors on a reconnu entre quelles limites il fallait renfermer x pour que ces séries fussent convergentes. Donc, d'après le théorème qui vient d'être démontré, elles ne cesseront pas d'être convergentes si on donne à x des valeurs renfermées entre les mêmes limites prises négativement. Ainsi la série U' sera convergente pour toutes les valeurs de x, tant positives que négatives; la série U'' le sera pour toutes les valeurs entre $+1$ et -1; et enfin la série U''' le sera aussi pour les valeurs entre $+1$ et -1.

Scolie. Il ne faudrait pas renverser le théorème IV, et conclure que si une série entremêlée de signes + et — est convergente, il en sera de même si on prend tous ses termes positivement. La série V du numéro suivant en sera une preuve.

569. Théorème V. *Une série est convergente lorsque ses termes, à partir d'un certain rang, ont des signes alternatifs, et qu'ils vont en diminuant de telle sorte que zéro soit la limite de leur décroissement.*

Désignons par $\pm a$ l'un quelconque des termes décroissants dont les signes sont alternatifs, et les suivants par $\mp b \pm c \mp$ etc. Si on prend la somme des termes qui précèdent a pour valeur appro-



chée de la série, l'erreur sera $\pm a \mp b \pm c \mp d \pm$ etc.; et cette erreur, que je nommerai ρ, pourra s'écrire sous ces deux formes

$$\rho = \pm [(a - b) + (c - d) + \text{etc.}],$$
$$\rho = \pm [a - (b - c) - (d - e) - \text{etc.}].$$

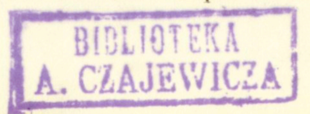
Puisque les termes a, b, etc., vont en décroissant, toutes les quantités entre parenthèses sont positives : donc, par la première forme, on voit que ρ est de même signe que $\pm a$; et, par la seconde, que la valeur numérique de ρ est $< a$. Or, en prenant le terme a assez éloigné, il sera aussi petit qu'on voudra; donc, à plus forte raison, il en sera ainsi de ρ; donc la série donnée est convergente.

Par exemple, considérons la série $V = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$ on reconnaît sur-le-champ qu'elle remplit les conditions du théorème. Donc elle est convergente; et en l'arrêtant à un terme quelconque, à $\frac{1}{4}$ par exemple, l'erreur sera en moins et $< \frac{1}{5}$.

Les théorèmes I et II n'apprendraient rien à l'égard de cette série, car ils exigent que les termes, à partir d'un certain rang, soient tous de même signe. Les théorèmes III et IV n'apprendraient rien non plus.

370. Lorsqu'une série est convergente, et que, pour avoir une valeur approchée de la série entière, on fait la somme d'un certain nombre de termes, il est important d'obtenir une limite de l'erreur. Quand la série tombe dans le cas du théorème V, on vient de voir que l'erreur est toujours moindre que le premier terme de ceux qu'on néglige. Mais la seule règle générale qu'on puisse indiquer pour obtenir cette limite, c'est de comparer, ainsi qu'on l'a fait dans les théorèmes I et II, la série avec une progression géométrique décroissante; et, quand on aura reconnu qu'en s'arrêtant à un certain terme, les termes suivants de la série diminuent plus rapidement que les termes correspondants de la progression géométrique, on sera certain que l'erreur est inférieure à la somme des termes de la progression.

Par exemple, soit $U' = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \text{etc.}$ Dans cette série le terme en x^{n+1} se forme en multipliant le précédent par x et en le divisant par $n+1$. Soit n un nombre tel qu'on ait $x < n+1$: on sera sûr que les termes de la suite



$\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}+$ etc. décroîtront plus rapidement que ceux d'une progression géométrique dont le premier terme serait le même que dans cette suite, et dont la raison serait $\frac{x}{n+1}$. Donc, si on prend dans la série U' le terme en x^{n-1} pour le dernier, l'erreur ρ sera moindre que la somme de cette progression, et l'on aura $\rho<\frac{(n+1)x^n}{1.2\ldots n(n+1-x)}$.

371. Théorème VI. *Soit une série décroissante*

$$U=u_0+u_1+u_2\ldots+u_n+u_{n+1}+\text{etc.},$$

dans laquelle, pour les très-grandes valeurs de n, *le rapport* $r=\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *converge vers l'unité : mettez ce rapport sous la forme* $r=\frac{1}{1+\alpha}$, α *étant une quantité positive qui, pour les très-grandes valeurs de* n, *converge vers zéro ; puis formez la limite* R *du produit* nα. *La série* U *sera convergente ou divergente, selon qu'on aura* $R>1$ *ou* $R<1$.

1° Soit R ou lim. $n\alpha=k$, k étant >1. Désignons par m une quantité déterminée comprise entre 1 et k, et par conséquent >1 : je vais faire voir qu'à partir d'une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, on devra avoir

[1] $$1+\alpha>\left(1+\frac{1}{n}\right)^m.$$

Il sera démontré plus tard, n° **379**, que la formule du binome est applicable à un exposant quelconque : par conséquent on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^m=1+\frac{m}{n}+\frac{m(m-1)}{1.2n^2}+$ etc.; et, pour que l'inégalité précédente ait lieu, il suffira qu'on ait $\alpha>\frac{m}{n}+\frac{m(m-1)}{1.2n^2}+$ etc., ou

$$n\alpha>m+\frac{m(m-1)}{1.2n}+\text{etc.}$$

Lorsqu'on fait croître n jusqu'à l'infini, le premier membre $n\alpha$, par hypothèse, a pour limite k, tandis que le second membre a évidemment pour limite m. Or m est une quantité $<k$; donc, à partir d'une certaine valeur de n, l'inégalité ci-dessus ne peut pas man-

quer d'avoir lieu; donc aussi, à partir de cette valeur, on aura l'inégalité [1]. De cette dernière on tire

$$\frac{1}{1+\alpha} \quad \text{ou} \quad r < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}.$$

Mais, si on considère la série

$$U_1 = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} \ldots + \frac{1}{n^m} + \frac{1}{(n+1)^m} + \text{etc.},$$

le rapport du terme général au précédent y sera $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}$, et par conséquent plus grand que dans la série U. Or, par ce qui a été dit à la fin du n° **567**, la série U_1 est convergente puisque m surpasse l'unité; donc à plus forte raison la série U devra l'être : c'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

2° Soit R ou lim. $n\alpha = k$, k étant < 1. Prenons une quantité m comprise entre 1 et k, et par suite < 1 : je vais démontrer qu'au delà d'une certaine valeur de n l'on aura constamment

[2] $$1 + \alpha < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m.$$

En effet, si on développe la puissance m du binome, il suffira qu'on ait $\alpha < \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2n^2} + \text{etc.}$, ou bien, $n\alpha < m + \frac{m(m-1)}{1.2n} + \text{etc.}$ Or cette inégalité est évidente, lorsque n augmente au delà d'une certaine grandeur : car le second membre a pour limite m, tandis que le premier a pour limite $k < m$. Ainsi, à partir d'une certaine valeur de n, on aura toujours l'inégalité [2], laquelle donne

$$\frac{1}{1+\alpha} \quad \text{ou} \quad r > \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}.$$

De là on conclut aisément que r finit par être constamment supérieur au rapport des termes correspondants de la série U_1. Or, dans le cas actuel, la série U_1 est divergente, puisqu'on suppose $m < 1$; donc à plus forte raison la série U devra-t-elle l'être.

Donc enfin, la série U est convergente ou divergente selon qu'on a $R > 1$ ou $R < 1$.

Le rapport désigné par r dans l'énoncé a 1 pour limite; par conséquent la série qu'on y considère se trouve dans un cas où le théor. I ne peut rien apprendre sur la convergence de cette série.

EXEMPLE. Soit la série $U = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} + \text{etc.}$ Dans ce cas les termes u_n et u_{n+1} sont

$$\frac{1.2.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ 2n} \times \frac{1}{2n+1},\quad \frac{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}{2.4.6\ldots\ 2n(2n+2)} \times \frac{1}{2n+3}:$$

par conséquent on a $r = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$; donc lim. $r = 1$, ce qui n'apprend rien sur la convergence de la série. Mais appliquons le théor. VI, et pour cela posons

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}.$$

Il viendra

$$\alpha = \frac{6n+5}{(2n+1)^2},\quad n\alpha = \frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2} = \frac{6+\frac{5}{n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2};$$

donc lim. $n\alpha$ ou $R = \frac{6}{4}$. Cette limite étant > 1, on conclut que la série est convergente.

AUTRE EXEMPLE. Soit encore $U = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \text{etc.}$ Pour cette série, le rapport r est $r = \frac{2n+1}{2n+2}$, et la limite de r est encore l'unité. Mais ici on a

$$\alpha = \frac{1}{2n+1},\quad n\alpha = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}};$$

donc lim. $n\alpha$ ou $R = \frac{1}{2}$; donc la série est divergente.

572. Je terminerai ce que j'ai à dire sur la convergence des séries par une observation qui est due à M. DIRICHLET, et que j'extrais des leçons faites par M. LIOUVILLE à l'École Polytechnique. Elle a pour objet de faire remarquer une différence essentielle qui existe entre les séries qui ne doivent leur convergence qu'à la grandeur absolue des termes dont elles se composent, et celles qui, au contraire, perdraient leur convergence si on prenait positivement les termes négatifs qui peuvent s'y trouver. Les séries de la première sorte, quand on y intervertit d'une manière quelconque l'ordre des termes, restent toujours convergentes et

conservent la même valeur; tandis que les séries de la seconde sorte, après de tels déplacements, peuvent prendre des valeurs différentes, et même cesser tout à fait d'être convergentes. C'est ce que nous allons éclaircir.

En premier lieu, considérons une série de la 1re espèce,

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc.}$$

Représentons par S_n la somme des n premiers termes, par R la somme de tous les termes positifs qui viennent à la suite dans le reste de la série, et par $-$ R' la somme de tous les termes négatifs : on aura évidemment

$$U = S_n + R - R'.$$

Comme on admet que la série serait convergente même en prenant tous ses termes positivement, il s'ensuit qu'en choisissant n suffisamment grand, la somme $R + R'$ sera aussi petite qu'on voudra; donc, à plus forte raison, en sera-t-il ainsi de R et R'.

Maintenant, imaginons qu'on change d'une manière quelconque l'ordre des termes de la série U. Après ce changement, on peut toujours concevoir qu'on prenne, dans la nouvelle série, à partir du 1er terme, un nombre m des termes assez grand pour que tous ceux de S_n s'y trouvent compris : ce nombre m sera en général $> n$; il pourra aussi être égal à n, mais jamais moindre.

Nommons Σ_m la somme de ces m termes. Outre les termes de S_n, cette somme pourra contenir des termes positifs et des termes négatifs, qui d'abord faisaient partie de R et de $-$ R'; de sorte qu'en désignant par r la somme des uns et par $-r'$ celle des autres, on aura

$$\Sigma_m = S_n + r - r'.$$

En faisant croître n et m jusqu'à l'infini, R et R' doivent devenir zéro; donc, à plus forte raison, il en sera ainsi de r et r'. Donc S_n et Σ_m ont la même limite : c'est-à-dire que la deuxième série est convergente aussi, et a même valeur que la première.

En second lieu, supposons que la présence du signe $-$, devant certains termes, soit nécessaire à la convergence; de telle sorte qu'en prenant ces termes positivement la série ne serait plus convergente. Alors la conclusion ci-dessus cesse d'être légitime : car les sommes représentées par R et R' n'ayant plus zéro pour limite, on ne peut plus affirmer que r et r' auront zéro pour limite.

Il sera bon de montrer sur un exemple que le déplacement des termes négatifs peut véritablement changer la valeur de la série, quand elle reste convergente, et même, dans certains cas, lui ôter sa convergence. A cet effet, reprenons, p. 500, la série

$$V = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots - \frac{1}{2n} + \text{etc.}$$

qui est convergente à cause des signes alternatifs, et qui cesse de l'être quand on y remplace les signes — par +. Changeons-y l'ordre des termes négatifs, de telle sorte que chacun d'eux vienne après deux termes positifs ; et en conséquence écrivons

$$V_1 = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} \cdots \\ + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1}\right) - \frac{1}{2n} + \text{etc.}$$

Pour plus de clarté, ajoutons les fractions entre parenthèses : on aura

$$V_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{12}{35} - \frac{1}{4} \cdots + \frac{8n-4}{(4n-3)(4n-1)} - \frac{1}{2n} + \text{etc.}$$

Dans cette manière de grouper les termes, la série V_1 est encore convergente et a une valeur $> V$. En effet, quelque éloigné que soit le terme $-\frac{1}{2n}$, auquel on s'arrête dans l'une et dans l'autre, si l'on représente par N et N_1 les deux sommes, il est facile de voir qu'on a

$$N_1 - N = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \cdots + \frac{1}{4n-1}.$$

Ici, les termes du 2ᵉ membre vont en décroissant et sont en nombre n ; donc on a $N_1 - N < \frac{n}{2n+1}$ et $> \frac{n}{4n-1}$; donc, à plus forte raison $N_1 - N < \frac{1}{2}$ et $> \frac{1}{4}$. Ainsi, puisque la série V est convergente, la série V_1 doit l'être aussi, et la série V_1 surpasse V d'une différence comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.

J'ai dit aussi que la convergence de la série pouvait disparaître : pour cela il suffira de distribuer les termes positifs par groupes tels que chacun fasse une somme plus grande qu'une quantité déterminée ; et ce résultat peut se produire de diverses manières.

Par exemple, on peut remarquer qu'en partant d'un terme positif quelconque, $+\frac{1}{n}$, si l'on en prend un nombre n à la suite comme ci-dessous, on aura

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}\cdots+\frac{1}{n+2(n-1)}.$$

Ici le dernier terme $=\frac{1}{3n-2}$, et la somme est évidemment $>\frac{n}{3n-2}$, et par conséquent $>\frac{1}{3}$.

Cela posé, après avoir pris dans V, les termes $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, groupons en un seul les 5 termes positifs $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\ldots+\frac{1}{13}$, groupons aussi en un seul les 15 termes $\frac{1}{15}+\frac{1}{17}\ldots+\frac{1}{43}$, et ainsi de suite. Pour abréger, représentons ces différentes sommes par a, b, c,...; et, au lieu de V, écrivons la série

$$V_2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+a-\frac{1}{6}+b-\frac{1}{8}+\text{etc.}$$

La remarque faite plus haut prouve que toutes les sommes a, b, c,... sont $>\frac{1}{3}$. Dès lors la convergence n'existe plus; car il est évident que les parties $a-\frac{1}{6}$, $b-\frac{1}{8}$, etc., sont en nombre infini, et toutes $>\frac{1}{6}$.

Les explications que je viens de donner, d'après M. Liouville, montrent combien il y a peu de sûreté à employer les séries qui, sans le signe — dont une partie des termes est affectée, ne seraient point convergentes.

Sur les développements en séries. — Méthode des coefficients indéterminés. — Retour des suites.

573. Les séries se présentent d'elles-mêmes dans les opérations de l'algèbre. Par exemple, supposons qu'on fasse une division de polynomes dans laquelle le dividende ne soit par un produit exact du diviseur, ou bien qu'on ait à extraire la racine d'un polynome qui ne soit pas une puissance exacte de même ordre que la racine; dans ces deux cas, les opérations successives se prolongeront indéfiniment, et l'on engendrera une série.

Lorsque des opérations ont pour objet de transformer une expression en une autre qui lui soit égale, si, au lieu d'un nombre limité de termes, on trouve une série, on regarde ordinairement

cette série comme équivalente à la première expression. Mais à ce sujet quelques observations importantes doivent être faites, et, pour être mieux compris, je choisirai un exemple fort simple.

Soit la fraction $\frac{1}{1-x}$; si on effectue, par les règles connues, la division de 1 par $1-x$; le calcul sera comme ci-dessous :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1-x \\ \hline +x & 1+x+x^2+\text{etc.} \\ +x^2 & \\ +x^3 & \\ \text{etc.} & \end{array}$$

Par la nature même de l'opération, on reconnaît que le quotient ne s'arrêtera pas, et qu'on aura une série régulière dont chaque terme est le produit du précédent par x. Si on la termine à une certaine puissance de x, à x^2 par exemple, le reste correspondant sera x^3; et il faudra ajouter au quotient, pour le compléter, la fraction $\frac{x^3}{1-x}$. Ainsi, on a exactement

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}.$$

Mais une erreur assez commune, c'est de croire qu'en regardant la suite des termes du quotient comme prolongée à l'infini, elle devra toujours représenter, quel que soit x, la valeur exacte du quotient; de sorte qu'on aurait

$$[1] \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \text{etc.}$$

Cette égalité est incontestable quand on attribue à x des valeurs <1 : car alors le second membre est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante, et, d'après la règle (**316**), cette somme est en effet égale au quotient de 1 par $1-x$.

Mais, quand on attribue à x des valeurs >1, l'égalité cesse d'être vraie. Ainsi, qu'on fasse $x=2$, elle devient $\frac{1}{1-2} = 1+2+4+\text{etc.}$, et il y a absurdité évidente : car le premier membre est égal à -1, et le deuxième est égal à l'infini.

Il est facile d'expliquer comment il se fait que l'égalité [1] soit vraie ou fausse, selon que x est moindre ou plus grand que 1. On

a déjà observé qu'en arrêtant le quotient à une certaine puissance de x, il faut ajouter une fraction au quotient pour le compléter. Désignons par x^n le terme auquel on s'arrête, le reste de la division sera x^{n+1}, et l'on aura, sans aucune erreur,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Si on veut prolonger indéfiniment la suite des termes du quotient, il faut faire $n = \infty$; et cette hypothèse doit être faite aussi bien dans la partie fractionnaire que dans la partie entière. Or, la partie fractionnaire devient alors zéro si $x < 1$, et $-\infty$ si $x > 1$: donc on peut la supprimer dans le premier cas, mais non dans le second.

En général une fonction ne peut être remplacée par une série que dans les cas où cette série lui est parfaitement équivalente; et, pour que cela soit, il faut, comme condition essentielle, qu'en arrêtant la série à un terme quelconque, le reste de la série devienne zéro lorsque le nombre des termes qui précèdent ce reste est infini. Or, cette condition est toujours remplie par les séries convergentes; et pour cette raison elles sont les seules qu'on doive admettre dans le calcul.

374. Il existe, pour développer les fonctions en séries, une méthode dite *des coefficients indéterminés*, que je vais exposer en peu de mots. Afin de mieux fixer les idées, supposons, ce qui est le cas le plus ordinaire, qu'il s'agisse d'une fonction F (x) dont les valeurs sont réelles et varient d'une manière continue, pour des valeurs très-petites de x à partir de $x = 0$. On demande de développer cette fonction en série ordonnée suivant les puissances ascendantes, positives et entières de x. On fera

$$[2] \qquad F(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.};$$

et A, B, C,.... seront des coefficients indéterminés qui ne doivent point contenir x, et dont il faut trouver les valeurs.

A cet effet, on choisira une propriété de la fonction F(x) qui soit d'une vérification facile, et en cherchant à opérer cette vérification avec la série, on arrivera à une égalité telle que

$$[3] \qquad P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + \text{etc.} = 0,$$

dans laquelle P, Q, R,.... sont des expressions indépendantes de x, mais composées avec les coefficients A, B, C,.... Or, cette égalité devant subsister sans qu'on assigne à x de valeur particulière,

il faudra que les multiplicateurs des différentes puissances de x deviennent nuls; donc on devra avoir

[4] $$P=0,\quad Q=0,\quad R=0,\quad \text{etc.},$$

et on se servira de ces équations pour trouver les coefficients A, B, C,.... Si elles en laissent quelques-uns d'inconnus, il faudra remonter à l'équation [2] et les déterminer d'après les propriétés particulières de la fonction que l'on considère.

Dans le chapitre suivant je donnerai des applications de cette méthode; mais je dois présenter ici quelques observations qui me semblent indispensables.

375. Premièrement, dans l'égalité [2] il faut que le second membre représente la valeur du premier. Si cela n'est pas possible en attribuant à x une valeur quelconque, on veut au moins que l'égalité ait lieu pour les petites valeurs de x, et cela exige que la série soit convergente pour ces petites valeurs. Or, il est très-rare qu'on puisse démontrer *à priori* la possibilité d'exprimer une fonction par une série de cette espèce, même lorsqu'on la restreint aux petites valeurs de x. Ainsi, à parler rigoureusement, l'égalité [2] doit être regardée comme purement hypothétique, et à la fin du calcul, après avoir trouvé A, B, C...., il sera nécessaire de vérifier si, pour les petites valeurs de x, elle est véritablement convergente et égale à la fonction que l'on considère.

Les auteurs n'ont peut-être pas assez insisté sur la nécessité de cette vérification. Communément on croit que les calculs par lesquels on cherche des inconnues ne doivent jamais manquer de mettre à découvert les fausses suppositions qu'on y aurait introduites; et, s'il en était ainsi, la vérification serait superflue. Mais on pourrait citer des exemples où des erreurs de supposition resteraient inaperçues par cette voie. Les bornes de cet ouvrage ne me permettent pas de m'étendre davantage sur ce sujet.

376. J'ai dit que l'éq. [3] devait avoir lieu sans attribuer à x de valeur particulière. Pour bien entendre ceci, il faut observer que si on borne, comme nous l'avons fait, l'égalité [2] aux petites valeurs de x, il en doit être de même de l'équation [3] : c'est-à-dire que la série $P+Qx+$etc., doit être convergente et égale à zéro, pour toutes les valeurs de x à partir de $x=0$ jusqu'à une certaine limite, qui peut être très-petite. Or, cela suffit pour conclure qu'on doit avoir les éq. [4].

En effet, si on prend $x=0$, la série $P+Qx+$ etc., doit se réduire à P, et par conséquent l'équation [3] donne $P=0$. Supprimons dans cette équation le terme P qui est zéro, et divisons-la par x, on obtient celle-ci $Q+Rx+\text{etc.}=0$, laquelle doit encore subsister pour les valeurs très-petites de x. Donc on pourra en conclure semblablement $Q=0$; et ainsi de suite.

577. Une même fonction $F(x)$ ne peut avoir qu'un seul développement en série convergente de la forme $A+Bx+$ etc. : car si on en trouvait deux, ils devraient être égaux entre eux, et dès lors on devrait avoir une équation de la forme

$$[5] \qquad A+Bx+Cx^2+\text{etc.}=A'+B'x+C'x^2+\text{etc.}$$

En transposant tout dans un seul membre, cette équation devient $(A-A')+(B-B')x+\text{etc.}=0$; et, par le numéro précédent, on en conclut $A-A'=0$, $B-B'=0$,... ou $A=A'$, $B=B'$,.... On peut encore dire, en d'autres termes, que deux séries convergentes, ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable x, ne sauraient être égales sans être identiques.

578. L'emploi des coefficients indéterminés s'offre de lui-même dans le problème du *retour des suites*. Alors on suppose qu'une quantité y, dépendant d'une variable x, est exprimée par une série en x, et l'on veut en déduire la valeur de x exprimée par une série en y. Soient

$$y=A+Bx+Cx^2+\text{etc.}, \qquad x=a+by+cy^2+\text{etc.},$$

A, B, C,.... étant des quantités données, et a, b, c,.... des indéterminées. Dans la première égalité on remplacera x par la série $a+by+$etc.; ou, bien, dans la seconde, y par la série $A+Bx+$etc. : on arrivera ainsi à une égalité telle que [3] ou [5], d'où l'on déduira différentes équations qui serviront à déterminer a, b, c,....

Je terminerai ici les généralités relatives aux séries. J'en ai dit assez pour montrer combien de précautions doivent être prises pour les employer avec sûreté. Aussi a-t-on soin, surtout dans les éléments, de ne traiter par cette voie que les questions dont la solution serait impossible ou trop difficile par d'autres procédés.

CHAPITRE XXIV.

BINOME POUR TOUS LES CAS. — SÉRIES EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES. — SÉRIES RÉCURRENTES.

Formule du BINOME pour un exposant quelconque.

579. Si on fait, comme au n° **211**, les premières puissances de $a+x$ au moyen de la multiplication, on reconnaît facilement que pour un exposant entier positif quelconque les deux premiers termes du développement de $(a+x)^m$ sont $a^m+ma^{m-1}x$, et que les autres sont de la forme $Aa^{m-2}x^2+Ba^{m-3}x^3+$ etc.; de sorte que, en désignant par A, B, etc. des coefficients qui ne contiennent ni a ni x, on peut poser

[1] $(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+Aa^{m-2}x^2+Ba^{m-3}x^3+\text{etc.}$

Lorsque l'exposant est un nombre positif fractionnaire, on a

$$(a+x)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a+x)^m}=\sqrt[n]{a^m+ma^{m-1}x+\text{etc.}}$$

Or, si on applique ici le procédé expliqué n° **228** pour l'extraction des racines, on trouve sans difficulté les deux premiers termes de cette racine, et l'on a un développement de la forme

$$(a+x)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}x+Aa^{\frac{m}{n}-2}x^2+Ba^{\frac{m}{n}-3}x^3+\text{etc.}$$

Ainsi cette forme est la même que pour un exposant entier.

Quand l'exposant est un nombre négatif quelconque, entier ou fractionnaire, on a, en s'appuyant sur ce qui vient d'être trouvé,

$$(a+x)^{-m}=\frac{1}{(a+x)^m}=\frac{1}{a^m+ma^{m-1}x+\text{etc.}}.$$

Or, si on effectue la division suivant les règles ordinaires, il vient un quotient indéfini tel que

$$(a+x)^{-m}=a^{-m}-ma^{-m-1}x+Aa^{-m-2}x^2+\text{etc.};$$

donc, quel que soit l'exposant, on doit toujours avoir un développement de la forme indiquée par l'éq. [1]. Les deux premiers termes sont déterminés, et il ne reste plus qu'à trouver les coefficients A, B, etc. des autres termes.

Pour plus de généralité je considérerai deux termes consécutifs de rang quelconque, et j'écrirai

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x \dots + Ma^{m-n}x^n + Na^{m-n-1}x^{n+1} + \text{etc.}$$

Changeons partout x en $x+y$: comme les coefficients inconnus ne contiennent ni a ni x, il viendra

$$(a+x+y)^m = a^m + ma^{m-1}(x+y)\dots$$
$$\dots + Ma^{m-n}(x+y)^n + Na^{m-n-1}(x+y)^{n+1} + \text{etc.}$$

En changeant a en $a+y$, on eût trouvé

$$(a+y+x)^m = (a+y)^m + m(a+y)^{m-1}x\dots$$
$$\dots + M(a+y)^{m-n}x^n + N(a+y)^{m-n-1}x^{n+1} + \text{etc.}$$

Dans les deux égalités précédentes, les premiers membres sont égaux : donc les seconds doivent l'être ; et cela, quels que soient x et y. Donc, si on les ordonne par rapport aux puissances de y, ils devront être identiques. A la vérité ils renferment des puissances de binomes, mais on connaît les deux premiers termes de chacune d'elles, de sorte qu'on pourra former la partie qui, dans chaque second membre, renferme y au 1er degré : et cette partie nous suffira. En la désignant par Yy dans l'un, et par $Y'y$ dans l'autre, il est facile de trouver

$$Y = ma^{m-1}\dots + Mna^{m-n}x^{n-1} + N(n+1)a^{m-n-1}x^n\dots$$
$$Y' = ma^{m-1}\dots + M(m-n)a^{m-n-1}x^n + N(m-n-1)a^{m-n-2}x^{n+1}\dots$$

Ces deux quantités devant être égales quel que soit x, il faut que les coefficients des puissances semblables de x soient égaux ; donc, en ne considérant que ceux qui affectent $a^{m-n-1}x^n$, on aura

$$N(n+1) = M(m-n), \quad \text{d'où} \quad N = \frac{M(m-n)}{n+1}.$$

On voit par là selon quelle loi, dans le développement [1], un coefficient quelconque se forme du précédent. Elle est la même qu'on a trouvée pour le cas d'un exposant entier positif (**215**) ; et comme nous avons reconnu que les deux premiers termes du développement sont composés de la même manière quel que soit l'exposant m, il en sera encore ainsi de tous les autres termes.

Donc, pour toutes les valeurs de m, on aura toujours la formule

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2 + \text{etc.}$$

Lorsque m sera entier et positif, elle s'arrêtera à x^m ; dans tous les autres cas elle se prolongera indéfiniment.

Séries exponentielles et logarithmiques.

380. Lorsqu'on fait $x=0$, la fonction a^x se réduit à l'unité. C'est pourquoi je prendrai l'unité pour premier terme du développement de a^x, et je poserai

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.},$$

A, B, C, D,.... étant des coefficients indéterminés qu'on suppose indépendants de x. Pour trouver ces coefficients, je me servirai de la propriété $a^x \times a^y = a^{x+y}$.

En changeant dans la série x en y, et ensuite x en $x+y$, on a

$$a^y = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{etc.},$$
$$a^{x+y} = 1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + D(x+y)^4 + \text{etc.};$$

donc, pour vérifier la propriété $a^x \times a^y = a^{x+y}$, on doit avoir

$$1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + D(x+y)^4 + \text{etc.} =$$
$$(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.})(1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \text{etc.}).$$

Si on effectue les opérations indiquées, et si on considère en particulier la partie qui contient la première puissance de y dans chaque membre, ces deux parties devant être égales, on aura

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{etc.} = A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \text{etc.}$$

Mais cette égalité doit elle-même avoir lieu quel que soit x; donc les puissances semblables de x doivent avoir les mêmes coefficients; donc $2B = A^2$, $3C = AB$, $4D = AC$, etc., d'où

$$B = \frac{A^2}{2}, \quad C = \frac{A^3}{2.3}, \quad D = \frac{A^4}{2.3.4} + \text{etc.};$$

et, en substituant ces valeurs, la série deviendra

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

La quantité A reste encore à déterminer : on y parvient très-simplement en faisant $Ax = 1$ ou $x = \frac{1}{A}$. Pour cette valeur on a

$$a^{\frac{1}{A}} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Selon l'usage, je nommerai e la quantité représentée par cette

série numérique; et, en prenant les logarithmes des deux membres, il viendra $\frac{1}{A}\log a = \log e$, d'où $A = \frac{\log a}{\log e}$.

Pour plus de simplicité, je supposerai que les logarithmes soient pris dans le système dont la base est e; et, dans cette hypothèse, je les indiquerai par la seule initiale L. Alors on aura $Le = 1$, $A = La$, et par suite le développement de a^x sera

$$a^x = 1 + xLa + \frac{x^2(La)^2}{2} + \frac{x^3(La)^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Si l'exponentielle était e^x, il faudrait faire $a = e$, $La = 1$; et l'on aurait simplement

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

381. On n'essayera pas de développer $\log x$ en une série de la forme $A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$, attendu que, par l'hypothèse $x = 0$, $\log x$ devient infini. Mais on cherchera le développement de $\log(1+x)$; et comme $x = 0$ donne $\log(1+x) = 0$, on posera

$$\log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$$

Changeons x en $x + y$, il viendra

$$\log(1 + x + y) = A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + \text{etc.}$$

Mais $1 + x + y = (1+x)\left(1 + \frac{y}{1+x}\right)$; donc $\log(1+x+y) = \log(1+x) + \log\left(1 + \frac{y}{1+x}\right)$. Or, si on change x en $\frac{y}{1+x}$, la première égalité donne $\log\left(1 + \frac{y}{1+x}\right) = \frac{Ay}{1+x} + \frac{By^2}{(1+x)^2} + \text{etc.}$; et par suite il vient

$$\log(1+x+y) = \log(1+x) + \frac{Ay}{1+x} + \frac{By^2}{(1+x)^2} + \text{etc.}$$

On a ainsi une seconde expression de $\log(1+x+y)$. Dans l'une et l'autre les multiplicateurs des puissances semblables de y doivent être égaux : en prenant ceux qui affectent la 1re puissance de y, on a d'abord

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{etc.} = \frac{A}{1+x};$$

puis en chassant le dénominateur $1+x$ et ôtant le terme A qui est commun aux deux membres, on trouve

$$(2B + A)x + (3C + 2B)x^2 + (4D + 3C)x^3 + \text{etc.} = 0.$$

Comme x doit rester indéterminé, il faut qu'on ait $2B+A=0$, $3C+2B=0$, $4D+3C=0$,... Ces équations donnent $B=-\frac{1}{2}A$, $C=\frac{1}{3}A$, $D=-\frac{1}{4}A$,....; donc

$$\log(1+x)=A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}\right).$$

Il faut encore chercher A, et cette recherche est assez délicate. Divisons par x les deux membres de l'égalité ci-dessus, il vient

$$\frac{\log(1+x)}{x}=A\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\text{etc.}\right).$$

Alors le second membre se réduit à A par l'hypothèse $x=0$. Mais le premier se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et la difficulté est d'en connaître la vraie valeur. Soit fait $x=\frac{1}{n}$, on aura $\frac{\log(1+x)}{x}=$ $n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; et, si on développe cette puissance, on trouve

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\text{etc.}$$
$$=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$
$$+\frac{1}{2.3.4}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\text{etc.}$$

Or l'hypothèse $x=0$ répond à $n=\infty$; et, si on suppose $n=\infty$, le second membre de la dernière égalité se réduit à la série numérique déjà remarquée n° **580**, $e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+$ etc.; donc $A=\log e$. Donc enfin

$$[1] \qquad \log(1+x)=\log e\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}\right).$$

Jusqu'ici les logarithmes appartiennent à telle base qu'on voudra; mais si on adopte e pour base on a $\log e=1$, et, en n'employant alors que la seule initiale L pour désigner les logarithmes, on a

$$[2] \qquad \log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc}$$

582. Par ce qui précède, il est évident que A ou $\log e$ est le rapport de $\log(1+x)$ à x lorsque x est très-petit : ainsi cette quantité est la même que celle qui a reçu le nom de *module* (**545**). Lorsqu'on prend e pour la base, ce module devient égal à 1; par conséquent e est la base des logarithmes népériens (**545**).

Il est d'ailleurs évident qu'on transportera les logarithmes népériens dans un système quelconque en les multipliant par le module propre à ce système. On a vu plus haut que ce module était égal à log e. Mais, si on appelle a la base de ce système, on a évidemment $a^{\log e} = e$; donc en prenant les logarithmes népériens des deux membres, il viendra $\log e \times \mathrm{L}a = 1$. Donc, en désignant le module par M, on aura également $\mathrm{M} = \log e$ et $\mathrm{M} = \frac{1}{\mathrm{L}a}$.

383. Les séries [1] et [2] ne sont convergentes que pour les valeurs de x moindres que 1, mais elles servent à en trouver d'autres qui conviennent aux valeurs plus grandes. Dans la série [2], changeons x en $-x$, elle donne

$$\mathrm{L}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \text{etc.};$$

et, si on retranche $\mathrm{L}(1-x)$ de $\mathrm{L}(1+x)$, on trouve le logarithme du quotient de $1+x$ par $1-x$, savoir :

$$\mathrm{L}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{etc.}\right).$$

Posons $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{n}$, d'où $x = \frac{z}{2n+z}$; puis, observons qu'alors $\mathrm{L}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \mathrm{L}\left(1+\frac{z}{n}\right) = \mathrm{L}\left(\frac{n+z}{n}\right) = \mathrm{L}(n+z) - \mathrm{L}n$: on conclura

$$\mathrm{L}(n+z) = \mathrm{L}n + 2\left\{\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \text{etc.}\right\}.$$

Cette formule sera commode pour s'élever de $\mathrm{L}n$ à $\mathrm{L}(n+z)$.

Après avoir calculé les logarithmes népériens, on les fera passer dans le système vulgaire, dont la base est 10, en les multipliant par le module de ce système. Pour avoir ce module, il suffit donc de connaître les logarithmes d'un même nombre dans chaque système et de diviser le second logarithme par le premier. Le nombre qu'il convient de choisir est la base 10 elle-même, parce que son logarithme dans le second système est l'unité. Voici comment on trouve le log. nép. de 10.

On calcule d'abord L2 en faisant $n = 1$, $z = 1$, dans la formule ci-dessus; puis on a $\mathrm{L}4 = 2\mathrm{L}2$; puis la formule donne L5 en y faisant $n = 4$, $z = 1$; puis enfin on a $\mathrm{L}10 = \mathrm{L}5 + \mathrm{L}2$.

C'est ainsi que s'obtiennent les deux valeurs déjà rapportées ailleurs, $\mathrm{L}10 = 2{,}302\,585\,092\ldots$, $\mathrm{M} = 0{,}434\,294\,481\ldots$

Sur le nombre e.

584. Reprenons à la page 515 le développement

$$[1]\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$
$$+\frac{1}{2.3.4}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\text{etc.},$$

dans lequel n est un nombre entier positif. J'ai supposé que l'hypothèse $n=\infty$ réduisait le 2e membre à la série numérique dont la valeur est désignée par e, et qui s'est déjà présentée n° 580 : savoir,

$$[2]\qquad e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\text{etc. à l'infini.}$$

En conséquence, j'ai considéré e comme étant la valeur de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ correspondante à $n=\infty$.

Cependant les parties, qui dans le 2e membre de la formule [1], deviennent zéro par l'hypothèse $n=\infty$, sont elles-mêmes en nombre infini ; et, pour cette raison, on peut craindre que e ne soit pas exactement la valeur que doit prendre alors ce second membre. Si cette objection faisait naître quelques doutes, l'explication suivante les fera disparaître.

Dans la série [2], ne prenons d'abord que n termes, et posons

$$E=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}\ldots+\frac{1}{2.3\ldots n}.$$

Désignons par N le 1er membre de la formule [1] ; puis observons que si, dans chacun des produits qui composent les n termes du 2e membre, on remplace tous les facteurs par des facteurs égaux au dernier, la valeur de ce membre sera diminuée. De là il suit qu'en choisissant convenablement une quantité positive G, on pourra écrire

$$N=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2.3}\left(1-\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{2.3.4}\left(1-\frac{3}{n}\right)^3+\text{etc.}+G.$$

Par suite, on aura

$$E-N=\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{1}{2.3}\left[1-\left(1-\frac{2}{n}\right)^2\right]+\frac{1}{2.3.4}\left[1-\left(1-\frac{3}{n}\right)^3\right]+\text{etc.}-G.$$

Les quantités entre crochets peuvent se décomposer en deux facteurs par la formule connue $1-z^p=(1-z)(1+z+z^2+\text{etc.})$; et il est facile de trouver

$$\mathrm{E}-\mathrm{N}=\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{1}{2.3}\frac{2}{n}\left[1+\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2.3.4}\frac{3}{n}\left[1+\left(1-\frac{3}{n}\right)+\left(1-\frac{3}{n}\right)^2\right]+\text{etc.}-\mathrm{G}.$$

Dans le 2e membre supprimons toutes les fractions $-\frac{2}{n}$, $-\frac{3}{n}$, etc. Par là ce membre sera augmenté, et l'on rétablira l'égalité en remplaçant G par une quantité $\mathrm{G}'>\mathrm{G}$. Alors on aura

$$\mathrm{E}-\mathrm{N}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{2.2}{2.3}+\frac{3.3}{2.3.4}+\frac{4.4}{2.3.4.5}+\text{etc.}\right)-\mathrm{G}'.$$

On a évidemment $2.2<2.3$, $3.3<3.4$, etc., c'est-à-dire que, dans chacune des fractions qui viennent après $\frac{1}{2}$, le numérateur est moindre que le produit des deux derniers facteurs du dénominateur; donc, en désignant par G″ une quantité $>\mathrm{G}'$, on aura

$$\mathrm{E}-\mathrm{N}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\text{etc.}\right)-\mathrm{G}'',$$

ou bien encore, en remarquant que la quantité entre parenthèses est égale à $\mathrm{E}-\frac{1}{2}$,

$$\mathrm{E}-\mathrm{N}=\frac{1}{n}\left(\mathrm{E}-\frac{1}{2}\right)-\mathrm{G}''.$$

De là on tire

$$\mathrm{N}=\mathrm{E}-\frac{1}{n}\left(\mathrm{E}-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{G}''.$$

Maintenant faisons $n=\infty$: à cette limite E devient e. D'un autre côté il est évident qu'on a $e<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\text{etc.}$; donc $e<3$; donc, à cause du diviseur n qui est infini, on aura

$$\text{Lim. de } \mathrm{N}=e+\mathrm{G}'''.$$

Avant de faire $n=\infty$, quel que soit le nombre n, il est clair que N ne peut pas surpasser E; et d'ailleurs nous avons dit que G″ était une quantité essentiellement positive. Donc aussi, à la limite,

N ne doit pas surpasser e, et la quantité que j'ai représentée par G''' ne saurait être négative. De là il suit que la dernière égalité est impossible, à moins qu'on n'ait $G'''=0$; et alors il reste lim. de $N=e$: c'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

585. Maintenant je vais prouver que *le nombre* e *est incommensurable*.

Par la série même il est évident qu'il est >2, et il est facile de voir qu'il est <3. En effet, la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+$ etc., est moindre que la progression géométrique $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ etc., et cette dernière somme est égale à 1. Donc e est entre 2 et 3, et ne peut point par conséquent être un nombre entier.

Admettons que e puisse être un nombre fractionnaire, et qu'on ait

$$\frac{p}{q}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}\ldots+\frac{1}{2.3\ldots q}+\frac{1}{2.3\ldots q(q+1)}+\text{etc.}$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $2.3\ldots(q-1)q$, il viendrait $2.3\ldots(q-1)\times p=M+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\text{etc.}$, M désignant un nombre entier. Or, les fractions qui sont ajoutées à M composent une somme moindre que la progression géométrique $\frac{1}{q+1}+\left(\frac{1}{q+1}\right)^2+\left(\frac{1}{q+1}\right)^3+\text{etc.}$, et cette dernière somme est égale à la fraction $\frac{1}{q}$; donc il s'ensuivrait qu'en ajoutant à M une fraction moindre que celle-là, le résultat serait encore un nombre entier, ce qui est absurde; donc e est irrationnel.

586. On peut encore démontrer, ainsi que l'a fait M. Liouville dans le tome V de son *Journal de mathématiques*, que *le nombre* e *ne peut pas être la racine d'une équation du* 2e *degré à coefficients rationnels*.

Si e pouvait être racine d'une équation du 2e degré à coefficients rationnels, on devrait avoir $Ae^2+Be+C=0$, A étant un nombre entier positif, et B, C étant des nombres entiers positifs ou négatifs. Cette égalité donne, en la divisant par e,

$$Ae+Ce^{-1}+B=0.$$

Si, dans la série qui exprime la valeur générale de e^x, on fait $x=-1$, on trouve $e^{-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}-\text{etc.}$ Substituons

dans l'équation ci-dessus, au lieu de e et de e^{-1}, leurs valeurs en séries : il viendra

$$A\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\text{etc.}\right)+C\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3}+\text{etc.}\right)+B=0.$$

Soit n un nombre entier, qu'on pourra supposer aussi grand qu'on voudra. Multiplions cette égalité par $1.2.3...n-1$, transposons dans le 2e membre tous les termes entiers, et désignons alors ce membre par μ : on aura

$$A\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}+\text{etc.}\right)\pm C\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}+\text{etc.}\right)=\mu,$$

ou, sous une autre forme,

$$\frac{A}{n}\left(1+\frac{1}{n+1}+\text{etc.}\right)\pm\frac{C}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}+\text{etc.}\right)=\mu.$$

La partie qui contient A est positive, et elle sera aussi petite qu'on voudra; car la quantité entre parenthèses est évidemment <2, et n est un nombre entier aussi grand qu'on veut. La partie qui contient C peut aussi être regardée comme positive; car, si C est positif, on prendra n pair, et si C est négatif, on prendra n impair : de plus, il est clair que cette partie sera aussi petite qu'on voudra. De là il suit que le 1er membre de l'égalité ci-dessus peut être supposé égal à une très-petite fraction, et dès lors cette égalité est impossible quand même l'entier μ serait zéro. Donc il est absurde de supposer que e soit racine d'une équation à coefficients rationnels.

M. Liouville démontre aussi que *même le carré* e^2 *est encore un nombre irrationnel*; mais sur ce point je renverrai au *Journal de mathématiques* déjà cité.

387. Le nombre e est fréquemment employé dans l'analyse. Quelques termes de la série numérique suffiront pour obtenir en décimales la valeur déjà rapportée n° **346**, $e=2,718\,281\,828...$ Cette valeur ne saurait être périodique; car, si cela était, elle pourrait s'exprimer en fraction ordinaire : donc elle serait commensurable, et le contraire a été démontré.

On peut même ajouter que si on veut l'exprimer en fraction continue, cette fraction ne sera point périodique; car, si elle l'était, le nombre e serait racine d'une équation du 2e degré à coefficients rationnels (**330**).

Démonstration des formules précédentes en considérant directement les séries elles-mêmes.

588. Si le lecteur se reporte aux observations générales que j'ai présentées n° 575 sur les développements en séries, il reconnaîtra combien laissent à désirer, sous le rapport de la rigueur, les méthodes dont nous avons fait usage. Pour corriger ce qu'elles ont d'imparfait, je vais considérer les séries en elles-mêmes et prouver qu'elles sont en effet égales aux quantités dont on les a déduites. L'analyse suivante a été donnée par DESTAINVILLE dans le tome IX des *Annales de Mathématiques* publiées par M. GERGONNE. Elle n'a peut-être pas toute la rigueur désirable; mais je craindrais de la compliquer en y faisant des changements.

589. Considérons les séries indéfinies qui sont écrites ci-dessous, et que je suppose convergentes,

$$\varphi(a) = 1 + a\frac{z}{1} + a(a+k)\frac{z^2}{1.2} + a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\varphi(b) = 1 + b\frac{z}{1} + b(b+k)\frac{z^2}{1.2} + b(b+k)(b+2k)\frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\varphi(a+b) = \left\{ \begin{array}{l} 1 + (a+b)\frac{z}{1} + (a+b)(a+b+k)\frac{z^2}{1.2} \\ + (a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.} \end{array} \right.$$

J'emploie ici $\varphi(a)$ comme notation abrégée pour désigner la première série; et en même temps j'établis la convention que, si dans cette série on remplace a par une quantité quelconque u, la nouvelle série sera représentée par $\varphi(u)$. Cela posé, je vais démontrer qu'on doit toujours avoir $\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(a+b)$.

Pour y parvenir, je formerai d'abord le produit $\varphi(a) \times \varphi(b)$. En effectuant avec ordre la multiplication, on trouvera

$$\varphi(a) \times \varphi(b) =$$

$$\begin{array}{r|r|r|l} 1 + a & \frac{z}{1} + a(a+k) & \frac{z^2}{1.2} + a(a+k)(a+2k) & \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.} \\ + b & + 2ab & + 3ab(a+k) & \\ & + b(b+k) & + 3ab(b+k) & \\ & & + b(b+k)(b+2k) & \end{array}$$

Si on compare ce produit avec $\varphi(a+b)$ on voit sur-le-champ que les deux premiers termes sont les mêmes. Le troisième est aussi le même : car on a évidemment

$$\begin{aligned} a(a+k)+2ab+b(b+k) &= a(a+k)+ab+ab+b(b+k) \\ &= a(a+b+k)+b(a+b+k)=(a+b)(a+b+k). \end{aligned}$$

En continuant, on pourrait prouver que l'égalité a lieu dans les termes suivants ; mais, pour plus de généralité, je vais démontrer qu'en supposant l'égalité établie jusqu'à une puissance quelconque z^{p-1} inclusivement, elle doit encore subsister entre les termes affectés de z^p

Avec de l'attention, il est facile de voir que, dans le produit $\varphi(a)\times\varphi(b)$, les termes en z^{p-1} et z^p sont

$$\left.\begin{array}{l} a(a+k)(a+2k)(a+3k)\ldots\ldots[a+(p-2)k] \\ +\dfrac{p-1}{1}ba(a+k)(a+2k)\ldots\ldots[a+(p-3)k] \\ +\dfrac{p-1}{1}\cdot\dfrac{p-2}{2}b(b+k)a(a+k)\ldots[a+(p-4)k] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\dfrac{p-1}{1}\cdot\dfrac{p-2}{2}a(a+k)b(b+k)\ldots[b+(p-4)k] \\ +\dfrac{p-1}{1}ab(b+k)(b+2k)\ldots\ldots[b+(p-3)k] \\ +b(b+k)(b+2k)(b+3k)\ldots\ldots[b+(p-2)k] \end{array}\right\}\times\frac{z^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)},$$

$$\left.\begin{array}{l} a(a+k)(a+2k)(a+3k)\ldots\ldots[a+(p-1)k] \\ +\dfrac{p}{1}ba(a+k)(a+2k)\ldots\ldots[a+(p-2)k] \\ +\dfrac{p}{1}\cdot\dfrac{p-1}{2}b(b+k)a(a+k)\ldots\ldots[a+(p-3)k] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\dfrac{p}{1}\cdot\dfrac{p-1}{2}a(a+k)b(b+k)\ldots\ldots[b+(p-3)k] \\ +\dfrac{p}{1}ab(b+k)(b+2k)\ldots\ldots[b+(p-2)k] \\ +b(b+k)(b+2k)(b+3k)\ldots\ldots[b+(p-1)k] \end{array}\right\}\times\frac{z^{p}}{1.2.3\ldots p}.$$

Maintenant remarquons que, dans la partie en z^p, les multiplicateurs où entre p se prêtent aux décompositions suivantes :

$$\frac{p}{1}=\frac{p-1}{1}+1,$$

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}=\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}+\frac{p-1}{1},$$

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}=\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}\cdot\frac{p-3}{3}+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2},$$

etc.

Alors on verra que toute la quantité affectée de z^p peut se séparer en deux parties, dont l'une contient le facteur a dans tous ses termes, tandis que l'autre contient le facteur b. Ces parties sont

$$\left.\begin{array}{l}(a+k)(a+2k)(a+3k)\ldots\ldots\ldots[a+(p-1)k]\\ +\frac{p-1}{1}b(a+k)(a+2k)\ldots\ldots\ldots[a+(p-2)k]\\ +\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}b(b+k)(a+k)\ldots\ldots[a+(p-3)k]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\frac{p-1}{1}(a+k)b(b+k)\ldots\ldots\ldots[b+(p-3)k]\\ +b(b+k)(b+2k)\ldots\ldots\ldots[b+(p-2)k]\end{array}\right\}\times\frac{az^p}{1.2\ldots.p}+$$

$$\left.\begin{array}{l}a(a+k)(a+2k)\ldots\ldots\ldots[a+(p-2)k]\\ +\frac{p-1}{1}(b+k)a(a+k)\ldots\ldots\ldots[a+(p-3)k]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}a(a+k)(b+k)\ldots\ldots[b+(p-3)k]\\ +\frac{p-1}{1}a(b+k)(b+2k)\ldots\ldots\ldots[b+(p-2)k]\\ +(b+k)(b+2k)(b+3k)\ldots\ldots\ldots[b+(p-1)k]\end{array}\right\}\times\frac{bz^p}{1.2\ldots.p}.$$

Dans la première partie, la quantité placée à gauche de l'accolade est ce que devient le coefficient de $\frac{z^{p-1}}{1.2\ldots.(p-1)}$, lorsqu'on y change a en $a+k$; et, dans la seconde, elle est ce qu'il devient lorsqu'on y change b en $b+k$. Or, par hypothèse, ce coefficient est le même

que celui qui affecte $\dfrac{z^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}$ dans la série $\varphi(a+b)$, c'est-à-dire qu'on le suppose réductible à la forme

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots[a+b+(p-2)k];$$

donc les deux quantités placées avant les accolades s'obtiendront en changeant dans cette dernière expression a en $a+k$, et b en $b+k$. Chacun de ces changements donne le même résultat,

$$(a+b+k)(a+b+2k)(a+b+3k)\ldots[a+b+(p-1)k];$$

donc, en ayant égard à ce facteur commun, la somme des deux parties, qui contiennent z^p à droite des accolades, sera

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots.[a+b+(p-1)k]\frac{z^p}{1.2\ldots.p},$$

laquelle est identique avec le terme en z^p de la série $\varphi(a+b)$.

Ainsi, en admettant qu'il y ait égalité entre les termes des séries représentées par $\varphi(a)\times\varphi(b)$ et par $\varphi(a+b)$, jusqu'à une certaine puissance de z, elle doit encore exister pour la puissance supérieure. Or, cette égalité a été reconnue pour les trois premiers termes: donc elle a lieu pour quatre termes. Si elle a lieu pour quatre termes, elle a donc lieu aussi pour cinq; et ainsi indéfiniment.

590. La proposition qu'on vient de démontrer revient à dire, en d'autres mots, que la série $\varphi(a)$ est une telle fonction de a que, pour la multiplier par une fonction semblable de b, il suffit d'ajouter b à a. Sous ce rapport, elle est parfaitement analogue à l'exponentielle Z^a, dans laquelle Z serait une quantité indépendante de a; et l'on va voir que cette analogie se maintient aussi dans les conséquences.

Reprenons l'équation démontrée

[1] $$\varphi(a)\times\varphi(b)=\varphi(a+b).$$

On peut y remplacer a par $a-b$: alors elle devient $\varphi(a-b)\times\varphi(b)=\varphi(a)$, et l'on en tire, pour la division de $\varphi(a)$ par $\varphi(b)$,

[2] $$\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}=\varphi(a-b).$$

Si on change b en $b+c$, l'équation [1] devient $\varphi(a)\times\varphi(b+c)=\varphi(a+b+c)$. Mais, en vertu de cette même équation, on a $\varphi(b)\times\varphi(c)=\varphi(b+c)$; donc $\varphi(a)\times\varphi(b)\times\varphi(c)=\varphi(a+b+c)$. En changeant c en $c+d$, et en continuant de la même manière, quel que soit le nombre des facteurs, on aura toujours $\varphi(a)\times\varphi(b)\times\varphi(c)\ldots.$

$=\varphi(a+b+c....)$. Donc, en supposant toutes les quantités $a, b, c, ...$ égales à a, et leur nombre égal à m, cette équation donnera

$$[3] \qquad [\varphi(a)]^m = \varphi(ma).$$

En remplaçant dans celle-ci a par $\frac{a}{m}$, il vient $\left[\varphi\left(\frac{a}{m}\right)\right]^m = \varphi(a)$; donc, pour l'expression des racines, on a

$$[4] \qquad \sqrt[m]{\varphi(a)} = \varphi\left(\frac{a}{m}\right).$$

La formule [3] n'est encore démontrée que pour un exposant entier positif. On l'étendra à tous les exposants positifs fractionnaires en remarquant que les formules précédentes donnent $\sqrt[n]{[\varphi(a)]^m} = \sqrt[n]{\varphi(ma)} = \varphi\left(\frac{ma}{n}\right)$. Mais $\sqrt[n]{[\varphi(a)]^m}$ est la même chose que $[\varphi(a)]^{\frac{m}{n}}$; donc

$$[5] \qquad [\varphi(a)]^{\frac{m}{n}} = \varphi\left(\frac{ma}{n}\right).$$

Pour étendre aussi la formule aux exposants négatifs, on remarquera qu'en désignant par m et r des nombres positifs quelconques, les formules démontrées donnent $[\varphi(a)]^{-m} = \frac{[\varphi(a)]^r}{[\varphi(a)]^{m+r}}$ $= \frac{\varphi(ra)}{\varphi(ma+ra)} = \varphi(ra - ma - ra)$; donc enfin

$$[6] \qquad [\varphi(a)]^{-m} = \varphi(-ma).$$

Ainsi, quel que soit l'exposant m, on a toujours $[\varphi(a)]^m = \varphi(ma)$; et en remettant dans cette égalité les séries représentées par $\varphi(a)$ et $\varphi(ma)$, il vient

$$[7] \quad \left[1 + a\frac{z}{1} + a(a+k)\frac{z^2}{1.2} + a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right]^m =$$
$$1 + ma\frac{z}{1} + ma(ma+k)\frac{z^2}{1.2} + ma(ma+k)(ma+2k)\frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

591. Dans l'équation [7], a et k sont quelconques. Si on y fait $a=1$ et $k=-1$, elle devient

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \text{etc.};$$

la formule du *binome* est ainsi démontrée pour un exposant quelconque. On sait comment on peut déduire $(a+x)^m$ de $(1+z)^m$.

592. Dans la même éq. [7], faisons $k=0, a=1, z=1, m=\alpha x$: il viendra

$$\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\text{etc.}\right)^{\alpha x}=1+\frac{\alpha x}{1}+\frac{\alpha^2x^2}{1.2}+\frac{\alpha^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

La série numérique du premier membre est le nombre e, base des logarithmes népériens : ainsi, on peut écrire

$$e^{\alpha x}=1+\frac{\alpha x}{1}+\frac{\alpha^2x^2}{1.2}+\frac{\alpha^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si on pose $e^\alpha=a$, α sera le logarithme népérien de a, et on retrouve la série exponentielle du nº **580**, savoir :

$$a^x=1+\frac{x\mathrm{L}a}{1}+\frac{x^2(\mathrm{L}a)^2}{1.2}+\frac{x^3(\mathrm{L}a)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

593. Pour avoir la série logarithmique, on changera, dans cette dernière formule, a en $1+x$ et x en m. Il vient

$$(1+x)^m=1+\frac{m\mathrm{L}(1+x)}{1}+\frac{m^2[\mathrm{L}(1+x)]^2}{1.2}+\text{etc.}$$

Mais, en développant la puissance $(1+x)^m$, on a

$$(1+x)^m=1+m\frac{x}{1}+m(m-1)\frac{x^2}{1.2}+\text{etc.}$$

Égalons donc les deux séries, supprimons l'unité de part et d'autre et divisons par m : on aura

$$\mathrm{L}(1+x)+\frac{m[\mathrm{L}(1+x)]^2}{1.2}+\frac{m^2[\mathrm{L}(1+x)]^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$=\frac{x}{1}+(m-1)\frac{x^2}{1.2}+(m-1)(m-2)\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Enfin, en faisant $m=0$ dans cette dernière équation, on retrouve la formule connue

$$\mathrm{L}(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}$$

Génération des séries récurrentes.

594. Soit la fraction

$$\frac{a'}{a+bx}:$$

en effectuant, selon la règle ordinaire, la division de a' par $a+bx$, on trouve au quotient une suite de termes dont la loi se manifeste

promptement. On peut encore écrire la fraction ainsi $a'(a+bx)^{-1}$, puis se servir de la formule du binome. Mais la méthode des coefficients indéterminés conduira au même résultat, et sera plus commode lorsque la fraction sera plus compliquée.

Sans entrer dans les détails de la division, on reconnaît de suite que le quotient sera une série de la forme $A+Bx+Cx^2+$ etc.; c'est pourquoi l'on posera

$$\frac{a'}{a+bx}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.},$$

A, B, C, D,.... étant des coefficients à déterminer. En multipliant de part et d'autre par $a+bx$, il viendra

$$a'=Aa+\left.\begin{matrix}Ba\\+Ab\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}Ca\\+Bb\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}Da\\+Cb\end{matrix}\right|x^3+\text{etc.}$$

Or, le produit du quotient par le diviseur devant reproduire identiquement le dividende, on doit avoir

$$Aa=a',\quad Ba+Ab=0,\quad Ca+Bb=0,\quad Da+Cb=0,\quad \text{etc.}$$

De là on tire les valeurs des coefficients A, B, C...., savoir : $A=\frac{a'}{a}$, $B=-\frac{b}{a}A$, $C=-\frac{b}{a}B$, $D=-\frac{b}{a}C$, etc. Donc, en multipliant un coefficient quelconque par $-\frac{b}{a}$, on obtient le coefficient suivant; ou, ce qui est la même chose, chaque terme est le produit du précédent par $-\frac{bx}{a}$. Ici la série n'est qu'une simple progression géométrique.

Maintenant considérons la fraction

$$\frac{a'+b'x}{a+bx+cx^2}.$$

On posera semblablement

$$\frac{a'+b'x}{a+bx+cx^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

et, en multipliant de part et d'autre par le dénominateur $a+bx+cx^2$, il vient

$$a'+b'x=Aa+\left.\begin{matrix}Ba\\+Ab\\ \end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}Ca\\+Bb\\+Ac\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}Da\\+Cb\\+Bc\end{matrix}\right|x^3+\text{etc.}$$

Pour que les deux membres soient identiques, il faut qu'on ait

$$Aa = a', \quad Ba + Ab = b', \quad Ca + Bb + Ac = 0,$$
$$Da + Cb + Bc = 0, \text{ etc.},$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{a'}{a}, \; B = \frac{b' - Ab}{a}, \; C = -\frac{c}{a}A - \frac{b}{a}B, \; D = -\frac{c}{a}B - \frac{b}{a}C, \text{ etc.}$$

Ici on voit que chaque coefficient, à partir du 3e, est la somme des deux précédents multipliés respectivement par $-\frac{c}{a}$ et $-\frac{b}{a}$, ou, ce qui est la même chose, que chaque terme est la somme des deux précédents multipliés par $-\frac{cx^2}{a}$ et $-\frac{bx}{a}$.

Si l'on pose encore

$$\frac{a' + b'x + c'x^2}{a + bx + cx^2 + dx^3} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

on verra que chaque terme, à partir du 4e, se compose des trois précédents, multipliés respectivement par $-\frac{dx^3}{a}, -\frac{cx^2}{a}, -\frac{bx}{a}$.

Enfin, il devient alors évident qu'en général une fraction de la forme

$$\frac{a' + b'x + c'x^2 \ldots + h'x^{m-1}}{a + bx + cx^2 \ldots\ldots + kx^m}$$

doit donner naissance à une suite dont chaque terme, à partir du $(m+1)^{ième}$, se composera des m précédents multipliés respectivement par $-\frac{k}{a}x^m, -\frac{h}{a}x^{m-1}, \ldots -\frac{c}{a}x^2, -\frac{b}{a}x$.

On appelle *récurrentes* toutes les suites ainsi formées, et *échelle de relation* l'ensemble des quantités par lesquelles il faut multiplier plusieurs termes consécutifs pour avoir le suivant. On pourra dire aussi que la série est du 1er ordre, du 2e ordre, etc., selon le nombre des termes qui entrent dans l'échelle de relation.

Si l'expression qu'on développe a un numérateur de degré plus élevé que le dénominateur, ou de degré égal, on voit, par la manière même dont on détermine les coefficients du développement, que la loi de la série sera toujours la même : seulement, elle sera retardée. Au reste, on pourra, si on veut, décomposer préalablement l'expression proposée en une partie entière plus une fraction ayant un numérateur de degré inférieur au dénominateur.

595. Dans ce qui précède j'ai porté l'attention uniquement sur les termes entiers du quotient, parce que je voulais faire remarquer la loi de leur composition. Mais si on voulait avoir le quotient exact, il ne faudrait pas manquer d'ajouter aux termes entiers la fraction provenant du reste de la division; et, d'après les observations faites dans un cas analogue (575), cette fraction ne doit pas être supprimée, lors même qu'on prolongerait le quotient indéfiniment, à moins qu'on ne prouve que dans ce cas elle doit devenir zéro. Or, il est facile de démontrer que c'est en effet ce qui arrivera, si on n'attribue à x que des valeurs plus petites que l'unité et au-dessous d'une certaine limite. Mais je supprime ces détails, et laisse au lecteur le soin d'y suppléer.

Retour des séries récurrentes aux fractions génératrices.

596. *Une série récurrente étant donnée, on propose de retrouver la fraction génératrice.*

Dans cet énoncé, on suppose la série récurrente ordonnée par rapport à une indéterminée x. Soit

$$S = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.},$$

une telle série, ayant pour échelle de relation $[px^3, qx^2, rx]$. Puisque cette échelle contient trois termes, la fraction génératrice est de la forme

$$\frac{a' + b'x + c'x^2}{a + bx + cx^2 + dx^3}.$$

Si cette fraction était donnée, on a vu que l'échelle de relation serait $\left[-\frac{d}{a}x^3, -\frac{c}{a}x^2, -\frac{b}{a}x\right]$. Or, cette fraction peut s'écrire ainsi

$$\frac{\frac{a'}{a} + \frac{b'}{a}x + \frac{c'}{a}x^2}{1 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x^3};$$

et alors on voit que les trois termes en x du dénominateur s'obtiendront sur-le-champ en prenant ceux de l'échelle de relation avec des signes contraires. Ainsi, on peut mettre la fraction génératrice sous la forme

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{1 - rx - qx^2 - px^3},$$

et il n'y aura plus qu'à déterminer α, β, γ. A cet effet, on pose

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{1-rx-qx^2-px^3}=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\text{etc.};$$

et comme, en chassant le dénominateur, l'équation doit devenir identique, on conclut, en ne tenant compte que des trois premiers termes,

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2=\begin{array}{r|r|l}\mathrm{A}+\mathrm{B} & x+\mathrm{C} & x^2.\\ -\mathrm{A}r & -\mathrm{B}r & \\ & -\mathrm{A}q & \end{array}$$

Par conséquent on aura, pour la fraction génératrice,

$$\mathrm{S}=\frac{\mathrm{A}+(\mathrm{B}-\mathrm{A}r)x+(\mathrm{C}-\mathrm{B}r-\mathrm{A}q)x^2}{1-rx-qx^2-px^3}.$$

Par exemple, soit $\mathrm{S}=1-2x-x^2-5x^3+4x^4-$etc., série récurrente, dont l'échelle de relation est $[+x^3,\ +4x^2,\ -2x]$. Dans la formule ci-dessus on fera $\mathrm{A}=1$, $\mathrm{B}=-2$, $\mathrm{C}=-1$, $p=1$, $q=4$, $r=-2$; et on trouvera $\mathrm{S}=\dfrac{1-9x^2}{1+2x-4x^2-x^3}$.

597. *Une série étant donnée, on veut reconnaître si elle est récurrente, et, dans ce cas, retrouver la fraction génératrice.*

Soit la série donnée

$$\mathrm{S}=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}x^3+\text{etc.}$$

Cherchons d'abord si elle est égale à une fraction de la forme $\dfrac{a'}{a+bx}$, et posons $\mathrm{S}=\dfrac{a'}{a+bx}$. De là on tire

$$\frac{1}{\mathrm{S}}=\frac{a+bx}{a'}=\frac{a}{a'}+\frac{b}{a'}x;$$

donc le quotient de 1 par la série S doit être exact et de la forme $p+qx$. Alors la fraction génératrice serait exprimée ainsi :

$$\mathrm{S}=\frac{1}{p+qx}.$$

Si la division ne s'arrête pas au deuxième terme, la série ne sera pas récurrente, ou elle proviendra d'une fraction plus compliquée. Posons $\mathrm{S}=\dfrac{a'+b'x}{a+bx+cx^2}$, on aura

$$\frac{1}{\mathrm{S}}=\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x}=p+qx+\frac{a''x^2}{a'+b'x}:$$

c'est-à-dire qu'en divisant 1 par la série S, si on arrête le quotient aux termes de la forme $p+qx$, la série S_1x^2 qu'on obtient pour reste, et qui est toujours divisible par x^2, sera telle qu'après en avoir ôté ce facteur on devra avoir $\frac{S_1}{S}=\frac{a''}{a'+b'x}$.

De là on tire

$$\frac{S}{S_1}=\frac{a'+b'x}{a''}=p_1+q_1x,$$

c'est-à-dire que la nouvelle division doit se terminer au deuxième terme; et alors, pour trouver la fraction génératrice, on aura les deux équations

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S_1}{S}x^2,\quad \frac{S}{S_1}=p_1+q_1x,$$

d'où

$$S=\frac{1}{p+qx+\frac{S_1}{S}x^2},\quad \frac{S_1}{S}=\frac{1}{p_1+q_1x};$$

par conséquent la fraction génératrice sera

$$S=\frac{p_1+q_1x}{(p+qx)(p_1+q_1x)+x^2}.$$

Supposons que le quotient de S par S_1 ne soit pas exactement p_1+q_1x : si la série est récurrente, elle sera d'un ordre supérieur au second. Examinons si on peut avoir $S=\frac{a'+b'x+c'x^2}{a+bx+cx^2+dx^3}$.

De là on tire

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{a''+b''x}{a'+b'x+c'x^2}x^2:$$

c'est-à-dire qu'après avoir poussé jusqu'aux deux premiers termes le quotient de 1 par la série S, on trouvera pour reste une série dont tous les termes contiendront x^2; et que, si on désigne ce reste par S_1x_2, on devra avoir $\frac{S_1}{S}=\frac{a''+b''x}{a'+b'x+c'x^2}$.

Cette égalité donne

$$\frac{S}{S_1}=p_1+q_1x+\frac{a'''}{a''+b''x}x^2;$$

donc, en désignant par S_2x^2 la série qu'on obtient pour reste après

avoir poussé la division de la série S par la série S_1 jusqu'aux termes $p_1 + q_1x$, on doit avoir $\frac{S_2}{S_1} = \frac{a'''}{a'' + b''x}$.

De cette dernière égalité, on tire

$$\frac{S_1}{S_2} = p_2 + q_2x.$$

Ici les opérations s'arrêtent : pour remonter à la fraction génératrice, on aura les équations

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S_1}{S}x^2, \quad \frac{S}{S_1} = p_1 + q_1x + \frac{S_2}{S_1}x^2, \quad \frac{S_1}{S_2} = p_2 + q_2x\,;$$

et, de ces équations, l'on tire

$$S = \frac{1}{p + qx + \frac{S_1}{S}x^2}, \quad \frac{S_1}{S} = \frac{1}{p_1 + q_1x + \frac{S_2}{S_1}x^2}, \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{p_2 + q_2x}.$$

Il ne reste plus que quelques substitutions à effectuer pour former la fraction égale à S.

Sans aller plus loin, le lecteur aperçoit sans doute que les opérations successives, pour trouver les quotients $p+qx$, p_1+q_1x, etc., et pour remonter ensuite à la fraction génératrice, ont une analogie frappante avec celles qu'on fait pour réduire une fraction ordinaire en fraction continue et revenir ensuite à la fraction ordinaire. Cette observation tiendra lieu de règle générale. Si la série est récurrente, on en sera averti lorsqu'on arrivera à une division qui donnera un quotient exact de la forme $p + qx$.

Exemple. Supposons qu'on veuille savoir si la série des nombres 1, 2, 3, etc. est récurrente. Ce n'est point cette série numérique qu'il faut considérer, mais bien celle-ci

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \text{etc.};$$

et alors voici comment les opérations s'exécutent :

Division de 1 *par* S.

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \text{etc.} \\ \cline{2-2}
-1 - 2x - 3x^2 - 4x^3 - \text{etc.} & 1 - 2x \\ \hline
\quad -2x - 3x^2 - 4x^3 - 5x^4 - \text{etc.} & \\
\quad +2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + \text{etc.} & \\ \hline
\qquad\quad x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \text{etc.} = S_1x^2. &
\end{array}$$

Division de S *par* S_1.

$$\begin{array}{l|l} 1+2x+3x^2+4x^3+\text{etc.} & 1+2x+3x^2+4x^3+\text{etc.} \\ \hline -1-2x-3x^2-4x^3-\text{etc.} & 1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc la série S est récurrente, et l'on a $\frac{1}{S}=1-2x+\frac{S_1}{S}x^2$, $\frac{S}{S_1}=1$.

De là on tire $S=\dfrac{1}{1-2x+\frac{S_1}{S}x^2}$, $\frac{S_1}{S}=1$; par conséquent

$$S=\frac{1}{1-2x+x^2}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Remarque. En cherchant une règle pour reconnaître si une série est récurrente, nous avons considéré la série comme provenant d'une fraction dont le numérateur est de degré inférieur au dénominateur. Mais si cette dernière condition n'avait pas lieu, il est facile d'apercevoir que les mêmes explications, et par conséquent aussi la même règle, subsisteraient toujours.

Sommation d'un nombre quelconque de termes consécutifs d'une série récurrente. — Terme général.

598. *Trouver la somme d'un certain nombre de termes consécutifs d'une série récurrente.*

Pour fixer les idées, supposons que l'échelle de relation ait trois termes, que je désignerai simplement par les lettres p, q, r ; et soit

$$A+B+C+D\ldots+K+L+M+N$$

la suite des termes dont on demande la somme. Par la nature même de la suite, on a

$$\begin{aligned} D&=Ap+Bq+Cr,\\ E&=Bp+Cq+Dr,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ N&=Kp+Lq+Mr; \end{aligned}$$

et, en ajoutant ces égalités, il vient

$$D+E\ldots+N=(A+B\ldots+K)p+(B+C\ldots+L)q + (C+D\ldots+M)r.$$

En désignant par S la somme cherchée, cette équation devient

$$S-A-B-C=(S-L-M-N)p+(S-A-M-N)q + (S-A-B-N)r;$$

et de là il est facile de tirer la valeur de S. Cette valeur est

$$S=\frac{A+B+C-r(A+B+N)-q(A+M+N)-p(L+M+N)}{1-r-q-p}.$$

599. *Trouver le terme général d'une série récurrente.*

Cette question est proposée la dernière, parce qu'elle est celle dont la solution est plus difficile. Supposons que la série ait pour fraction génératrice

$$F=\frac{a'+b'x....+h'x^{m-1}}{a+bx....+kx^m}.$$

On peut écrire cette fraction ainsi

$$F=(a'+b'x....+h'x^{m-1})(a+bx+....+kx^m)^{-1};$$

et alors, en développant la puissance -1, effectuant le produit et prenant dans ce produit la partie qui contient x à une puissance quelconque, il est clair qu'on aurait le terme général de la série récurrente. Mais la question se résout ordinairement par un autre procédé que je vais exposer.

On divise d'abord tous les termes de la fraction F par k, et on l'écrit sous la forme

$$\frac{U}{V}=\frac{\alpha' x^{m-1}+\beta' x^{m-2}+\text{etc.}}{x^m+\alpha x^{m-1}+\beta x^{m-2}+\text{etc.}}.$$

On la suppose toujours réduite à sa plus simple expression, de sorte que U n'a plus aucun facteur commun avec V.

On décompose ensuite le dénominateur en facteurs binomes tels que $x+a$, soit en égalant ce dénominateur à zéro, soit par tout autre moyen; et alors on considère la fraction comme résultant de l'addition de plusieurs autres qui auraient pour dénominateurs ces différents facteurs. On détermine toutes ces fractions partielles, puis on forme le terme général du développement de chacune; et en faisant la somme de ces termes généraux, on aura le terme général de la série récurrente.

Dans cette décomposition en fractions partielles, il faut soigneusement distinguer dans V les facteurs simples de ceux qui sont élevés à des puissances. Pour chaque facteur simple $x+a$, on prendra une fraction de la forme

$$\frac{M}{x+a}.$$

Pour chaque facteur tel que $(x+b)^n$, on en pourrait prendre une de la forme $\frac{Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\text{etc.}}{(x+b)^n}$: mais il est plus commode de n'avoir que des fractions à numérateurs monomes ; et, au lieu d'une fraction comme la précédente, on en prend n comme celles-ci :

$$\frac{N}{(x+b)^n}+\frac{N_1}{(x+b)^{n-1}}+\frac{N_2}{(x+b)^{n-2}}\dots+\frac{N_{n-1}}{x+b}.$$

Il est sans doute inutile d'avertir que M, N, N_1,.... représentent des quantités indépendantes de x.

En conséquence, si on admet que $V=(x+a)(x+b)^n\dots$, on posera

$$\frac{U}{V}=\frac{M}{x+a}+\frac{N}{(x+b)^n}+\frac{N_1}{(x+b)^{n-1}}\dots+\frac{N_{n-1}}{x+b}+\text{etc.},$$

et la question sera réduite pour le moment à déterminer les numérateurs M, N, N_1, etc. Mais cette détermination exigeant des développements assez étendus, je la renverrai dans un article séparé et je la regarderai ici comme effectuée.

La décomposition précédente une fois établie, la détermination du terme général de la série récurrente n'offre aucune difficulté. Chaque fraction partielle peut se mettre sous la forme $P(p+x)^{-\lambda}$, en désignant par λ un nombre entier positif qui peut être égal à 1. Si on développe cette puissance, on trouve facilement que le terme affecté de x^n est

$$\frac{-\lambda(-\lambda-1)(-\lambda-2)\dots(-\lambda-n+1)}{1.2.3\,\dots\dots n}Pp^{-\lambda-n}x^n.$$

C'est une somme de pareilles expressions, toutes renfermant x^n et résultant des différentes fractions partielles, qui composent le terme général cherché.

Quand le dénominateur de la fraction génératrice renferme des facteurs imaginaires, ces facteurs amènent des quantités imaginaires dans le terme général. Cependant si on suppose, comme on le fait toujours, que les coefficients du numérateur et du dénominateur de la fraction proposée soient tous réels, il est évident, *à priori,* qu'en cherchant le développement de cette fraction au moyen de la division, le terme général ne renfermerait pas d'imaginaires. Par conséquent, on est assuré que toutes les imaginaires provenant des facteurs du dénominateur devront se détruire.

Décomposition d'une fraction rationnelle en fractions plus simples.

600. Reprenons la fraction $\frac{U}{V} = \frac{\alpha' x^{m-1} + \beta' x^{m-2} + \text{etc.}}{x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \text{etc.}}$, que je regarderai toujours comme réduite à sa plus simple expression. Après avoir décomposé V en facteurs binomes, j'ai distingué ceux qui n'y entrent qu'au premier degré de ceux qui y sont élevés à des puissances, et j'ai dit que, pour chaque facteur simple $x+a$, on prenait une fraction de la forme $\frac{M}{x+a}$, tandis que pour un facteur tel que $(x+b)^n$, on en prenait n de la forme $\frac{N}{(x+b)^n} + \frac{N_1}{(x+b)^{n-1}} \ldots\ldots\ldots + \frac{N_{n-1}}{x+b}$.

En conséquence, si l'on a $V = (x+a)(x+b)^n \ldots$, on posera

$$\frac{U}{V} = \frac{M}{x+a} + \frac{N}{(x+b)^n} + \frac{N_1}{(x+b)^{n-1}} \cdots + \frac{N_{n-1}}{x+b} + \text{etc.}\,;$$

et c'est la détermination des numérateurs qui doit nous occuper.

Le moyen qui s'offre tout d'abord est de réduire le second membre en une seule fraction de même dénominateur que celle du premier ; et comme les deux numérateurs doivent alors être identiques, on égalera entre eux les coefficients des termes semblables. On a ainsi m équations qui serviront à trouver les m inconnues M, N, N_1, etc. Ces équations sont toutes du premier degré ; car, dans la réduction du second membre au même dénominateur, les inconnues ne se multiplient ni entre elles ni par elles-mêmes.

Par exemple, soit la fraction

$$\frac{x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 - x + 1}\,:$$

après avoir reconnu que le dénominateur est égal à $(x+1)(x-1)^2$, on posera

$$\frac{x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{(x-1)^2} + \frac{N_1}{x-1}.$$

En réduisant tout au même dénominateur, il vient d'abord

$$x^2 - x + 6 = \left.\begin{matrix} M \\ +N_1 \end{matrix}\right| x^2 \left.\begin{matrix} -2M \\ +N \end{matrix}\right| x \left.\begin{matrix} +M \\ +N \\ -N_1 \end{matrix}\right. ;$$

puis, en égalant les termes semblables, on a

$$M + N_1 = 1, \quad -2M + N = -1, \quad M + N - N_1 = 6.$$

De ces équations on tire $M = 2$, $N = 3$, $N_1 = -1$; et par suite la fraction donnée se décompose ainsi :

$$\frac{x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}.$$

601. On sait que des équations du 1er degré peuvent être incompatibles. Ainsi, il y a lieu de craindre que ce cas ne se présente quelquefois pour celles qui servent à déterminer les numérateurs inconnus, et que par suite la décomposition en fractions partielles ne soit impossible. Mais je vais trouver les numérateurs de ces fractions par un procédé qui lèvera tous les doutes.

Soit $x + a$ un facteur simple de V, et supposons que la fraction proposée puisse se décomposer ainsi

$$\frac{U}{V} = \frac{M}{x+a} + \frac{U_1}{Q},$$

M étant une quantité indépendante de x, U_1, une quantité entière par rapport à x, et Q le quotient de V par $x + a$. En réduisant au même dénominateur, il vient

$$U = MQ + U_1(x + a), \quad \text{d'où} \quad U_1 = \frac{U - MQ}{x + a}.$$

Pour que U_1 soit une fonction entière de x, il faut que $U - MQ$ soit divisible par $x + a$, ce qui exige que $U - MQ$ s'évanouisse en y faisant $x = -a$. Si donc on désigne par u et q ce que deviennent alors U et Q, on aura

$$u - Mq = 0, \quad \text{d'où} \quad M = \frac{u}{q}.$$

Telle doit être la valeur de M si la décomposition est possible. Cette valeur n'est ni nulle, ni infinie, ni indéterminée : car, d'un côté, la fraction proposée étant irréductible, U ne doit pas contenir le facteur $x + a$, de sorte que u est différent de zéro; et, d'un autre côté, $x + a$ n'entrant qu'une fois dans V ne doit plus se trouver dans Q, de sorte que q est aussi différent de zéro.

La valeur de M n'a été trouvée qu'en supposant la décomposition possible. Ainsi, à parler rigoureusement, cette supposition doit être vérifiée, ce qui est à présent sans difficulté. En effet, si on prend pour M la valeur trouvée, on est sûr que la quantité

$U - MQ$ sera nulle en y faisant $x = -a$; donc cette quantité est divisible par $x + a$. Or, en nommant U_1 le quotient, on a

$$U - MQ = U_1(x + a),\quad U = MQ + U_1(x + a),\quad \frac{U}{V} = \frac{M}{x + a} + \frac{U_1}{Q},$$

et l'on obtient ainsi la décomposition qu'on voulait opérer.

La fraction $\frac{U_1}{Q}$ doit être irréductible : autrement, on pourrait réduire le second membre de la dernière égalité à une fraction de dénominateur moins élevé que V; donc la fraction proposée serait simplifiable, ce qui est contre la supposition.

Si $x + b$ est un autre facteur simple du polynome V, il devra être aussi un facteur simple du quotient Q; on pourra donc opérer sur $\frac{U_1}{Q}$ une décomposition semblable à celle qui a été faite sur $\frac{U}{V}$, et continuer ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les facteurs simples. Mais on peut aussi, pour chaque fraction partielle, revenir à la fraction proposée elle-même.

Exemple. Soit la fraction

$$\frac{U}{V} = \frac{x^3 + 7x^2 + 13x + 3}{x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2}.$$

Si on pose l'équation $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$ et si on cherche ses racines, on trouve $V = (x - 1)(x + 2)(x + 1)^2$; par conséquent les deux facteurs simples donneront lieu, dans la décomposition, à deux fractions partielles de la forme

$$\frac{M}{x - 1} + \frac{M_1}{x + 2}.$$

Pour trouver M, on a recours à la formule $M = \frac{u}{q}$, dans laquelle u et q représentent les valeurs de U et Q correspondantes à $x = 1$. Ici on a $U = x^3 + 7x^2 + 13x + 3$, $Q = (x + 2)(x + 1)^2$; et la substitution de $x = 1$ donne $u = 24$, $q = 12$. Donc $M = \frac{24}{12} = 2$.

Semblablement, pour calculer M_1, on fera $x = -2$ dans U et dans Q, mais alors il faut prendre $Q = (x - 1)(x + 1)^2$. Il vient ainsi $u = -3$, $q = -3$, $M_1 = 1$.

En conséquence les deux fractions partielles sont

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 2}.$$

602. Occupons-nous maintenant des facteurs qui sont élevés

à des puissances dans V. Soit $V=(x+b)^nQ$: si on considère la fraction $\frac{U}{(x+b)Q}$, ce qui vient d'être dit montre qu'on peut la décomposer ainsi

$$\frac{U}{(x+b)Q}=\frac{N}{x+b}+\frac{U_1}{Q};$$

donc, en divisant les deux membres par $(x+b)^{n-1}$, on aura

$$\frac{U}{(x+b)^nQ}=\frac{N}{(x+b)^n}+\frac{U_1}{(x+b)^{n-1}Q}.$$

Des décompositions toutes semblables donneront

$$\frac{U_1}{(x+b)^{n-1}Q}=\frac{N_1}{(x+b)^{n-1}}+\frac{U_2}{(x+b)^{n-2}Q},$$
$$\frac{U_2}{(x+b)^{n-2}Q}=\frac{N_2}{(x+b)^{n-2}}+\frac{U_3}{(x+b)^{n-3}Q},$$

ainsi de suite jusqu'à ce que l'exposant n soit épuisé.

Le numéro précédent prouve que les valeurs de N, N_1, N_2,... sont

$$N=\frac{u}{q},\quad N_1=\frac{u_1}{q},\quad N_2=\frac{u_2}{q},\ \text{etc.},$$

u, u_1, u_2,.... étant ce que deviennent U, U_1, U_2,... par la substitution de $x=-b$, et q étant ce que devient Q : il faut donc connaître les polynomes U_1, U_2,.... Or, le numéro cité montre que ces polynomes s'obtiendront successivement en effectuant les divisions indiquées dans les formules

$$U_1=\frac{U-NQ}{x+b},\quad U_2=\frac{U_1-N_1Q}{x+b},\ \text{etc.}$$

A l'égard des numérateurs N_1, N_2,.... qui viennent après N, il faut observer que quelques-uns d'entre eux peuvent être nuls; car il est possible que quelques-uns des polynomes U_1, U_2,.... renferment le facteur $x+b$.

Pour exemple, reprenons celui du numéro précédent, dans lequel on a $U=x^3+7x^2+13x+3$, $V=x^4+3x^3+x^2-3x-2=(x-1)(x+2)(x+1)^2$. Le facteur $(x+1)^2$ donnera deux fractions partielles de la forme

$$\frac{N}{(x+1)^2}+\frac{N_1}{x+1}.$$

La quantité désignée par Q est $Q=(x-1)(x+2)$. Si on fait $x=-1$, dans U et Q, on trouve $u=-4$, $q=-2$; donc $N=2$.

Alors on cherche le polynome U_1 par la formule $U_1 = \frac{U - NQ}{x+1}$; et, tout calcul fait, il vient $U_1 = x^2 + 4x + 7$. La substitution de $x = -1$, dans U_1 et Q, donne $u_1 = 4$, $q = -2$; donc $N_1 = -2$.

Donc les deux fractions partielles, qui correspondent à $(x+1)^2$, sont

$$\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1};$$

et, si on les réunit à celles qui ont été trouvées dans le numéro précédent, on aura la décomposition complète de la fraction proposée, savoir :

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 13x + 3}{x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1}.$$

La décomposition d'une fraction rationnelle est utile non-seulement pour la détermination du terme général d'une série récurrente, mais encore dans une partie importante du calcul intégral; et pour cette raison j'ai cru devoir la traiter avec étendue.

FIN

